ĐẶNG THÀNH NAM
(Trung tâm Nghiên cứu và phát triển sản phẩm giáo dục Newstudy.vn)

Khám phá tư duy
Kỹ thuật giải
BẤT ĐẲNG THỨC
BÀI TOÁN MIN-MAX

SOẠN THEO CẤU TRÚC MỚI ÁP DỤNG KÌ THI THPT QUỐC GIA

(PHIÊN BẢN MỚI NHẤT)

Dành cho học sinh 10, 11, 12 nâng cao kiến thức.
Bồi dưỡng học sinh giỏi luyện thi Quốc Gia.

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

MỤC LỤC

Chương 1:

BẤT ĐẲNG THỨC VÀ CÁC KỸ THUẬT CƠ BẢN

KIẾN THỨC CƠ BẢN VỀ BẤT ĐẲNG THỨC

I. Định nghĩa bất đẳng thức

Giả sử A và B là hai biểu thức bằng chữ hoặc bằng số.

+ $A \geq B$ (hoặc $B \leq A$), $A \leq B$ (hoặc $B \geq A$) được gọi là các bất đẳng thức.

+ $A \geq B \Leftrightarrow A - B \geq 0; A - B \geq 0 \Leftrightarrow A \geq B.$

+ Một bất đẳng thức có thể đúng hoặc sai và ta quy ước khi nói về một bất đẳng thức mà không nói gì thêm thì ta hiểu đó là bất đẳng thức đúng.

II. Tính chất cơ bản của bất đẳng thức

- $\forall a \in \mathbb{R}; a \geq a$.
- $\begin{cases} a \leq b \\ b \leq c \end{cases} \Rightarrow a \leq c$.
- $\forall a, b, m \in \mathbb{R}; a \leq b \Rightarrow a \pm m \leq b \pm m$.
- $\begin{cases} a \leq b \\ c \leq d \end{cases} \Rightarrow a + c \leq b + d$.
- $a \geq b + c \Leftrightarrow a - c \geq b$.
- $\forall a, b, \in \mathbb{R}; a \leq b \Leftrightarrow \begin{cases} ma \leq mb \text{ khi m} > 0 \\ \text{ma } \geq \text{mb khi m} < 0 \end{cases}$.
- $\forall a, b, \in \mathbb{R}^+; a \leq b \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{a}{m} \leq \dfrac{b}{m} \text{ khi m} > 0 \\ \dfrac{a}{m} \geq \dfrac{b}{m} \text{ khi m} < 0 \end{cases}$.
- Nếu $a > b > 0 \Rightarrow \dfrac{1}{a} < \dfrac{1}{b}$.
- $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}^+; \begin{cases} a \geq c \\ b \geq d \end{cases} \Rightarrow ab \geq cd$.
- $a \geq b \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} a^n \geq b^n \\ \sqrt[n]{a} \geq \sqrt[n]{b} \end{cases}, \forall n \in \mathbb{N}$.
- $x > y > 0; \left[\begin{array}{l} a > 1 \Rightarrow a^x > a^y \\ 0 < a < 1 \Rightarrow a^x < a^y \end{array} \right.$.
- $a > b \Rightarrow a^{2n+1} > b^{2n+1}; \sqrt[2n+1]{a} > \sqrt[2n+1]{b}, \forall n \in \mathbb{N}$.

1. Bất đẳng thức về giá trị tuyệt đối

- $-|a| \le a \le |a|, \forall a \in \mathbb{R}$.
- $|a| < \alpha \Leftrightarrow -\alpha < a < \alpha \left(khi\ \ \alpha > 0\right)$.
- $|a| > \alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a > \alpha \\ a < -\alpha \end{array}\right. \left(khi\ \ \alpha > 0\right)$.
- $|a| - |b| \le |a+b| \le |a| + |b|, \left(\forall a, b \in \mathbb{R}\right)$.

2. Bất đẳng thức liên quan đến hàm số mũ và logarit

- $\begin{cases} a > 1 \\ x > y \end{cases} \Rightarrow a^x > a^y; \begin{cases} 0 < a < 1 \\ x > y \end{cases} \Rightarrow a^x < a^y$.
- $\begin{cases} a > 1 \\ x > y > 0 \end{cases} \Rightarrow \log_a x > \log_a y; \begin{cases} 0 < a < 1 \\ x > y > 0 \end{cases} \Rightarrow \log_a x < \log_a y$.

3. Bất đẳng thức AM – GM

Cho n số thực không âm $a_1, a_2, ..., a_n$ ta có

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \ge \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = ... = a_n$.

4. Bất đẳng thức Cauchy – Schwarz

Cho 2 dãy số thực $\left(a_1, a_2, ..., a_n\right); \left(b_1, b_2, ..., b_n\right)$ ta có

$$\left(a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n\right)^2 \le \left(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2\right).$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_i = k b_i, i = \overline{1,n}, k \in \mathbb{R}$.

CHỦ ĐỀ 1: KỸ THUẬT BIẾN ĐỔI TƯƠNG ĐƯƠNG

Xuất phát từ bất đẳng thức cơ bản và hết sức tự nhiên $x^2 \ge 0; A - B \ge 0$ với mọi số thực x ta có các bất đẳng thức hết sức đẹp mắt. Nội dung chủ đề này đề cập đến kỹ năng biến đổi bất đẳng thức về dạng luôn đúng. Các bài toán đề cập đến là các bài toán trong chủ đề này các bạn chú ý sẽ được sử dụng đến trong các chủ đề khác ở các chương sau như một bài toán phụ.

A. NỘI DUNG PHƯƠNG PHÁP

I. Các bất đẳng thức cơ bản

Bình phương của một số thực

Với mọi số thực x ta luôn có $x^2 \ge 0$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 0$.

Từ đó ta có các bất đẳng thức với 2 biến và 3 biến thường sử dụng như sau:

- $\left(a - b\right)^2 \ge 0$ hay $a^2 + b^2 \ge 2ab$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.

- $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geq 0$ hay $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$

  hoặc $(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$ hoặc $3\left(a^2+b^2+c^2\right) \geq (a+b+c)^2$.

  Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bất đẳng thức về trị tuyệt đối

- Với 2 số thực x,y ta luôn có $|x|+|y| \geq |x+y|$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $xy \geq 0$.
- Với 2 số thực x,y ta luôn có $|x-y| \geq |x|-|y|$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x(x-y) \geq 0$.

Bất đẳng thức về độ dài cạnh của một tam giác

- $a+b>c; b+c>a; c+a>b$.
- $a>|b-c|; b>|c-a|; c>|a-b|$.
- $a^2+b^2+c^2<2(ab+bc+ca)$.

II. Một số hằng đẳng thức cần lưu ý

- $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\right)$.
- $(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a)$.
- $(a+b)(b+c)(c+a)=(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc$.
- $\dfrac{a-b}{c}+\dfrac{b-c}{a}+\dfrac{c-a}{b}=-\dfrac{(a-b)(b-c)(c-a)}{abc}$.
- $\dfrac{a-b}{a+b}+\dfrac{b-c}{b+c}+\dfrac{c-a}{a+c}+\dfrac{a-b}{a+b}.\dfrac{b-c}{b+c}.\dfrac{c-a}{c+a}=0$.

1) Kỹ thuật biến dùng định nghĩa

Để chứng minh bất đẳng thức: $A \geq B$. Ta chứng minh bất đẳng thức $A-B \geq 0$ đúng.

Ví dụ 1. Cho x > y và xy = 1. Chứng minh rằng $\dfrac{\left(x^2+y^2\right)^2}{(x-y)^2} \geq 8$.

Lời giải

Ta có $x^2+y^2=(x-y)^2+2xy=(x-y)^2+2$ (vì xy = 1)

$\Rightarrow \left(x^2+y^2\right)^2=(x-y)^4+4.(x-y)^2+4$.

Do đó BĐT cần chứng minh tương đương với

$$(x-y)^4+4(x-y)^2+4 \geq 8.(x-y)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad (x-y)^4 - 4(x-y)^2 + 4 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[(x-y)^2 - 2\right]^2 \geq 0.$$

Bất đẳng thức cuối đúng nên ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 2.

a) Cho x,y là hai số thực thoả mãn điều kiện $xy \geq 1$.

Chứng minh rằng

$$\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} \geq \frac{2}{1+xy}.$$

b) Cho a,b,c là các số thực không nhỏ hơn 1 chứng minh

$$\frac{1}{1+a^3} + \frac{1}{1+b^3} + \frac{1}{1+c^3} \geq \frac{3}{1+abc}.$$

c) Cho $x, y, z \in [0;1]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = (1+xyz)\left(\frac{1}{1+x^3} + \frac{1}{1+y^3} + \frac{1}{1+z^3}\right).$$

Lời giải

a) Bất đẳng thức đã cho tương đương với:

$$\left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+xy}\right) + \left(\frac{1}{1+y^2} - \frac{1}{1+xy}\right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{xy - x^2}{\left(1+x^2\right).(1+xy)} + \frac{xy - y^2}{\left(1+y^2\right).(1+xy)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{x(y-x)}{\left(1+x^2\right).(1+xy)} + \frac{y(x-y)}{\left(1+y^2\right).(1+xy)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(y-x)^2(xy-1)}{\left(1+x^2\right).\left(1+y^2\right).(1+xy)} \geq 0$$

BĐT cuối này đúng do $xy \geq 1$. Vậy ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y$ hoặc $xy = 1$.

b) Sử dụng bất đẳng thức:

$$\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} \geq \frac{2}{1+xy}, (xy \geq 1).$$

Ta có $\dfrac{1}{1+a^3} + \dfrac{1}{1+b^3} \geq \dfrac{2}{1+\sqrt{a^3b^3}}$

$$\frac{1}{1+c^3}+\frac{1}{1+abc}\ge\frac{2}{1+\sqrt{abc^4}}$$

$$2\left(\frac{1}{1+\sqrt{a^3b^3}}+\frac{1}{1+\sqrt{abc^4}}\right)\ge 2.\frac{2}{1+\sqrt{\sqrt{a^3b^3}.\sqrt{abc^4}}}=\frac{4}{1+abc}.$$

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên ta có đpcm.

Chú ý. Bất đẳng thức này được áp dụng khá phổ biến trong một số bài toán cực trị. Một số dạng tương tự bất đẳng thức trên như sau

- $\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+y^2}\le\frac{2}{1+xy},(-1<xy\le 1)$.
- $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\ge\frac{2}{\sqrt{1+xy}},(xy\ge 1)$.
- $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\le\frac{2}{\sqrt{1+xy}},(-1<xy\le 1)$.

c) Sử dụng kết quả bài toán trên ta có : $\frac{1}{1+x^3}+\frac{1}{1+y^3}\le\frac{2}{1+\sqrt{x^3y^3}}$

$$\frac{1}{1+z^3}+\frac{1}{1+xyz}\le\frac{2}{1+\sqrt{xyz^4}}$$

$$\frac{2}{1+\sqrt{x^3y^3}}+\frac{2}{1+\sqrt{xyz^4}}\le\frac{4}{1+\sqrt{\sqrt{x^4y^4z^4}}}=\frac{4}{1+xyz}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta suy ra

$$\frac{1}{1+x^3}+\frac{1}{1+y^3}+\frac{1}{1+z^3}\le\frac{3}{1+xyz}\Rightarrow P=(1+xyz)\left(\frac{1}{1+x^3}+\frac{1}{1+y^3}+\frac{1}{1+z^3}\right)\le 3$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z$

Vậy giá trị lớn nhất của $P=3$.

Ví dụ 3. Chứng minh rằng với mọi số thực x,y ta có

$$\left(1+x^2\right)\left(1+y^2\right)\ge\frac{3\left[1+(x+y)^2\right]}{4}.$$

Lời giải

Chú ý: $\frac{4}{3}\left(1+x^2\right)\left(1+y^2\right)=1+(x+y)^2+\frac{(2xy-1)^2+(x-y)^2}{3}\ge 1+(x+y)^2$.

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Ví dụ 4. Chứng minh rằng với mọi số thực a,b không âm thoả mãn $a,b<1$; $a+b\ge\frac{3}{2}$, ta có $\frac{(1-2a)(1-2b)}{(1-a)(1-b)} \ge 4\left(\frac{1-a-b}{2-a-b}\right)^2$.

Lời giải

Bất đẳng thức đã cho tương đương với:

$$\frac{(a-b)^2(2a+2b-3)}{(1-a)(1-b)(2-a-b)^2} \ge 0.$$

Bất đẳng thức luôn đúng và ta có đpcm.

Bài tập tương tự

Chứng minh rằng với mọi số thực a,b không âm thoả mãn $a,b<1; a+b\ge\frac{1}{2}$ ta có

$$\frac{(1+2a)(1+2b)}{(1-a)(1-b)} \ge 4\left(\frac{1+a+b}{2-a-b}\right)^2.$$

2) Kỹ thuật phân tích hằng đẳng thức

Phân tích thành tổng các bình phương $\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2 \ge 0$.

Ví dụ 1. Cho a,b,c là các số thực bất kỳ chứng minh

a) $a^2+b^2+c^2 \ge ab+bc+ca$.

b) $(ab+bc+ca)^2 \ge 3abc(a+b+c)$.

c) $(a+b+c)^2 - \frac{1}{4}\left((b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2\right) \ge 3(ab+bc+ca)$.

d) $(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2) \ge 3(a+b+c)^2$.

Lời giải

a) Bất đẳng thức đã cho tương đương với:

$2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca \ge 0$

$\Leftrightarrow (a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ca+a^2) \ge 0$.

$\Leftrightarrow (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \ge 0$

Bất đẳng thức cuối đúng. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

b) Thực hiện tương tự câu a) đưa về bất đẳng thức luôn đúng

$$(ab-bc)^2+(bc-ca)^2+(ca-ab)^2\ge 0.$$

c) Ta có:

$$\frac{1}{3}(a+b+c)^2-\frac{1}{4}(b-c)^2=\frac{1}{12}(2a-b-c)^2+ab+bc+ca\ge ab+bc+ca.$$

Tương tự ta có:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{3}(a+b+c)^2-\frac{1}{4}(c-a)^2\ge ab+bc+ca\\&\frac{1}{3}(a+b+c)^2-\frac{1}{4}(a-b)^2\ge ab+bc+ca\end{aligned}.$$

Cộng lại theo vế ba bất đẳng thức trên ta có đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

d) Chú ý đẳng thức:

$$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2)-3(a+b+c)^2$$

$$=\frac{1}{2}(c^2+2)\left[(a-b)^2+2(ab-1)^2\right]+\frac{3}{2}(ac+bc-2)^2.$$

$$\Rightarrow (a^2+2)(b^2+2)(c^2+2)\ge 3(a+b+c)^2$$

Ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Ví dụ 2. Cho x,y,z là các số thực thỏa mãn điều kiện $x^2+y^2+z^2=1$.

Chứng minh rằng

a) $-\frac{1}{2}\le xy+yz+zx\le 1$;

b) $(xy+yz+2xz)^2-\dfrac{8}{(x+y+z)^2-xy-yz+2}\ge -3.$

Lời giải

a) Bất đẳng thức vế trái tương đương với:

$$2(xy+yz+zx)+1\ge 0\Leftrightarrow 2(xy+yz+zx)+x^2+y^2+z^2\ge 0\Leftrightarrow (x+y+z)^2\ge 0.$$

Bất đẳng thức được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}x+y+z=0\\x^2+y^2+z^2=1\end{cases}$, chẳng hạn tại $x=-\frac{1}{\sqrt{2}},y=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Bất đẳng thức vế phải:

$$1-(xy+yz+zx)=x^2+y^2+z^2-(xy+yz+zx)$$

$$=\frac{1}{2}\left((x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\right)\ge 0$$

$$\Rightarrow xy+yz+zx\le 1$$

b) Chú ý điều kiện ta rút gọn vế trái và đưa về chứng minh

$$(xy+yz+2xz)^2-\frac{8}{xy+yz+2zx+3}\ge -3$$
$$\Leftrightarrow \frac{(xy+yz+2zx+1)^3}{xy+yz+2zx+3}\ge 0.$$

Vậy ta chỉ cần chứng minh

$$xy+yz+2zx\ge -1=-x^2-y^2-z^2$$

$$\Leftrightarrow (x+z)^2+y^2+y(x+z)\ge 0 \Leftrightarrow \left(x+z+\frac{1}{2}y\right)^2+\frac{3}{4}y^2\ge 0$$

Bất đẳng thức cuối đúng và ta có đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} y=0 \\ x+z+\frac{1}{2}y=0 \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases} \Rightarrow x=\frac{1}{\sqrt{2}}, y=0, z=-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Ví dụ 3. Cho x,y,z là các số thực không âm. Chứng minh:

a) $x^3+y^3+z^3\ge 3xyz$.

b) $\frac{x^3+y^3+z^3}{3}\ge xyz+\frac{3}{4}\left|(x-y)(y-z)(z-x)\right|$.

c) $x^3+y^3+z^3-3xyz\ge 2\left(\frac{y+z}{2}-x\right)^3$.

Lời giải

a) Bất đẳng thức đã cho tương đương với:

$$(x+y+z)\left(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\right)\ge 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(x+y+z)\left[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\right]\ge 0.$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z$.

b) Bất đẳng thức đã cho tương đương với:

$$\frac{1}{6}(x+y+z)\left[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\right]\ge \frac{3}{4}\left|(x-y)(y-z)(z-x)\right|$$
$$\Leftrightarrow \left((x+y)+(y+z)+(z+x)\right)\left[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\right]\ge 9\left|(x-y)(y-z)(z-x)\right|.$$

Chú ý $x+y\ge |x-y|; y+z\ge |y-z|; z+x\ge |z-x|$ và sử dụng bất đẳng thức đã chứng minh được ở câu a) ta có

$$\left(x+y\right)+\left(y+z\right)+\left(z+x\right)\geq\left|x-y\right|+\left|y-z\right|+\left|z-x\right|\geq 3\sqrt[3]{\left|\left(x-y\right)\left(y-z\right)\left(z-x\right)\right|}.$$

$$\left(x-y\right)^2+\left(y-z\right)^2+\left(z-x\right)^2\geq 3\sqrt[3]{\left|\left(x-y\right)^2\left(y-z\right)^2\left(z-x\right)^2\right|}$$

Nhân theo vế hai bất đẳng thức trên ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z$.

c) Theo câu a) ta có $x^3+y^3+z^3-3xyz\geq 0,$ do đó nếu $\frac{y+z}{2}-x\leq 0$ bất đẳng thức luôn đúng.

\+ Ngược lại xét $y+z-2x>0\Leftrightarrow\left(y-x\right)+\left(z-x\right)>0$.

Đặt $y=2a+x, z=2b+x$ bất đẳng thức trở thành

$$12x\left(a^2-ab+b^2\right)+6\left(a+b\right)\left(a-b\right)^2\geq 0.$$

Bất đẳng thức đúng vì $a+b=\frac{y+z}{2}-x>0$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$ hoặc $b=c, a=0$.

Bài tập tương tự

Cho a,b là hai số thực khác 0 thoả mãn điều kiện $ab\geq\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+3$.

Chứng minh rằng $ab\geq\left(\frac{1}{\sqrt[3]{a}}+\frac{1}{\sqrt[3]{b}}\right)^3$.

Ví dụ 4. Cho x,y,z là các số thực dương chứng minh

$$3(x^2+xy+y^2)(y^2+yz+z^2)(z^2+zx+x^2)\geq(x+y+z)^2(xy+yz+zx)^2.$$

Lời giải

Chú ý $x^2+xy+y^2=\frac{3}{4}\left(x+y\right)^2+\frac{1}{4}\left(x-y\right)^2\Rightarrow x^2+xy+y^2\geq\frac{3}{4}\left(x+y\right)^2$.

$$y^2+yz+z^2\geq\frac{3}{4}\left(y+z\right)^2; z^2+zx+x^2\geq\frac{3}{4}\left(z+x\right)^2$$

Do đó $(x^2+xy+y^2)(y^2+yz+z^2)(z^2+zx+x^2)\geq\frac{27}{64}\left(x+y\right)^2\left(y+z\right)^2\left(z+x\right)^2$.

Ta chỉ cần chứng minh

$$\left[(x+y)(y+z)(z+x)\right]^2\geq\frac{64}{81}\left[(x+y+z)(xy+yz+zx)\right]^2$$

$$\Leftrightarrow\left(x+y\right)\left(y+z\right)\left(z+x\right)\geq\frac{8}{9}(x+y+z)(xy+yz+zx)$$

$$\Leftrightarrow x(y-z)^2+y(z-x)^2+z(x-y)^2\geq 0$$

Bất đẳng thức cuối đúng. Ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 5. Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $0 < a \le b \le c \le 1$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)c - \left(a+b\right)\sqrt{c}$.

Lời giải

Ta có

$$P = \left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)c - \left(a+b\right)\sqrt{c} = \sqrt{c}\left(\sqrt{ac} + \sqrt{bc} - a - b\right) \le \sqrt{ac} + \sqrt{bc} - a - b$$

$$\le \sqrt{a} + \sqrt{b} - a - b = -\left(\sqrt{a} - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{b} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \le \frac{1}{2}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $c = 1, a = b = \frac{1}{2}$.

3) Kỹ thuật thêm bớt hằng số

Việc cộng hoặc trừ hai vế của bất đẳng thức cho một số nào đó làm lược bỏ đi phần phức tạp của bất đẳng thức.

Ví dụ 1. Cho x,y,z là các số thực không âm thoả mãn điều kiện $x \ge y \ge z$. Chứng minh rằng

a) $\dfrac{xy + yz + zx}{y^2 + yz + z^2} \ge \dfrac{x+z}{y+z}$.

b) $\dfrac{xy + yz + zx}{x^2 + xy + y^2} \ge \dfrac{(x+z)(y+z)}{(x+z)^2 + (x+z)(y+z) + (y+z)^2}$.

Lời giải

a) Bất đẳng thức đã cho tương đương với:

$$\frac{xy + yz + zx}{x+z} \ge \frac{y^2 + yz + z^2}{y+z}$$

$$\Leftrightarrow \frac{xy + yz + zx}{x+z} - y \ge \frac{y^2 + yz + z^2}{y+z} - y \qquad .$$

$$\Leftrightarrow \frac{zx}{x+z} \ge \frac{z^2}{y+z} \Leftrightarrow z\left[x(y+z) - z(x+z)\right] \ge 0 \Leftrightarrow z\left(xy - z^2\right) \ge 0$$

Bất đẳng thức cuối đúng. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z$ hoặc $z = 0, x = y$.

b) Bất đẳng thức đã cho tương đương với:

$$\frac{(x+z)^2 + (x+z)(y+z) + (y+z)^2}{x^2 + xy + y^2} - 1 \ge \frac{(x+z)(y+z)}{xy + yz + zx} - 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{3z(x+y+z)}{x^2 + xy + y^2} \ge \frac{z^2}{xy + yz + zx} \Leftrightarrow z\left[3(x+y+z)(xy + yz + zx) - z\left(x^2 + xy + y^2\right)\right] \ge 0$$

Bất đẳng thức cuối đúng vì

$$3(x+y+z)(xy+yz+zx)\ge 3(x+y)\left[z(x+y)\right]=3z(x+y)^2\ge z\left(x^2+xy+y^2\right).$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $z=0$.

4) Kỹ thuật biến đổi với bất đẳng thức chứa căn

+ Phép bình phương hai vế được ưu tiên.
+ Cần chứng minh $\sqrt{A_1}+\sqrt{A_2}+...+\sqrt{A_n}\ge b_1+b_2+...+b_n$.

Ta có để chứng minh $\sqrt{A_1}=\sqrt{b_1^2+c_1^2}\ge\sqrt{b_1^2}=b_1$.

Rồi cộng lại theo vế các bất đẳng thức trên ta có đpcm.

Ví dụ 1. Chứng minh với mọi số thực x,y cùng dấu và số thực k, ta có

$$\sqrt{k^2+x}+\sqrt{k^2+y}\ge k+\sqrt{k^2+x+y}.$$

Lời giải

Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$k^2+x+k^2+y+2\sqrt{(k^2+x)(k^2+y)}\ge 2k^2+x+y+2k\sqrt{k^2+x+y}.$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{k^4+k^2(x+y)+xy}\ge k\sqrt{k^2+x+y}\Leftrightarrow xy\ge 0$$

Bất đẳng thức cuối đúng ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi hoặc x bằng 0 hoặc y bằng 0.

Bài 2. Chứng minh rằng với *x,y* là hai số thực không âm thỏa mãn $x+y\ge 1$, ta luôn có $\sqrt{x^2+x+4}+\sqrt{y^2+y+4}\le 2+\sqrt{(x+y)^2+x+y+4}$.

Lời giải

Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$x^2+y^2+x+y+8+2\sqrt{\left(x^2+x+4\right)\left(y^2+y+4\right)}\le$$

$$4+4\sqrt{(x+y)^2+x+y+4}+(x+y)^2+x+y+4.$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{\left(x^2+x+4\right)\left(y^2+y+4\right)}\le xy+2\sqrt{(x+y)^2+x+y+4}.$$

$$\Leftrightarrow\left(x^2+x+4\right)\left(y^2+y+4\right)\le x^2y^2+4xy\sqrt{(x+y)^2+x+y+4}+4\left[(x+y)^2+x+y+4\right].$$

$$\Leftrightarrow xy\left[4\sqrt{(x+y)^2+x+y+4}+x+y-7\right]\ge 0$$ (luôn đúng do $x+y\ge 1$).

Tổng quát. Tương tự ta có các bất đẳng thức cùng dạng sau

+ Với mọi số thực không âm x,y ta luôn có

$$\sqrt{x^2+x+k^2}+\sqrt{y^2+y+k^2}\le k+\sqrt{(x+y)^2+x+y+k^2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=0$ hoặc $y=0$.

+ Với mọi số thực không âm ta luôn có

$\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{y^2-y+1}\le 1+\sqrt{(x+y)^2-x-y+1}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=0$ hoặc $y=0$.

+ $\sqrt{1+a}+\sqrt{1+b}\ge 1+\sqrt{1+a+b},\left(ab\ge 0;a,b\ge -1;a+b\ge -1\right)$.

5) Kỹ thuật đánh giá phân thức

Sử dụng đánh giá cơ bản: $A>B>0\Rightarrow \dfrac{1}{A}<\dfrac{1}{B}$.

Ví dụ 1. Chứng minh rằng với mọi a,b,c dương ta có

$$1<\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{a+c}<2.$$

Lời giải

Ta có : $a+b<a+b+c\Rightarrow \dfrac{1}{a+b}>\dfrac{1}{a+b+c}\Rightarrow \dfrac{a}{a+b}>\dfrac{a}{a+b+c}$ (1)

Tương tự ta có : $\dfrac{b}{b+c}>\dfrac{b}{a+b+c}$ (2) , $\dfrac{c}{a+c}>\dfrac{c}{a+b+c}$ (3)

Cộng vế theo vế các bất đẳng thức (1), (2), (3), ta được :

$$\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{a+c}>1 \quad (*)$$

Ta có : $a<a+b\Rightarrow \dfrac{a}{a+b}<\dfrac{a+c}{a+b+c}$ (4)

Tương tự : $\dfrac{b}{b+c}<\dfrac{a+b}{a+b+c}$ (5) , $\dfrac{c}{c+a}<\dfrac{c+b}{a+b+c}$ (6)

Cộng vế theo vế các bất đẳng thức (4), (5), (6), ta được :

$$\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{a+c}<2 \quad (**)$$

Từ (*) và (**) , ta được : $1<\dfrac{a}{a+b}+\dfrac{b}{b+c}+\dfrac{c}{a+c}<2$ (đpcm)

Ví dụ 2. Cho a,b,c là các số thực không âm thoả mãn điều kiện

$$\frac{a}{1+bc}+\frac{b}{1+ca}+\frac{c}{1+ab}=3.$$

Chứng minh rằng $\dfrac{a}{1+a+bc}+\dfrac{b}{1+b+ca}+\dfrac{c}{1+c+ab}\ge \dfrac{3}{4}$.

Lời giải

Đặt $x=\dfrac{a}{1+bc};y=\dfrac{b}{1+ca};z=\dfrac{c}{1+ab}\Rightarrow x+y+z=3$.

Ta cần chứng minh $\frac{x}{1+x}+\frac{y}{1+y}+\frac{z}{1+z}\geq\frac{3}{4}$.

Chú ý $\frac{x}{1+x}\geq\frac{x}{1+x+y+z}$.

$\frac{y}{1+y}\geq\frac{y}{1+x+y+z}$

$\frac{z}{1+z}\geq\frac{z}{1+x+y+z}$

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên ta có điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi có một số bằng 3 và hai số bằng 0.

Ví dụ 3. Cho a,b,c là các số thực không âm có tổng bằng 1. Chứng minh

$$\frac{1+a^2}{1+b^2}+\frac{1+b^2}{1+c^2}+\frac{1+c^2}{1+a^2}\leq\frac{7}{2}.$$

Lời giải

Ta thấy dấu bằng đạt tại khi một số bằng 1 và hai số bằng 0.

Vậy giả sử $a=\max\{a,b,c\}$. Khi đó ta mạnh dạn đánh giá $1+b^2\geq1;1+c^2\geq1$.

Ta có $1+b^2\geq1\Rightarrow\frac{1+a^2}{1+b^2}\leq1+a^2;$.

$1+c^2\geq1\Rightarrow\frac{1+b^2}{1+c^2}\leq1+b^2$

Suy ra $P\leq2+a^2+b^2+\frac{1+c^2}{1+a^2}\leq2+a^2+b^2+c^2+\frac{1}{1+a^2}$.

$$\leq2+a^2+(b+c)^2+\frac{1}{1+a^2}=2+a^2+(1-a)^2+\frac{1}{1+a^2}$$

Ta chỉ cần chứng minh $2+a^2+(1-a)^2+\frac{1}{1+a^2}\leq\frac{7}{2}$.

$$\Leftrightarrow(a-1)\left(4a^3+3a-1\right)\leq0$$

Bất đẳng thức cuối luôn đúng nên ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=1,b=c=0$ hoặc các hoán vị.

Chú ý. Bằng cách tương tự ta chứng minh được $\frac{1+a^k}{1+b^k}+\frac{1+b^k}{1+c^k}+\frac{1+c^k}{1+a^k}\leq\frac{7}{2}$.

Với k là số nguyên dương.

Ví dụ 4. Cho x,y,z là các số thực thoả mãn điều kiện $x, y \ge -1; x+y+z=3$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \dfrac{x^2}{x^2+y^2+4(xy+1)} + \dfrac{y^2-1}{z^2-4z+5}$.

Lời giải

Trước hết đánh gia hai mẫu số ở hai phân thức bằng cách thay $z = 3-x-y$.

Ta chứng minh $x^2+y^2+4(xy+1) \ge z^2-4z+5$.

$$\Leftrightarrow x^2+y^2+4xy-(3-x-y)^2+4(3-x-y)-1 \ge 0$$

$$\Leftrightarrow 2(x+y)+2xy+2 \ge 0 \Leftrightarrow (x+1)(y+1) \ge 0$$

Bất đẳng thức đúng.

Vậy ta có $P \le \dfrac{x^2+y^2-1}{z^2-4z+5} = \dfrac{(x+y)^2-2xy-1}{z^2-4z+5}$.

Chú ý. $xy \ge -1-x-y = z-4; x+y = 3-z$.

Khi đó $P \le \dfrac{(3-z)^2-2(z-4)-1}{z^2-4z+5} = \dfrac{z^2-8z+16}{z^2-4z+5} = -\dfrac{(2z-3)^2}{z^2-4z+5} + 5 \le 5$.

Dấu bằng đạt tại $\begin{cases} z = \dfrac{3}{2} \\ x+y+z=3 \\ xy = z-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = \dfrac{3}{2} \\ xy = -\dfrac{5}{2} \\ z = \dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1, y=\dfrac{5}{2}, z=\dfrac{3}{2} \\ x=\dfrac{5}{2}, y=-1, z=\dfrac{3}{2} \end{array}\right.$.

6) Kỹ thuật đánh giá bất đẳng thức có chứa dấu giá trị tuyệt đối

Sử dụng hai bất đẳng thức quen thuộc: $|x|+|y| \ge |x+y|; |x|-|y| \le |x-y|$.

Chú ý. Tư duy đầu tiên là khử dấu giá trị tuyệt đối muốn vậy ta xét trường hợp.

Ví dụ 1. Chứng minh với mọi số thực a,b,c ta có

$$|a|+|b|+|c|+|a+b+c| \ge |a+b|+|b+c|+|c+a|.$$

Lời giải

Trong ba số a,b,c có ít nhất hai số cùng dấu không mất tính tổng quát giả sử là a và b khi đó $|a|+|b| = |a+b|$.

Vậy ta chỉ cần chứng minh $|c|+|a+b+c| \ge |b+c|+|c+a|$

$$\Leftrightarrow c^2+(a+b+c)^2+2|c(c+a+b)| \ge (a+c)^2+(b+c)^2+2|(a+c)(b+c)|$$

$$\Leftrightarrow ab+|c(c+a+b)| \ge |(a+c)(b+c)| = |c(c+a+b)+ab|$$

Bất đẳng thức cuối luôn đúng (đpcm).

Ví dụ 2. Cho x,y,z là các số thực đôi một không đồng thời bằng 0. Chứng minh

$$-1 \le \frac{\left(x^2-y^2\right)\left(y^2-z^2\right)\left(z^2-x^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)\left(y^2+z^2\right)\left(z^2+x^2\right)} \le 1.$$

Lời giải

Ta có $\left|x^2-y^2\right| \le \left|x^2+y^2\right| \Leftrightarrow \left(x^2-y^2\right)^2 \le \left(x^2+y^2\right)^2 \Leftrightarrow 4x^2y^2 \ge 0$.

Từ đó suy ra $\left|\frac{\left(x^2-y^2\right)\left(y^2-z^2\right)\left(z^2-x^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)\left(y^2+z^2\right)\left(z^2+x^2\right)}\right| \le 1$

$$\Leftrightarrow -1 \le \frac{\left(x^2-y^2\right)\left(y^2-z^2\right)\left(z^2-x^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)\left(y^2+z^2\right)\left(z^2+x^2\right)} \le 1$$

Bất đẳng thức được chứng minh.

Ví dụ 3. Cho a,b,c là các số thực không âm chứng minh

$$3\sqrt[3]{abc}+|a-b|+|b-c|+|c-a| \ge a+b+c.$$

Lời giải

Không mất tính tổng quát giả sử $a \ge b \ge c$. Khi đó bất đẳng thức tương đương với:

$$3\sqrt[3]{abc}+(a-b)+(b-c)+(c-a) \ge a+b+c$$

$$\Leftrightarrow a-b-3c+3\sqrt[3]{abc} \ge 0 \Leftrightarrow (a-b)+3\sqrt[3]{c}\left(\sqrt[3]{ab}-\sqrt[3]{c^2}\right) \ge 0$$

Bất đẳng thức cuối luôn đúng và ta có đpcm.

Bài t . p tương tự

Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện

$$3\sqrt[3]{abc}+|a-b|+|b-c|+|c-a| = 1.$$

Chứng minh rằng $a\sqrt{bc}+b\sqrt{ca}+c\sqrt{ab} \le \frac{1}{3}$.

Ví dụ 4. Cho x,y,z là các số thực chứng minh

$$|x-y|+|y-z|+|z-x| \ge 2\sqrt{x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx}.$$

Lời giải

Không mất tính tổng quát giả sử $x \ge y \ge z$. Bất đẳng thức trở thành

$$(x-y)+(y-z)+(x-z) \ge 2\sqrt{\frac{1}{2}(x-y)^2+\frac{1}{2}(y-z)^2+\frac{1}{2}(z-x)^2}$$

$$\Leftrightarrow 2(x-z) \ge \sqrt{2\left[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\right]}$$

$$\Leftrightarrow 4(x-z)^2 \ge 2\left[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\right]$$

$$\Leftrightarrow (x-z)^2 \ge (x-y)^2+(y-z)^2$$

$$\Leftrightarrow [(x-y)+(y-z)]^2 \ge (x-y)^2+(y-z)^2 \Leftrightarrow 2(x-y)(y-z)\ge 0$$

Bất đẳng thức cuối luôn đúng ta có đpcm.

Ví dụ 5. Cho n số thực $x_1,x_2,...,x_n$ (với $n\ge 3$). Chứng minh

$$max\{x_1,x_2,...,x_n\} \ge \frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}+\frac{|x_1-x_2|+|x_2-x_3|+...+|x_{n-1}-x_n|+|x_n-x_1|}{2n}.$$

Lời giải

Chú ý. Với hai số thực x,y bất kỳ ta luôn có

$\min\{x,y\}\le x,y\le max\{x,y\}$ và $max\{x,y\}=\dfrac{x+y+|x-y|}{2}$.

Sử dụng $max\{x,y\}=\dfrac{x+y+|x-y|}{2}$ ta được:

$$\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}+\frac{|x_1-x_2|+|x_2-x_3|+...+|x_{n-1}-x_n|+|x_n-x_1|}{2n}$$
$$=\frac{x_1+x_2+|x_1-x_2|}{2n}+\frac{x_2+x_3+|x_2-x_3|}{2n}+...+\frac{x_n+x_1+|x_n-x_1|}{2n}$$
$$=\frac{max\{x_1,x_2\}+max\{x_2,x_3\}+...+max\{x_{n-1},x_n\}+max\{x_n,x_1\}}{n}\le max\{x_1,x_2,...,x_n\}$$

Bài toán được chứng minh. Dấu bằng đạt tại chẳng hạn $x_1=x_2=...=x_n$.

7) Kỹ thuật đặt ẩn phụ

Với bất đẳng thức đối xứng hai biến ta có thể đặt $u=a+b;v=ab$.

Với phân thức ta có để đặt các mẫu số là các biến mới.

Ví dụ 1. Chứng minh rằng với mọi a,b dương, ta có

$$a^2b^2\left(a^2+b^2-2\right)\ge(a+b)(ab-1).$$

Lời giải

Đặt $a+b=2u, ab=v^2, v>0.$ Khi đó bất đẳng thức tương đương với:

$$a^2b^2(a^2+b^2-2)\ge(a+b)(ab-1)$$

$$\Leftrightarrow a^2b^2\left[(a+b)^2-2ab-2\right]\ge(a+b)(ab-1)$$

$$\Leftrightarrow v^4(4u^2-2v^2-2)\ge 2u(v^2-1)$$

$$\Leftrightarrow 2v^4u^2-(v^2-1)u-v^4(v^2+1)\ge 0$$

Điều này chứng tỏ $u \ge \dfrac{v^2-1+\sqrt{(v^2-1)^2+8v^8(v^2+1)}}{4v^4}$.

Mặt khác $u=\dfrac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}=v$ do đó ta chỉ cần chứng minh:

$$v \ge \frac{v^2-1+\sqrt{(v^2-1)^2+8v^8(v^2+1)}}{4v^4} \Leftrightarrow (v-1)^2(v+1)(v^2+v+1)\ge 0$$

Bất đẳng thức cuối đúng. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=1$.

Ví dụ 2. Cho a,b,c là các số thực dương chứng minh rằng

$$\frac{x^2-z^2}{y+z}+\frac{y^2-x^2}{z+x}+\frac{z^2-y^2}{x+y}\ge 0.$$

Lời giải

Đặt $a=x+y, b=y+z, c=z+x$ khi đó vế trái của bất đẳng thức là

$$\frac{(a-b)c}{b}+\frac{(b-c)a}{c}+\frac{(c-a)b}{a}=\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}-a-b-c$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{ab}{c}}-\sqrt{\frac{bc}{a}}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{bc}{a}}-\sqrt{\frac{ca}{b}}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{ca}{b}}-\sqrt{\frac{ab}{c}}\right)^2\ge 0$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z$.

Ví dụ 3. Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c=3$.

Chứng minh rằng $\dfrac{4}{(a+b)^3}+\dfrac{4}{(b+c)^3}+\dfrac{4}{(c+a)^3}\ge\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}$.

Lời giải

Đặt $\begin{cases}a+b=x\\ b+c=y\\ c+a=z\end{cases}$ do $a,b,c>0$ và $a+b+c=3$ nên $x,y,z>0$ và $\begin{cases}a=3-y\\ b=3-z\\ c=3-x\end{cases}$.

Khi đó bất đẳng thức trở thành: $\dfrac{4}{x^3}+\dfrac{4}{y^3}+\dfrac{4}{z^3}\ge\dfrac{3-y}{y}+\dfrac{3-x}{x}+\dfrac{3-z}{z}$.

$$\Leftrightarrow\left(\frac{4}{x^3}-\frac{3-x}{x}\right)+\left(\frac{4}{y^3}-\frac{3-y}{y}\right)+\left(\frac{4}{z^3}-\frac{3-z}{z}\right)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow\frac{(x+1)(x-2)^2}{x^3}+\frac{(y+1)(y-2)^2}{y^3}+\frac{(z+1)(z-2)^2}{z^3}\ge 0.$$

Bất đẳng thức cuối luôn đúng, từ đó ta có đpcm.

8) Kỹ thuật sử dụng phép thế

Từ bài toán có điều kiện từ hai biến trở lên ta rút một biến theo các biến còn lại rồi thay vào bất đẳng thức cần chứng minh.

\+ Dạng này toán nếu có cần kết hợp đánh giá một số là max hoặc một số là min.

Ví dụ 1. Cho a,b,c là các số thực không âm thoả mãn điều kiện $ab+bc+ca=1$.

Chứng minh rằng $a+b+c+\frac{5abc}{3}\ge 2$.

Lời giải

Không mất tính tổng quát giả sử $c\ge b\ge a$.

Thay $c=\frac{1-ab}{a+b}$ ta phải chứng minh $a+b+\frac{1-ab}{a+b}+5ab.\frac{1-ab}{3(a+b)}\ge 2$

$$\Leftrightarrow ab(2-5ab)+3(a+b-1)^2\ge 0$$

Bất đẳng thức hiển nhiên đúng vì $ab\le\frac{1}{3}$.

9) Kỹ thuật đánh giá theo cặp

Áp dụng với dạng tích bất đẳng thức dạng tích.

Ví dụ 1. Cho a,b,c là các số thực thuộc khoảng $(0;1)$. Chứng minh rằng

$$\left(a-a^2\right)\left(b-b^2\right)\left(c-c^2\right)\ge(a-bc)(b-ca)(c-ab).$$

Lời giải

Không mất tính tổng quát giả sử $a\ge b\ge c$. Khi đó do $a,b,c\in(0;1)\Rightarrow\begin{cases}a-bc>0\\ b-ca>0\end{cases}$.

Nếu $c-ab<0$ bất đẳng thức luôn đúng.

Nếu $c-ab\ge 0$ khi đó ta chứng minh $\sqrt{bc}(1-a)\ge\sqrt{(b-ac)(c-ab)}$.

Thật vậy $\sqrt{bc}(1-a)\ge\sqrt{(b-ac)(c-ab)}\Leftrightarrow bc(1-a)^2\ge(b-ac)(c-ab)$.

$\Leftrightarrow bc\left(a^2-2a+1\right)\ge bc-ab^2-ac^2+a^2bc\Leftrightarrow a(b-c)^2\ge 0$ (luôn đúng).

Tương tự ta có: $\begin{cases}\sqrt{ac}(1-b)\ge\sqrt{(a-bc)(c-ab)}\\ \sqrt{ab}(1-c)\ge\sqrt{(a-bc)(b-ca)}\end{cases}$.

Nhân theo vế 3 bất đẳng thức trên ta có điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Ví dụ 2. Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c=1$. Chứng minh rằng $8a^2b^2c^2\ge(a-bc)(b-ca)(c-ab)$.

Lời giải

Không mất tính tổng quát giả sử $a \ge b \ge c$ khi đó do $a,b,c \in (0;1) \Rightarrow \begin{cases} a-bc>0 \\ b-ca>0 \end{cases}$.

Nếu $c-ab<0$ bất đẳng thức luôn đúng.

Nếu $c-ab \ge 0$ khi đó ta chứng minh $2ab \ge \sqrt{(a-bc)(b-ca)}$.

Thật vậy $2ab \ge \sqrt{(a-bc)(b-ca)} \Leftrightarrow 4a^2b^2 \ge (a-bc)(b-ca)$.

$\Leftrightarrow 4a^2b^2 \ge ab - a^2c - b^2c + abc^2 \Leftrightarrow 4a^2b^2 + c\left(a^2+b^2\right) - ab\left(c^2+1\right) \ge 0$

$\Leftrightarrow 4a^2b^2 + c(a-b)^2 + ab\left(2c-c^2-1\right) \ge 0 \Leftrightarrow 4a^2b^2 + c(a-b)^2 - ab(c-1)^2 \ge 0$

$\Leftrightarrow ab\left[4ab-(a+b)^2\right] + c(a-b)^2 \ge 0 \Leftrightarrow (c-ab)(a-b)^2 \ge 0$ (luôn đúng).

Tương tự ta có $2bc \ge \sqrt{(b-ca)(c-ab)}; 2ca \ge \sqrt{(c-ab)(a-bc)}$.

Nhân theo vế 3 bất đẳng thức trên ta có ngay điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{3}$.

10). Kỹ thuật sử dụng tính thuần nhất

Đưa bất đẳng thức về dạng đồng bậc sẽ dễ xử lý hơn(xem thêm chương 3).

Ví dụ 1. Cho a,b,c là các số thực thoả mãn điều kiện $a^2+b^2+c^2=3$.

Chứng minh rằng $a^3(b+c)+b^3(c+a)+c^3(a+b) \le 6$.

Lời giải

Bất đẳng thức đã cho tương đương với:

$$a^3(b+c)+b^3(c+a)+c^3(a+b) \le \frac{2}{3}\left(a^2+b^2+c^2\right)^2$$

$$\Leftrightarrow 2\left(a^4+b^4+c^4\right)+4\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right) \ge 3ab\left(a^2+b^2\right)+3bc\left(b^2+c^2\right)+3ca\left(c^2+a^2\right)$$

Bất đẳng thức trên là tổng của ba bất đẳng thức có dạng:

$$a^4+b^4+4a^2b^2-3ab\left(a^2+b^2\right) = (a-b)^4 + ab(a-b)^2$$
$$= (a-b)^2\left(a^2-ab+b^2\right) \ge 0$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

11) Biến đổi hàm lượng giác

Ví dụ 1. Chứng minh với mọi số thực x ta có $\cos(\sin x) > \sin(\cos x)$.

Lời giải

Bất đẳng thức đã cho tương đương với: $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \sin x\right) - \sin(\cos x) > 0$

$$\Leftrightarrow 2\cos\frac{\frac{\pi}{2}-\sin x+\cos x}{2}.\sin\frac{\frac{\pi}{2}-\sin x-\cos x}{2}>0.$$

Bất đẳng thức cuối luôn đúng do

$$\left|\sin x-\cos x\right|=\sqrt{2}\left|\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right|\le\sqrt{2};\left|\sin x+\cos x\right|=\sqrt{2}\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|\le\sqrt{2}.$$

Vì vậy $0<\dfrac{\frac{\pi}{2}-\sqrt{2}}{2}<\dfrac{\frac{\pi}{2}-\sin x-\cos x}{2}\le\dfrac{\frac{\pi}{2}+\sqrt{2}}{2}<\dfrac{\pi}{2}$;

$$0<\frac{\frac{\pi}{2}-\sqrt{2}}{2}\le\frac{\frac{\pi}{2}-\sin x-\cos x}{2}\le\frac{\frac{\pi}{2}+\sqrt{2}}{2}<\frac{\pi}{2}$$

Bất đẳng thức được chứng minh.

B. BÀI TOÁN CHỌN LỌC

Bài 1. Cho x,y,z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $x\le y\le z$.

Chứng minh rằng $y\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{z}\right)+\dfrac{1}{y}(x+z)\le\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{z}\right)(x+z)$.

Lời giải

BĐT tương đương với: $\dfrac{(x+z)^2}{xz}\ge\dfrac{y(x+z)}{xz}+\dfrac{x+z}{y}$

$$\Leftrightarrow y(x+z)\ge y^2+zx\Leftrightarrow y^2-y(z+x)+zx\le 0\Leftrightarrow (y-x)(y-z)\le 0$$

Bất đẳng thức cuối đúng vì $0<x\le y\le z$.

Ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z$.

Bài 2. Cho x,y,z là các số thực dương thoả mãn điều kiện $x\ge y\ge z.$ Chứng minh

$$\frac{x(x^2+y^2)}{x+y}+\frac{y(z^2+x^2)}{z+x}+\frac{z(y^2+z^2)}{y+z}\ge x^2+y^2+z^2.$$

Lời giải

Bất đẳng thức đã cho tương đương với:

$$\frac{xy(y-x)}{x+y}\left(\frac{1}{x+z}-\frac{1}{x+y}\right)+yz(y-z)\left(\frac{1}{y+z}-\frac{1}{x+z}\right)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow\frac{xy(x-y)(y-z)}{(x+y)(x+z)}+\frac{yz(x-y)(y-z)}{(x+z)(y+z)}\ge 0$$

Ta có điều phải chứng minh.

Bài 3. Cho x, y, z là các số thực thuộc đoạn $[0;1]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = 2\left(x^3 + y^3 + z^3\right) - \left(x^2y + y^2z + z^2x\right)$.

Lời giải

Ta có $x, y, z \in [0;1] \Rightarrow x^3 \le x^2 \le x; y^3 \le y^2 \le y; z^3 \le z^2 \le z.$

Từ đó suy ra $2\left(x^3 + y^3 + z^3\right) \le x^2 + x + y^2 + y + z^2 + z.$

$P \le x + y + z + x^2 + y^2 + z^2 - \left(x^2y + y^2z + z^2x\right).$

Ta chứng minh $x + y + z + x^2 + y^2 + z^2 - \left(x^2y + y^2z + z^2x\right) \le 3$.

$\Leftrightarrow x^2(1-y) + y^2(1-z) + z^2(1-x) + x + y + z - 3 \le 0$

$\Leftrightarrow \left(x^2 - 1\right)(1-y) + \left(y^2 - 1\right)(1-z) + \left(z^2 - 1\right)(1-x) \le 0 \cdot$

Bất đẳng thức cuối đúng do

$\left(x^2 - 1\right)(1-y) \le 0; \left(y^2 - 1\right)(1-z) \le 0; \left(z^2 - 1\right)(1-x) \le 0$.

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng 3 xảy ra khi $x = y = z = 1$.

Bài 4. Chứng minh rằng với mọi số thực không âm a,b,c ta có

$$a^4 + b^4 + c^4 + abc(a+b+c) \ge 2\left(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2\right).$$

Lời giải

Không mất tính tổng quát giả sử $a \ge b \ge c.$ Khi đó $c^2(c-a)(c-b) \ge 0$ và

$$\begin{aligned} a^2(a-b)(a-c) + b^2(b-c)(b-a) &= (a-b)\left[a^2(a-c) - b^2(b-c)\right] \\ &\ge (a-b)\left[a^2(b-c) - b^2(b-c)\right] \\ &= (a-b)(b-c)\left(a^2 - b^2\right) \ge 0 \end{aligned}$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Nhận xét. Đây là một trường hợp riêng của bất đẳng thức Schur. Với a,b,c là các số thực không âm và $k > 0$ ta luôn có

$$a^k(a-b)(a-c) + b^k(b-c)(b-a) + c^k(c-a)(c-b) \ge 0.$$

Bài 5. Cho $a, b, c \ge 0$ thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 1$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \sqrt{a + \dfrac{(b-c)^2}{4}} + \sqrt{b + \dfrac{(c-a)^2}{4}} + \sqrt{c + \dfrac{(a-b)^2}{4}}$.

Lời giải

Chuyển mỗi biểu thức trong căn về cùng bậc hai ta có :

$$a+\frac{(b-c)^2}{4}=a(a+b+c)+\frac{(b-c)^2}{4}$$

$$=a^2+a(b+c)+\frac{(b+c)^2-4bc}{4}=\left(a+\frac{b+c}{2}\right)^2-bc\le\left(a+\frac{b+c}{2}\right)^2.$$

Suy ra $\sqrt{a+\frac{(b-c)^2}{4}}\le a+\frac{b+c}{2}$

Tương tự ta có : $\sqrt{b+\frac{(c-a)^2}{4}}\le b+\frac{c+a}{2}$;

$$\sqrt{c+\frac{(a-b)^2}{4}}\le c+\frac{a+b}{2}$$

Cộng theo vế 3 bất đẳng thức trên ta được :

$$P=\sqrt{a+\frac{(b-c)^2}{4}}+\sqrt{b+\frac{(c-a)^2}{4}}+\sqrt{c+\frac{(a-b)^2}{4}}\le 2(a+b+c)=2.$$

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng 2 đạt tại $a=b=0,\ c=1$ hoặc các hoán vị.

Nhận xét. Ta có thể tổng quát thành bài toán như sau :

Cho a,b,c,k là các số thực không âm thỏa mãn $a+b+c=k.$ Chứng minh rằng

$$\sqrt{ka+\frac{(b-c)^2}{4}}+\sqrt{kb+\frac{(c-a)^2}{4}}+\sqrt{kc+\frac{(a-b)^2}{4}}\le 2k.$$

Bài 6. Cho a,b,c là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $a+b+c=1.$

Chứng minh rằng $\sqrt{a+(b-c)^2}+\sqrt{b+(c-a)^2}+\sqrt{c+(a-b)^2}\ge\sqrt{3}.$

Lời giải

Không mất tính tổng quát giả sử $a\ge b\ge c$ khi đó :

Sử dụng bất đẳng thức Mincopsi ta có :

$$\sqrt{a+(b-c)^2}+\sqrt{b+(c-a)^2}+\sqrt{c+(a-b)^2}\ge$$

$$\sqrt{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2+\left[(a-b)+(b-c)+(c-a)\right]^2}$$

$$=\sqrt{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2+4(a-c)^2}.$$

Bất đẳng thức được chứng minh nếu ta chứng minh được bất đẳng thức sau đúng.

$$\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2+4(a-c)^2\ge 3(a+b+c)$$

$$\Leftrightarrow 4(a-c)^2\ge\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2+\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)^2+\left(\sqrt{c}-\sqrt{a}\right)^2.$$

Ta có :

$$\left[\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)+\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)\right]^2=\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2+\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)^2+2\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)$$

$$\geq\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2+\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)^2$$

$$\Rightarrow\left(\sqrt{c}-\sqrt{a}\right)^2\geq\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2+\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)^2$$

Suy ra $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2+\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)^2+\left(\sqrt{c}-\sqrt{a}\right)^2\leq 2\left(\sqrt{c}-\sqrt{a}\right)^2$.

Mặt khác :

$$4(a-c)^2-2\left(\sqrt{c}-\sqrt{a}\right)^2=2\left(\sqrt{a}-\sqrt{c}\right)^2\left[2\left(\sqrt{a}+\sqrt{c}\right)^2-1\right]$$

$$=2\left(\sqrt{a}-\sqrt{c}\right)^2\left[2(a+c)-1+4\sqrt{ac}\right]$$

$$=2\left(\sqrt{a}-\sqrt{c}\right)^2\left[2a+c+c-1+4\sqrt{ac}\right]$$

$$\geq 2\left(\sqrt{a}-\sqrt{c}\right)^2\left[a+b+c+c-1+4\sqrt{ac}\right]$$

$$=2\left(\sqrt{a}-\sqrt{c}\right)^2\left[c+4\sqrt{ac}\right]\geq 0$$

Bài toán được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{3}$ hoặc $a=1,b=c=0$ và các hoán vị.

Bài 7. Cho *a,b,c* là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c=3$.

Chứng minh rằng $2\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)+3\leq 3\left(a^2+b^2+c^2\right)$.

Lời giải

Không mất tính tổng quát giả sử $a=\min\{a,b,c\}\Rightarrow a\leq 1$.

Ta có $2\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)+3-3\left(a^2+b^2+c^2\right)\leq 0$

$$\Leftrightarrow\left(2a^2-3\right)\left(b^2+c^2\right)+2b^2c^2+3-3a^2\leq 0$$

$$\Leftrightarrow\left(2a^2-3\right)(b+c)^2+2b^2c^2+2\left(3-2a^2\right)bc+3-3a^2\leq 0$$

$$\Leftrightarrow P=\left(2a^2-3\right)(3-a)^2+2b^2c^2+2\left(3-2a^2\right)bc+3-3a^2\leq 0.$$

Ta có $bc\leq\left(\frac{b+c}{2}\right)^2=\left(\frac{3-a}{2}\right)^2$. Vì $a\leq 1\Rightarrow 3-2a^2>0$ do đó

$$P \le \left(2a^2-3\right)(3-a)^2+2.\left(\frac{3-a}{2}\right)^4+2\left(3-2a^2\right)\left(\frac{3-a}{2}\right)^2+3-3a^2$$
$$=\frac{3}{8}(a-1)^2\left(3a^2-14a-1\right)\le 0$$

Vì $3a^2-14a-1=3a(a-1)-11a-1<0, \forall a\in(0;1]$.

Bài toán được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài 8. Cho các số thực $a,b,c\in[0;1]$ thỏa mãn $a+b+c=\frac{3}{2}$.

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\cos\left(a^2+b^2+c^2\right)$.

Lời giải

Do $a,b,c\in[0;1]$ nên $0\le a^2+b^2+c^2\le a+b+c=\frac{3}{2}<\frac{\pi}{2}$.

Vậy P lớn nhất(nhỏ nhất) khi $a^2+b^2+c^2$ nhỏ nhất (lớn nhất)

- **Tìm giá trị nhỏ nhất** của $a^2+b^2+c^2$.

Ta có $a^2+b^2+c^2\ge\frac{1}{3}(a+b+c)^2=\frac{3}{4}$. Suy ra GTLN của P bằng $\cos\frac{3}{4}$; xảy ra khi $a=b=c=\frac{1}{2}$

- **Tìm giá trị lớn nhất** của $a^2+b^2+c^2$.

Giả sử $a\le b\le c\Rightarrow a+b+c=\frac{3}{2}\le 3c\Rightarrow c\ge\frac{1}{2}$.

Vậy $a^2+b^2+c^2=(a+b)^2-2ab+c^2\le(a+b)^2+c^2=c^2+\left(\frac{3}{2}-c\right)^2\le\frac{5}{4}$

Do $(c-1)(2c-1)\le 0$

Suy ra GTNN của P bằng $\cos\frac{5}{4}$; xảy ra khi $(a,b,c)=\left(0,0,\frac{1}{2}\right)$ hoặc các hoánvị.

Bài 9. (TSĐH Khối D 2008) Cho x,y là các số thực không âm.

Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{(x-y)(1-xy)}{(x+1)^2(y+1)^2}$.

Lời giải

Ta có :

$$P=\frac{(x-y)(1-xy)}{(x+1)^2(y+1)^2}=\frac{\left(x+xy^2\right)-\left(y+yx^2\right)}{(x+1)^2(y+1)^2}=\frac{x(y+1)^2-y(x+1)^2}{(x+1)^2(y+1)^2}=\frac{x}{(x+1)^2}-\frac{y}{(y+1)^2}.$$

Với $x, y \ge 0$ ta có : $0 \le \frac{x}{(x+1)^2} \le \frac{1}{4}; 0 \le \frac{y}{(y+1)^2} \le \frac{1}{4}$.

Suy ra giá trị lớn nhất của P bằng $\frac{1}{4}$ đạt tại $x = 1, y = 0$ và giá trị nhỏ nhất của P $-\frac{1}{4}$ đạt tại $x = 0, y = 1$.

Cách 2 : Ta có đánh giá thông qua trị tuyệt đối như sau :

$$|P| = \left|\frac{(x-y)(1-xy)}{(1+x)^2(1+y)^2}\right| \le \frac{|(x+y)(1+xy)|}{(1+x)^2(1+y^2)} \le \frac{(x+y+1+xy)^2}{4(1+x)^2(1+y)^2} = \frac{1}{4}.$$

Do đó $-\frac{1}{4} \le P \le \frac{1}{4}$. Ta có kết quả tương tự.

Bài 10. Cho $a, b, c \ge 0$ là các số đôi một khác nhau. Chứng minh rằng

$$(ab+bc+ca)\left(\frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2}\right) \ge 4.$$

Lời giải

Giả sử $c = \min\{a, b, c\}$, khi đó do $a, b, c \ge 0$ ta suy ra: $ab + bc + ca \ge ab$;

$$\frac{1}{(b-c)^2} \ge \frac{1}{b^2};$$

$$\frac{1}{(a-c)^2} \ge \frac{1}{a^2}$$

Vậy ta chỉ cần chứng minh : $ab\left(\frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{a^2}\right) \ge 4$.

$$\Leftrightarrow \frac{ab}{(a-b)^2} + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 4 \ge 0 \Leftrightarrow \frac{ab}{(a-b)^2} + \frac{(a-b)^2}{ab} - 2 \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{\frac{ab}{(a-b)^2}} - \sqrt{\frac{(a-b)^2}{ab}}\right)^2 \ge 0$$

Bài toán được chứng minh. Xem thêm chương 3.

Bài 11. Cho các số thực thoả mãn điều kiện $a, b, c > 0$ và $\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{2}{b}$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{a+b}{2a-b} + \frac{c+b}{2c-b}$.

Lời giải

Ta có $b=\dfrac{2ac}{a+c}$ thay vào biểu thức của P ta được :

$$P=\frac{a+\frac{2ac}{a+c}}{2a-\frac{2ac}{a+c}}+\frac{c+\frac{2ac}{a+c}}{2c-\frac{2ac}{a+c}}=\frac{a+3c}{2a}+\frac{c+3a}{2c}=1+\frac{3}{2}\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)\geq 4.$$

(đúng theo AM-GM).

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 4 đạt tại $a=b=c$.

Bài 12. Cho các số thực $a,b,c\in[1;3]$ thỏa mãn điều kiện $a+b+c=6$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=a^2+b^2+c^2$.

Lời giải

Đặt $a=x+1;b=y+1;c=z+1;x,y,z\in[0;2]$.

Khi đó $P=a^2+b^2+c^2=(x+1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2$

$=x^2+y^2+z^2+2(x+y+z)+3$

$=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)+2(x+y+z)+3$

$=-2(xy+yz+zx)+18$

Từ $x,y,z\in[0;2]\Rightarrow(2-x)(2-y)(2-z)\geq 0$

$\Leftrightarrow 8-4(x+y+z)+2(xy+yz+zx)-xyz\geq 0$

$\Rightarrow -2(xy+yz+zx)=-4-xyz\leq -4$ do $xyz\geq 0$

Từ đó suy ra $P\leq -2(xy+yz+zx)+18\leq 14$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $(a,b,c)=(1,2,3)$ hoặc các hoán vị

<u>**Chú ý.**</u> Đặt $a=x+1;b=y+1;c=z+1$ để chúng ta tận dụng tích $xyz\geq 0$

Bài 13. Cho các số thực $a,b,c\in[0;1]$.

Chứng minh rằng $\dfrac{1}{2-a}+\dfrac{1}{2-b}+\dfrac{1}{2-c}\geq 3abc$.

Lời giải

Ta có : $(a-1)^2\geq 0\Rightarrow a(2-a)\leq 1\Rightarrow\dfrac{1}{2-a}\geq a$.

Tương tự ta có : $\dfrac{1}{2-b}\geq b;\dfrac{1}{2-c}\geq c$.

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được:

$$\frac{1}{2-a}+\frac{1}{2-b}+\frac{1}{2-c}\ge a+b+c\ge 3\sqrt[3]{abc}\ge 3abc \text{ do } abc\le 1.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài 14. Cho các số thực $a,b,c\in[0;1]$ và $a+b+c\ne 0$.

Chứng minh rằng $\frac{1}{ab+1}+\frac{1}{bc+1}+\frac{1}{ca+1}\le\frac{5}{a+b+c}$.

Lời giải

Do bất đẳng thức đối xứng với ba biến nên không mất tính tổng quát ta giả sử $1\ge a\ge b\ge c\ge 0$.

Khi đó $\frac{c}{ab+1}+\frac{a}{bc+1}+\frac{b}{ca+1}\le\frac{a+b+c}{bc+1}\le\frac{1+b+c+(1-b)(1-c)+bc}{bc+1}=2$

Mặt khác $\frac{a+b}{ab+1}+\frac{b+c}{bc+1}+\frac{c+a}{ca+1}=\left(\frac{a+b}{ab+1}-1\right)+\left(\frac{b+c}{bc+1}-1\right)+\left(\frac{c+a}{ca+1}-1\right)+3$

$$=-\frac{(1-a)(1-b)}{ab+1}-\frac{(1-b)(1-c)}{bc+1}-\frac{(1-c)(1-a)}{ca+1}+3\le 3$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta suy ra điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=1,c=0$ hoặc các hoán vị.

Bài t . p tương tự

Cho a,b,c là các số thực thuộc đoạn [0;1] và $a+b+c>0$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{5}{a+b+c}+\frac{ab}{1+ab}+\frac{bc}{1+bc}+\frac{ca}{1+ca}$.

Bài 15. Cho các số thực không âm a,b,c. Chứng minh rằng

$$a^2+b^2+c^2\ge 4(a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a).$$

Lời giải

Không mất tính tổng quát ta giả sử b nằm giữa a và c, ta xét hai trường hợp

- Nếu $a\ge b\ge c\Rightarrow VT\ge 0\ge VP$, ta có đpcm.
- Nếu $c\ge b\ge a$, khi đó vế phải

$VP=4(a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a) =4(a+b+c)(b-a)(c-b)(c-a)$

$\le\left[(a+b+c)(b-a)+(c-b)(c-a)\right]^2$

Ta chỉ cần chứng minh $(a+b+c)(b-a)+(c-b)(c-a)\le a^2+b^2+c^2$.

Thật vậy bất đẳng thức này tương đương với : $-a(2a+2c-b)\le 0$, đúng và ta có đpcm.

C. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1. Chứng minh rằng với mọi số thực không âm a và b ta có

$$(a+b)\left(a^2+b^2\right)\ge 8ab(a+b)-12ab\sqrt{ab}.$$

Bài 2. Cho a,b,c là độ dài ba cạnh một tam giác thoả mãn $a\le b\le c$. Chứng minh $(a+b+c)^2\le 9bc$.

Bài 3. Cho $a\in(0;\pi), x\in\mathbb{R}; y=\dfrac{x^2\cos a-2x+\cos a}{x^2-2x\cos a+1}$. Chứng minh rằng $-1\le y\le 1$.

Bài 4. Cho x,y,z là các số thực dương thoả mãn điều kiện $x\ge y\ge z$.

Chứng minh rằng $\dfrac{x^2y}{z}+\dfrac{y^2z}{x}+\dfrac{z^2x}{y}\ge x^2+y^2+z^2$.

Bài 5. Cho a, b, c, d, e là các số thực. Chứng minh các bất đẳng thức

$a^2+b^2+c^2+d^2+e^2\ge a(b+c+d+e)$;

$a^2+b^2+c^2+d^2+1\ge a(b+c+d+1)$

Bài 6. Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3}{c^2+ca+a^2}\ge\frac{a+b+c}{3}.$$

Bài 7. Cho x,y là hai số thực không âm không đồng thời bằng 0. Chứng minh

$$\frac{3x^2+2xy+3y^2}{2(x+y)}\ge\sqrt{2x^2+2y^2}.$$

Bài 8. Cho x,y là 2 số thực dương. Chứng minh $1\le\dfrac{(x+y)\left(x^3+y^3\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}\le\dfrac{9}{8}$.

Bài 9. Chứng minh với mọi số thực a và b ta có $\dfrac{|a+b|}{1+|a+b|}\le\dfrac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|}$.

Dấu bằng xảy ra khi nào?

Bài 10. Cho a,b là các số thực và a khác 0. Chứng minh $a^2+b^2+\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{b}{a}\ge\sqrt{3}$.

Bài 11. Chứng minh rằng với mọi số thực dương a,b,c ta có

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\ge a+b+c.$$

Bài 12. Chứng minh rằng với mọi số thực a,b,c ta có

$$a^4+b^4+c^4\ge abc(a+b+c).$$

Bài 13. Cho a,b,c là độ dài ba cạnh một tam giác. Chứng minh

$$\left|\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}-\frac{b}{a}-\frac{c}{b}-\frac{a}{c}\right|<1.$$

Bài 14. Cho a,b,c là độ dài ba cạnh một tam giác thoả mãn điều kiện $a<b<c$.

Chứng minh rằng $a^3\left(b^2-c^2\right)+b^3\left(c^2-a^2\right)+c^3\left(a^2-b^2\right)<0$.

Bài 15. Cho a,b,c là độ dài ba cạnh một tam giác. Chứng minh

$a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a+b)^2>a^3+b^3+c^3$.

Bài 16. Cho a,b,c là độ dài ba cạnh một tam giác. Chứng minh

$2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4>0$.

Bài 17. Cho x,y,z là các số thực dương có tích bằng 1 và $z=\min\{x,y,z\}$.

Chứng minh rằng $\dfrac{x+2}{2x+1}.\dfrac{y+2}{2y+1}\left(\dfrac{z+2}{2z+1}\right)^2\ge 1$.

Bài 18. Cho a,b,c là các số thực không âm thoả mãn điều kiện $ab+bc+ca=1$.

Chứng minh rằng $\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{c+a}\ge\dfrac{5}{2}$.

Bài 19. Chứng minh với mọi a,b,c là các số thực ta có

$$a(a+b)^3+b(b+c)^3+c(c+a)^3\ge 0.$$

Bài 20. Cho a,b,c là độ dài 3 cạnh một tam giác. Chứng minh

a) $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}<2$;

b) $a^2+b^2+c^2<2(ab+bc+ca)$;

c) $\dfrac{a}{\sqrt[3]{b^3+c^3}}+\dfrac{b}{\sqrt[3]{a^3+c^3}}+\dfrac{c}{\sqrt[3]{b^3+a^3}}<2\sqrt[3]{4}$.

Bài 21. Cho a,b là các số thực dương. Chứng minh $\sqrt[3]{\dfrac{a^3+b^3}{2}}\le\dfrac{a^2+b^2}{a+b}$.

Bài 22. Chứng minh rằng với mọi số thực x, y thoả mãn điều kiện $x+y\ge -1,|xy|\le 2$.

Ta có $x^3+y^3\ge -7$.

Bài 23. Cho a, b, c, d là các số thực.

Chứng minh rằng $\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)\ge(ac+bd)^2$.

Bài 24. Cho a,b là 2 số thực không âm. Chứng minh rằng ta luôn có

$$\left(a^2+b+\frac{3}{4}\right)\left(b^2+a+\frac{3}{4}\right)\ge\left(2a+\frac{1}{2}\right)\left(2b+\frac{1}{2}\right).$$

Bài 25. Cho $x, y, z \in [0;2]$ thỏa mãn $x+y+z=3$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = x^2 + y^2 + z^2$.

Bài 26. Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh

a) $\sqrt{1+\left(\frac{b+c}{a}\right)^3} \le 1+\frac{1}{2}\left(\frac{b+c}{a}\right)^2$.

b) $\sqrt{\frac{a^3}{a^3+(b+c)^3}} + \sqrt{\frac{b^3}{b^3+(c+a)^3}} + \sqrt{\frac{c^3}{c^3+(a+b)^3}} \ge 1$.

c) $\sqrt{\frac{a}{b+c}} \ge \frac{2a}{a+b+c}$.

d) $\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} \ge 2$.

e) $\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} \ge \frac{a^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}}$.

f) $\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \ge 1$.

Bài 27. Cho a,b,c là các số thực đôi một phân biệt. Chứng minh

$$\frac{a^2}{(b-c)^2} + \frac{b^2}{(c-a)^2} + \frac{c^2}{(a-b)^2} \ge 2.$$

Bài 28. Chứng minh rằng với ba số thực a,b,c ta luôn có

$$(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1) \ge (ab+bc+ca-1)^2.$$

Bài 29. Cho *x,y,z* là các số thực dương thỏa mãn $x = max\{x,y,z\}$.

Chứng minh $\frac{x+1}{y+1} + \frac{y+1}{z+1} + \frac{z+1}{x+1} \le \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$.

Bài 30. Cho *x,y* là hai số thực dương thoả mãn điều kiện $x+2y=1$.

Chứng minh $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \ge \frac{25}{1+48xy^2}$.

Bài 31. Cho a,b là hai số thực khác 0 thoả mãn điều kiện $ab \ge \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + 3$.

Chứng minh rằng $ab \ge \left(\frac{1}{\sqrt[3]{a}} + \frac{1}{\sqrt[3]{b}}\right)^3$.

Bài 32. Cho a,b,c,d là các số thực thuộc đoạn $[0;2]$. Chứng minh

$$a+b+c+d \le \sqrt{1+ab}+\sqrt{1+bc}+\sqrt{1+ca}+\sqrt{1+ad}.$$

Bài 33. Cho a, b, c là các số thực thuộc đoạn $[0;2]$ và $a+b+c=3$.

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}$.

Bài 34. Cho a, b, c, d là các số thực thỏa mãn điều kiện $a^2+b^2+c^2+d^2=1$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=a^3(b+c+d)+b^3(c+d+a)+c^3(d+a+b)+d^3(a+b+c).$$

Bài 35. Cho a, b, c là các số thực thuộc đoạn $[1;3]$ thỏa mãn điều kiện $a^2+b^2+c^2=14$.

Chứng minh $\left(1-\dfrac{b}{a}\right)\left(2+\dfrac{c}{a}\right)\ge -8$.

Bài 36. Cho a,b,c là các số thực không âm. Chứng minh rằng

$$a^2+b^2+c^2+ab^2+bc^2+ca^2+9\ge 5(a+b+c).$$

Bài 37. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$9\left(a^3+b^3+c^3+abc\right)\ge 8(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2\right).$$

Bài 38. Cho $a,b>0$ thỏa mãn điều kiện $a^2+b^2=1$.

Chứng minh rằng $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\ge 2\sqrt{2}+\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}}-\sqrt{\dfrac{b}{a}}\right)^2$.

Bài 39. Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn điều kiện $a^2+b^2+c^2=\dfrac{5}{3}$.

Chứng minh rằng $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{c}<\dfrac{1}{abc}$.

Bài 40. Cho a, b là hai số thực thỏa mãn $|a|,|b|<1$, ta luôn có

$$\frac{1}{1-a^2}+\frac{1}{1-b^2}\ge\frac{2}{1-ab}.$$

Bài 41. Với mọi số thực $a,b\ge 1$ ta luôn có $\dfrac{1}{a+1}+\dfrac{1}{b+1}+\dfrac{ab}{ab+1}\le\dfrac{3}{2}$.

Bài 42. Cho $a,b,c\in[0;1]$. Chứng minh rằng $a(1-b)+b(1-c)+c(1-a)\le 1$.

Bài 43. Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $a\le b\le c$.

Chứng minh rằng $(a-b+c)\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)\ge 1$.

Bài 44. Cho các số thực a,b,c thỏa mãn điều kiện $a+b+c=1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\sqrt{a^2+ab+b^2}+\sqrt{b^2+bc+c^2}+\sqrt{c^2+ca+a^2}.$$

Bài 45. Cho a,b,c,d thuộc đoạn $[1;2]$. Chứng minh rằng $\frac{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}{(ac+bd)^2}\le\frac{25}{12}$.

Bài 46. Cho x,y,z là các số thực. Chứng minh

$$x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\ge max\left\{\frac{3(x-y)^2}{4},\frac{3(y-z)^2}{4},\frac{3(z-x)^2}{4}\right\}.$$

Bài 47. Cho x,y,z là các số thực không âm. Chứng minh

$$x^3+y^3+z^3-3xyz\ge\frac{3}{4}(x+y+z).max\left\{(x-y)^2,(y-z)^2+(z-x)^2\right\}.$$

Bài 48. Cho a,b,c là các số thực không âm. Chứng minh

$$\frac{a+b+c}{3}-\sqrt[3]{abc}\le\max\left\{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2;\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)^2;\left(\sqrt{c}-\sqrt{a}\right)^2\right\}$$

D. HƯỚNG DẪN GIẢI – ĐÁP SỐ

Bài 1. Bất đẳng thức tương đương với: $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2\left[(a+b)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2-6ab\right]\ge 0$.

Chú ý $(a+b)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2-6ab=(a-b)^2+2\sqrt{ab}\left(a+b-\sqrt{ab}\right)\ge 0.$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b$.

Bài 2. Ta có $a\le b\Rightarrow(a+b+c)^2\le(2b+c)^2$.

Vậy ta chứng minh $(2b+c)^2\le 9bc\Leftrightarrow 4b^2-5bc+c^2\le 0\Leftrightarrow(b-c)(4b-c)\le 0$.

Bất đẳng thức cuối luôn đúng do $b-c\le 0;\ 4b-c\ge 3b+a-c=(a+b-c)+2b>0$.

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$

Bài tập tương tự

Cho a,b,c là độ dài ba cạnh một tam giác ta có $4a^2b^2>\left(a^2+b^2-c^2\right)^2$

Bài 3. Ta có $1-y^2=\frac{(x-1)^2\sin^2 a}{\left(x^2-2x\cos a+1\right)^2}\ge 0\Rightarrow -1\le y\le 1$.

Bài 4. Bất đẳng thức tương đương với $\frac{x^2(y-z)}{z}+\frac{y^2(z-x)}{x}+\frac{z^2(x-y)}{y}\ge 0$.

Theo giả thiết ta có $\begin{cases} y \geq z \Rightarrow \dfrac{x^2(y-z)}{z} \geq \dfrac{x^2(y-z)}{y} \\ x \geq y \geq z \Rightarrow \dfrac{y^2(z-x)}{x} \geq \dfrac{y^2(z-x)}{y} \end{cases}$.

Suy ra

$$\frac{x^2(y-z)}{z}+\frac{y^2(z-x)}{x}+\frac{z^2(x-y)}{y} \geq \frac{x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)}{y}$$

$$=\frac{(x-y)(x-z)(y-z)}{y} \geq 0$$

Ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z$.

Bài 5. Bất đẳng thức tương đương với

$$4a^2+4b^2+4c^2+4d^2+4e^2 \geq 4a(b+c+d+e)$$

$$\Leftrightarrow \left(a^2-4ab+4b^2\right)+\left(a^2-4ac+4c^2\right)+\left(a^2-4ad+4d^2\right)+\left(a^2-4ae+4e^2\right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a-2b)^2+(a-2c)^2+(a-2d)^2+(a-2e)^2 \geq 0.$$

Bất đẳng thức luôn đúng. Dẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=2b=2c=2d=2e$.

Bất đẳng thứ hai là trường hợp riêng khi $e=1$

Bài 6. Ta chứng minh $\dfrac{x^3}{x^2+xy+y^2} \geq \dfrac{2x-y}{3}$ với mọi số thực dương x và y.

Thật vậy bất đẳng thức tương đương với: $(x+y)(x-y)^2 \geq 0$ (luôn đúng).

Áp dụng bất đẳng thức trên ta có

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2} \geq \frac{2a-b}{3};$$

$$\frac{b^3}{b^2+bc+c^2} \geq \frac{2b-c}{3};$$

$$\frac{c^3}{c^2+ca+a^2} \geq \frac{2c-a}{3}.$$

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bài tập tương tự

Cho n là số nguyên dương lớn hơn hoặc bằng 2 và các số thực $x_1, x_2, ..., x_n$ có tích bằng 1. Chứng minh

$$\sum_{1\le i<j\le n}^{n}\frac{x_i^9+x_j^9}{x_i^6+x_i^3x_j^3+x_j^6}\ge\frac{n(n-1)}{3}.$$

Bài 7. Bất đẳng thức đã cho tương đương với :

$$\left(\frac{3x^2+2xy+3y^2}{2(x+y)}\right)^2\ge 2x^2+2y^2$$

$$\Leftrightarrow\left(3x^2+2xy+3y^2\right)^2-8\left(x^2+y^2\right)(x+y)^2\ge 0\Leftrightarrow(x-y)^4\ge 0$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y$.

Bài 8. Bất đẳng thức vế trái tương đương với: $\dfrac{xy(x-y)^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\ge 0$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=y$.

Bất đẳng thức vế phải tương đương với: $\dfrac{\left(x^2-4xy+y^2\right)^2}{8\left(x^2+y^2\right)^2}\ge 0$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=\left(2\pm\sqrt{3}\right)y$.

Bài 9. Biến đổi tương đương bất đẳng thức đã cho về dạng luôn đúng $|a|+|b|\ge|a+b|$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $ab\ge 0$.

Chú ý. Thực chất bất đẳng thức xuất phát từ tính đồng biến trên khoảng $(-1;+\infty)$ của hàm số $y=\dfrac{x}{x+1}$.

Bài tập tương tự

Chứng minh với mọi số thực a và b ta có $\dfrac{2014+|a+b|}{|a+b|+2015}\le\dfrac{2014+|a|+|b|}{|a|+|b|+2015}$.

Bài 10. Bất đẳng thức tương đương với $\left(b+\dfrac{1}{2a}\right)^2+a^2+\dfrac{3}{4a^2}-\sqrt{3}\ge 0$

$$\Leftrightarrow\left(b+\frac{1}{2a}\right)^2+\frac{\left(2a^2-\sqrt{3}\right)^2}{4a^2}\ge 0$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$b=-\frac{1}{2a},a=\pm\sqrt[4]{\frac{3}{4}}.$$

Bài 11. Bất đẳng thức chính là phần rút gọn của bất đẳng thức sau

$$\frac{(a-b)^2}{b}+\frac{(b-c)^2}{c}+\frac{(c-a)^2}{a}\ge 0\,.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bài 12. Bất đẳng thức đã cho chính là phần rút gọn của bất đẳng thức sau

$$\left(a^2-b^2\right)^2+\left(b^2-c^2\right)^2+\left(c^2-a^2\right)^2+\left(a^2-bc\right)^2+\left(b^2-ca\right)^2+\left(c^2-ab\right)^2\ge 0\,.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bài 13. Chú ý đẳng thức

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}-\frac{b}{a}-\frac{c}{b}-\frac{a}{c}=\frac{a^2-b^2}{ab}+\frac{b^2-c^2}{bc}+\frac{c^2-a^2}{ca}$$

$$=\frac{c\left(a^2-b^2\right)+a\left(b^2-c^2\right)+c\left(a^2-b^2\right)}{abc}.$$

$$=\frac{(a-c)(a-b)(c-b)}{abc}$$

Ta có $\left|\dfrac{(a-c)(a-b)(c-b)}{abc}\right|<\dfrac{abc}{abc}=1$.

Bất đẳng thức được chứng minh.

Bài 14. Chú ý nếu coi vế trái là một đa thức bậc ba của a thì ta có 2 hai nghiệm $a=b,\ a=c.$ Vì vậy ta phân tích được vế trái dưới dạng

$$(a-b)(a-c)(b-c)(ab+bc+ca)\,.$$

Rõ ràng với $a<b<c\Rightarrow(a-b)(a-c)(b-c)(ab+bc+ca)<0$.

Bất đẳng thức được chứng minh.

Bài 15. Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$a\left[(b-c)^2-a^2\right]+b\left[(c-a)^2-b^2\right]+c\left[(a+b)^2-c^2\right]>0$$

$$\Leftrightarrow(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)>0$$

Bất đẳng thức cuối luôn đúng và ta có đpcm.

Bài 16. Gọi P là biểu thức vế trái ta có đẳng thức sau

$$P=(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)>0\,.$$

Bất đẳng thức được chứng minh.

Bài 17. Quy đồng rút gọn bất đẳng thức tương đương với :

$$1+2x+2y\ge 2xz^2+2z^2+z$$

$$\Leftrightarrow 1-z+2(1-z)^2(x+y)\ge 0$$

Bất đẳng thức cuối đúng do vậy ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1$.

Bài 18. Sử dụng bất đẳng thức $a+b+c+\frac{5abc}{3} \geq 2$ và quy đồng rút gọn bất đẳng thức cần chứng minh

$$2(a+b)(a+c)+2(b+c)(b+a)+2(c+a)(c+b) \geq 5(a+b)(b+c)(c+a)$$

$$\Leftrightarrow 2(a+b+c)^2+5abc+2 \geq 5(a+b+c)$$

Sử dụng $5abc \geq 6-3(a+b+c)$ ta được

$$2(a+b+c)^2+5abc+2-5(a+b+c) \geq 2(a+b+c)^2+8-8(a+b+c)$$
$$= 2(a+b+c-2)^2 \geq 0$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = 1, c = 0$ hoặc các hoán vị.

Bài 19. Đặt $x = a+b, y = b+c, z = c+a \Rightarrow \begin{cases} 2a = x+y-z \\ 2b = y+z-x \\ 2c = z+x-y \end{cases}$.

Bất đẳng thức trở thành

$$\begin{aligned} &x^3(x+y-z)+y^3(y+z-x)+z^3(z+x-y) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow x^4+y^4+z^4+x^3y+y^3z+z^3x-xy^3-yz^3-zx^3 \geq 0 \end{aligned}.$$

Bài 20. a) Ta có

$$\begin{aligned} \frac{a}{b+c} &= \frac{2a}{b+c+b+c} < \frac{2a}{a+b+c} \\ \frac{b}{c+a} &= \frac{2b}{c+a+c+a} < \frac{2b}{a+b+c} \\ \frac{c}{a+b} &= \frac{2c}{a+b+a+b} < \frac{2c}{a+b+c} \end{aligned}.$$

Cộng theo vế 3 bất đẳng thức trên ta có điều phải chứng minh.

b) Ta có

$$\begin{aligned} &0 < a < b+c \Rightarrow a^2 < a(b+c) \\ &0 < b < c+a \Rightarrow b^2 < b(c+a) \\ &0 < c < a+b \Rightarrow c^2 < c(a+b) \end{aligned}.$$

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên ta có điều phải chứng minh.

c) Ta có

$$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)\ge(a+b)^3-\frac{3}{4}(a+b)^2.(a+b)=\frac{1}{4}(a+b)^3.$$

$$\Rightarrow \frac{c}{\sqrt[3]{a^3+b^3}}\le\sqrt[3]{4}.\frac{c}{a+b}$$

Tương tự rồi cộng theo vế 3 bất đẳng thức trên ta có điều phải chứng minh.

Bài 21. Bất đẳng thức đã cho tương đương với:

$$\frac{a^3+b^3}{2}\le\left(\frac{a^2+b^2}{a+b}\right)^2\Leftrightarrow(a-b)^4\left(a^2+ab+b^2\right)\ge0.$$

Bài 22. Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$x^3+y^3+1-3xy+3(xy+2)\ge0$$

$$\Leftrightarrow(x+y+1)\left(x^2+y^2+1-x-y-xy\right)+3(xy+2)\ge0 .$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{2}(x+y+1)\left((x-y)^2+(x-1)^2+(y-1)^2\right)+3(xy+2)\ge0$$

Bất đẳng thức cuối luôn đúng theo giả thiết ta có đpcm.

Bài 23. Ta có $\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2\ge(ac+bd)^2$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $ad=bc$.

Bài 24. Ta có : $\left(a-\frac{1}{2}\right)^2\ge0;\left(b-\frac{1}{2}\right)^2\ge0\Rightarrow a^2+\frac{1}{4}\ge a;b^2+\frac{1}{4}\ge b$.

Suy ra :

$$\left(a^2+b+\frac{3}{4}\right)\left(b^2+a+\frac{3}{4}\right)\ge\left(a+b+\frac{1}{2}\right)\left(a+b+\frac{1}{2}\right)=\left(a+b+\frac{1}{2}\right)^2$$
$$=\left[\left(a+\frac{1}{4}\right)+\left(b+\frac{1}{4}\right)\right]^2\ge4\left(a+\frac{1}{4}\right)\left(b+\frac{1}{4}\right)=\left(2a+\frac{1}{2}\right)\left(2b+\frac{1}{2}\right).$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=\frac{1}{2}$.

Bài 25. Theo giả thiết ta có :

$$x(x-2)+y(y-2)+z(z-2)\le0\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2\le2(x+y+z)=6.$$

Bài 26. a) Đặt $x=\frac{b+c}{a}>0.$ Ta cần chứng minh

$$\sqrt{1+x^3}\le1+\frac{1}{2}x^2\Leftrightarrow\left(x^2+2\right)^2\ge4\left(x^3+1\right)$$

$$\Leftrightarrow x^4-4x^3+4x^2\ge0\Leftrightarrow x^2(x-2)^2\ge0$$

Bất đẳng thức cuối đúng suy ra đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $b+c=2a$.

b)Áp dụng câu a) ta có

$$\sqrt{\frac{a^3}{a^3+(b+c)^3}}\ge\frac{a^2}{a^2+b^2+c^2};$$

$$\sqrt{\frac{b^3}{b^3+(c+a)^3}}\ge\frac{b^2}{a^2+b^2+c^2};$$

$$\sqrt{\frac{c^3}{c^3+(a+b)^3}}\ge\frac{c^2}{a^2+b^2+c^2}.$$

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

a) Bất đẳng thức tương đương với:

$$a(a+b+c)^2\ge 4a^2(b+c)$$

$$\Leftrightarrow a\left[(a+b+c)^2-4a(b+c)\right]\ge 0\Leftrightarrow a(a-b-c)^2\ge 0.$$

Bất đẳng thức luôn đúng. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=0$ hoặc $a=b+c$.

b) Áp dụng câu c) ta có

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}}\ge\frac{2a}{a+b+c};\sqrt{\frac{b}{c+a}}\ge\frac{2b}{a+b+c};\sqrt{\frac{c}{a+b}}\ge\frac{2c}{a+b+c}.$$

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên ta có đpcm. Với a,b,c thì đẳng thức không xảy ra.

c) Bất đẳng thức tương đương với:

$$\left(a^{4/3}+b^{4/3}+c^{4/3}\right)^2-a^{8/3}=\left(b^{4/3}+c^{4/3}\right)\left(2a^{4/3}+b^{4/3}+c^{4/3}\right)$$

$$\ge 2(bc)^{2/3}.4a^{2/3}(bc)^{1/3}$$

$$\Rightarrow\left(a^{4/3}+b^{4/3}+c^{4/3}\right)^2\ge a^{8/3}+8bc.a^{2/3}=a^{2/3}\left(a^2+8bc\right)$$

$$\Rightarrow\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}\ge\frac{a^{4/3}}{a^{4/3}+b^{4/3}+c^{4/3}}$$

Bất đẳng thức cuối đúng theo AM – GM.

d) Áp dụng chứng minh ở câu e) xây dựng ba bất đẳng thức cùng dạng rồi cộng lại ta có điều phải chứng minh.

Bài 27. Chú ý hằng đẳng thức

$$\frac{bc}{(a-b)(a-c)}+\frac{ca}{(b-c)(b-a)}+\frac{ab}{(c-a)(c-b)}=1.$$

Khi đó $\frac{a^2}{(b-c)^2}+\frac{b^2}{(c-a)^2}+\frac{c^2}{(a-b)^2}=\left(\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}\right)^2+2\geq 2$.

Bài 28. Chú ý đẳng thức :

$$\left(a^2+1\right)\left(b^2+1\right)\left(c^2+1\right)=\left(a+b+c-ab-bc-ca\right)^2+\left(ab+bc+ca-1\right)^2.$$

Bài 29. Bất đẳng thức tương đương với:

$(x-z)(x-y)\frac{x+y+1}{xy(x+1)(y+1)}+(y-z)^2\frac{y+z+1}{yz(y+1)(z+1)}\geq 0$ (luôn đúng) do $x-z\geq 0, x-y\geq 0$.

Bất đẳng thức được chứng minh đẳng thức đạt tại $x=y=z$.

Nhận xét. Nếu để tinh ý ta có thể khảo sát hàm $f(t)=\frac{t+a}{t+b}+\frac{t+b}{t+c}+\frac{t+c}{t+a}$. Lúc này vế trái bất đẳng thức thay số 1 bởi một số dương bất kỳ bất đẳng thức vẫn đúng.

Bài 30. Thay $x=1-2y$ vào bất đẳng thức cần chứng minh đưa về chứng minh.

$\frac{1}{1-2y}+\frac{1}{y}\geq\frac{25}{1+48(1-2y)y^2}\Leftrightarrow\left(12y^2-7y+1\right)^2\geq 0$ (luôn đúng).

Bài toán được chứng minh. Đẳng thức xảy ra tại $x=\frac{1}{2}, y=\frac{1}{4}$ hoặc $x=y=\frac{1}{3}$.

Bài 31. Đặt $x=\sqrt[3]{ab}, y=-\frac{1}{\sqrt[3]{a}}, z=-\frac{1}{\sqrt[3]{b}}\Rightarrow xyz=1$.

Theo giả thiết ta có $x^3+y^3+z^3\geq 3=3xyz$

$\Leftrightarrow(x+y+z)\left(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\right)\geq 0$.

Do $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx=\frac{1}{2}(x-y)^2+\frac{1}{2}(y-z)^2+\frac{1}{2}(z-x)^2\geq 0$.

Do đó $x+y+z\geq 0\Leftrightarrow x\geq -y-z\Leftrightarrow ab\geq\left(\frac{1}{\sqrt[3]{a}}+\frac{1}{\sqrt[3]{b}}\right)^3$.

Bất đẳng thức được chứng minh.

Bài 32. Xuất phát từ $|a-b|\leq 2,\forall a,b\in[0;2]$ ta được:

$(a-b)^2\leq 4\Leftrightarrow a^2+b^2\leq 4+2ab$.

$\Rightarrow(a+b)^2\leq 4+2ab+2ab=4(1+ab)\Rightarrow a+b\leq 2\sqrt{1+ab}$.

Tương tự ta có: $b+c\leq 2\sqrt{1+bc}$; $c+d\leq 2\sqrt{1+cd}$; $d+a\leq 2\sqrt{1+da}$.

Cộng theo vế 4 bất đẳng thức trên ta có ngay điều phải chứng minh.

Bài 33. Ta có: $P=\dfrac{(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)}{ab+bc+ca}=\dfrac{9}{ab+bc+ca}-2$.

Sử dụng bất đẳng thức cơ bản ta có: $ab+bc+ca\le\dfrac{1}{3}(a+b+c)^2=3$ suy ra $P\ge\dfrac{9}{3}-2=1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 1 đạt tại $a=b=c=1$.

Để tìm giá trị lớn nhất của P ta tìm giá trị nhỏ nhất của $ab+bc+ca$.

Vì $a,b,c\in[0;2]$ nên

$(a-2)(b-2)(c-2)\le 0\Leftrightarrow abc-2(ab+bc+ca)+4(a+b+c)-8\le 0$.

$\Leftrightarrow ab+bc+ca\ge\dfrac{abc+4(a+b+c)-8}{2}=\dfrac{4+abc}{2}\ge 2\Rightarrow P\le\dfrac{9}{2}-2=\dfrac{5}{2}$.

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng $\dfrac{5}{2}$ đạt tại $a=2,\ b=1,\ c=0$ và các hoán vị.

Bài 34. Viết lại biểu thức P dưới dạng:

$$P=ab\left(a^2+b^2\right)+bc\left(b^2+c^2\right)+cd\left(c^2+d^2\right)+da\left(d^2+a^2\right)+ac\left(a^2+c^2\right)+bd\left(b^2+d^2\right).$$

Để ý:

$$(x-y)^4=x^4+y^4+6x^2y^2-4xy\left(x^2+y^2\right)\Rightarrow xy\left(x^2+y^2\right)=\frac{x^4+y^4+6x^2y^2-(x-y)^4}{4}.$$

Áp dụng vào bài toán suy ra

$$P=\frac{3\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)^2}{4}-\frac{(a-b)^4+(b-c)^4+(c-d)^4+(d-a)^4+(a-c)^4+(b-d)^4}{4}.$$

$$\le\frac{3\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)^2}{4}=\frac{3}{4}$$

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng $\dfrac{3}{4}$ đạt tại $a=b=c=d=\dfrac{1}{2}$.

Tổng quát. Cho n số thực không âm $x_1,x_2,...,x_n$ thỏa mãn mãn $x_1+x_2+...+x_n=1$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\sum\limits_{1\le i\ne j\le n}^{n}x_i^2\left(\sum\limits_{j=1}^{n}x_j^2\right)$.

Bài 35. Đặt vế trái bất đẳng thức là P. Khi đó

$$P=\frac{ac-2ab-bc}{a^2}+2=\frac{\left(a^2+b^2+c^2+2ac-2ab-2bc\right)-2ab-14}{2a^2}+2$$

$$=\frac{(a-b+c)^2}{2a^2}-\frac{b}{a}-\frac{7}{a^2}+2\ge -\frac{b}{a}-\frac{7}{a^2}+2$$

Mặt khác $a,b,c\in[1;3]$ nên $-\frac{b}{a}\ge -3,-\frac{7}{a^2}\ge -7\Rightarrow P\ge -3-7+2=-8$.

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi a = 1, b = 3, c = 2.

Bài 36. Nhận xét. Dự đoán dấu bằng của bất đẳng thức đạt tại $a=b=c=1$ nên ta đặt ẩn phụ $a=x+1, b=y+1, c=z+1, (x,y,z\ge -1)$ đưa về chứng minh bất đẳng thức:

$$(x+1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2+(x+1)(y+1)^2+(y+1)(z+1)^2+(z+1)(x+1)^2+9 \ge 5(x+y+z+3).$$

Khai triển và rút gọn ta được:

$$2\left(x^2+y^2+z^2\right)+2(xy+yz+zx)+xy^2+yz^2+zx^2\ge 0.$$

$\Leftrightarrow (x+y+z)^2+x^2(z+1)+y^2(x+1)+z^2(y+1)\ge 0$ (luôn đúng).

Bài toán được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=0\Leftrightarrow a=b=c=1$.

Bài 37. Bất đẳng thức đã cho tương đương với:

$$5\left(a^3+b^3+c^3\right)+9abc\ge 4\left[ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)\right].$$

Theo bất đẳng thức AM-GM ta có: $a^3+b^3+c^3\ge 3abc$.

Suy ra $5\left(a^3+b^3+c^3\right)+9abc\ge 4\left(a^3+b^3+c^3+3abc\right)$.

Ta đi chứng minh: $a^3+b^3+c^3+3abc\ge ab(a+b)+bc(c+a)+ca(a+b)$.

$\Leftrightarrow a(a-b)(a-c)+b(b-c)(b-a)+c(c-a)(c-b)\ge 0$.

Không mất tính tổng quát ta giả sử $a\ge b\ge c$ khi đó: $c(c-a)(c-b)\ge 0$ và

$$a(a-b)(a-c)+b(b-c)(b-a)=(a-b)\left[a(a-c)-b(b-c)\right]$$
$$=(a-b)\left[a^2-b^2+c(b-a)\right]=(a-b)^2(a+b-c)\ge 0$$

Suy ra $a(a-b)(a-c)+b(b-c)(b-a)+c(c-a)(c-b)\ge 0$.

Bất đẳng thục được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bài 38. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge 2\sqrt{2}+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-2 \Leftrightarrow a+b+2ab\ge 2\sqrt{2}ab+1$

$\Leftrightarrow a+b+(a+b)^2-1\ge 2\sqrt{2}\left[\frac{(a+b)^2-1}{2}\right]+1$

$\Leftrightarrow \left(1-\sqrt{2}\right)t^2+t+\sqrt{2}-2\ge 0$ (*) ; với $t=a+b\in\left(1;\sqrt{2}\right]$

(Vì $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab>a^2+b^2=1\Rightarrow a+b>1$

Và $(a+b)^2\le 2\left(a^2+b^2\right)=2\Rightarrow a+b\le\sqrt{2}$

Suy ra $t\in\left(1;\sqrt{2}\right]$). Bất đẳng thức (*) luôn đúng với $t\in\left(1;\sqrt{2}\right]$.

Bài 39. Do $a,b,c>0$ nên bất đẳng thức tương đương với : $bc+ca-ab<1$

Ta có : $(a+b-c)^2\ge 0\Rightarrow bc+ca-ab\le\frac{1}{2}\left(a^2+b^2+c^2\right)=\frac{5}{6}<1$ (luôn đúng).

Bài toán được chứng minh.

Bài 40. Ta có: $\frac{1}{1-a^2}+\frac{1}{1-b^2}\ge\frac{2}{\sqrt{\left(1-a^2\right)\left(1-b^2\right)}}$.

Ta chứng minh

$\sqrt{\left(1-a^2\right)\left(1-b^2\right)}\le 1-ab\Leftrightarrow 1-a^2-b^2+a^2b^2\le 1-2ab+a^2b^2\Leftrightarrow (a-b)^2\ge 0$

(luôn đúng).

Bài 41. Quy đồng rút gọn đưa về bất đẳng thức: $(ab-1)(a-1)(b-1)\ge 0$ (luôn đúng do $a,b\ge 1$).

Bài 42. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với :

$a+b+c-(ab+bc+ca)\le 1$

Xuất phát từ giả thiết ta có :

$(1-a)(1-b)(1-c)\ge 0\Leftrightarrow 1-(a+b+c)+(ab+bc+ca)-abc\ge 0$

$\Rightarrow (a+b+c)-(ab+bc+ca)\le 1-abc\le 1$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=0,c=1$ hoặc các hoán vị.

Bài 43. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge\frac{1}{a-b+c}\Leftrightarrow\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\ge\frac{1}{b}+\frac{1}{a-b+c}$

$\Leftrightarrow\frac{a+c}{ac}\ge\frac{a+c}{b(a-b+c)}\Leftrightarrow\frac{1}{ac}\ge\frac{1}{b(a-b+c)}$

$\Leftrightarrow b(a-b+c)\ge ac \Leftrightarrow a(b-c)-b(b-c)\ge 0 \Leftrightarrow (a-b)(b-c)\ge 0$

Bất đẳng thức cuối luôn đúng do $a\le b\le c$. Ta có đpcm.

Bài 44. Ta có $a^2+ab+b^2=\frac{3}{4}(a+b)^2+\frac{1}{4}(a-b)^2\ge \frac{3}{4}(a+b)^2$.

$\Rightarrow \sqrt{a^2+ab+b^2}\ge \frac{\sqrt{3}}{2}|a+b|\ge \frac{\sqrt{3}}{2}(a+b)$.

Tương tự ta có : $\sqrt{b^2+bc+c^2}\ge \frac{\sqrt{3}}{2}|b+c|\ge \frac{\sqrt{3}}{2}(b+c)$;

$$\sqrt{c^2+ac+a^2}\ge \frac{\sqrt{3}}{2}|c+a|\ge \frac{\sqrt{3}}{2}(c+a).$$

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên ta được : $P\ge \sqrt{3}(a+b+c)=\sqrt{3}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Bài 46. Giả sử $\frac{3(x-y)^2}{4}=max\left\{\frac{3(x-y)^2}{4},\frac{3(y-z)^2}{4},\frac{3(z-x)^2}{4}\right\}$.

Ta chứng minh $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\ge \frac{3(x-y)^2}{4}$.

$\Leftrightarrow 4x^2+4y^2+4z^2-4xy-4yz-4zx\ge 3x^2+3y^2-6xy$.

$\Leftrightarrow x^2+y^2+4z^2+2xy-4yz-4zx\ge 0 \Leftrightarrow (x+y-2z)^2\ge 0$ (luôn đúng).

Bài toán được chứng minh.

Bài 47. Ta có: $x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)\left(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\right)$.

Bài toán đưa về chứng minh

$$x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\ge max\left\{\frac{3(x-y)^2}{4},\frac{3(y-z)^2}{4},\frac{3(z-x)^2}{4}\right\}.$$

Đây chính là kết quả bài toán trên và ta có điều phải chứng minh.

CHỦ ĐỀ 2: KỸ THUẬT CHỨNG MINH PHẢN CHỨNG

A. NỘI DUNG PHƯƠNG PHÁP

Giả sử cần chứng minh bất đẳng thức nào đó đúng, ta giả sử bất đẳng thức đó là sai và kết hợp với điều kiện giả thiết chỉ ra điều vô lý. Điều vô lý có thể là trái với giả thiết hoặc trái với một điều đúng. Từ đó suy ra bất đẳng thức cần chứng minh là đúng.

B. BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Chứng minh rằng ít nhất một trong các bất đẳng thức sau là đúng

$$a^2+b^2\ge 2bc;\ b^2+c^2\ge 2ca;\ c^2+a^2\ge 2ab.$$

Lời giải

Giả sử tất cả các bất đẳng thức trên đều sai khi đó $\begin{cases} a^2+b^2<2bc \\ b^2+c^2<2ca \\ c^2+a^2<2ab \end{cases}$.

Cộng theo vế 3 bất đẳng thức trên ta được $2\left(a^2+b^2+c^2\right)<2\left(ab+bc+ca\right)$

$\Leftrightarrow \left(a^2-2ab+b^2\right)+\left(b^2-2bc+c^2\right)+\left(c^2-2ca+a^2\right)<0$

$\Leftrightarrow \left(a-b\right)^2+\left(b-c\right)^2+\left(c-a\right)^2<0$ (mâu thuẫn).

Vì vậy điều phản chứng là sai nên khẳng định đề bài đúng (đpcm).

Bài 2. Cho a,b,c là các số thực thuộc khoảng $\left(0;1\right)$. Chứng minh ít nhất một trong các bất đẳng thức sau là đúng $a\left(1-b\right)\le \frac{1}{4}; b\left(1-c\right)\le \frac{1}{4}; c\left(1-a\right)\le \frac{1}{4}$.

Lời giải

Giả sử tất cả các bất đẳng thức trên đều sai khi đó $\begin{cases} a\left(1-b\right)>\frac{1}{4} \\ b\left(1-c\right)>\frac{1}{4} \\ c\left(1-a\right)>\frac{1}{4} \end{cases}$.

Nhân theo vế ba bất đẳng thức trên ta được $a\left(1-a\right)b\left(1-b\right)c\left(1-c\right)>\frac{1}{64}$ (1).

Chú ý. $0<a\left(1-a\right)\le\left(\frac{a+1-a}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$.

$$0<b\left(1-b\right)\le\left(\frac{b+1-b}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$$

$$0<c\left(1-c\right)\le\left(\frac{c+1-c}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$$

Nhân theo vế ba bất đẳng thức trên ta được

$a\left(1-a\right)b\left(1-b\right)c\left(1-c\right)\le\frac{1}{64}$, dẫn tới mâu thuẫn với (1).

Vậy điều phản chứng là sai do đó ít nhất một trong các bất đẳng thức đã cho là đúng (đpcm).

Bài tập tương tự

Cho a,b,c là các số thực thuộc khoảng $(0;1)$. Chứng minh ít nhất một trong các bất đẳng thức sau là sai

$$a(1-b)>\frac{1}{4};b(1-c)>\frac{1}{4};c(1-a)>\frac{1}{4}.$$

Bài 3. (HOMC 2007) Cho $p=\overline{abcd}$ là một số nguyên tố có bốn chữ số.

Chứng minh rằng phương trình $ax^3+bx^2+cx+d=0$ không có nghiệm hữu tỷ.

Lời giải

Giả sử phương trình có nghiệm hữu tỷ thì nghiệm này phải âm giả sử nghiệm đó là $x_0=-\frac{p}{q}, p,q\in\mathbb{N}^*,(p,q)=1$. Khi đó

$$-a\frac{p^3}{q^3}+b\frac{p^2}{q^2}-c\frac{p}{q}+d=0\Leftrightarrow -ap^3+bp^2a-cpq^2+dq^3=0\Rightarrow\begin{cases}a\,\vdots\,q\\ d\,\vdots\,p\end{cases}.$$

Do đó p,q là các số tự nhiên có một chữ số và vì p,q là nghiệm của phương trình nên $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d=(qx+p)\left(ex^2+fx+g\right),e,f,g\in\mathbb{N}^*$.

Ta có $\overline{abcd}=f(10)=(10q+p)(100e+10f+g)=\overline{qp}.\overline{efg}$ trái với giả thiết $\overline{abcd}$ là một số nguyên tố.

Vậy điều phản chứng là sai ta có điều phải chứng minh.

Bài tập tương tự

(HOMC 2007) Cho $p=\overline{abc}$ là một số nguyên tố có ba chữ số.

Chứng minh rằng phương trình $ax^2+bx+c=0$ không có nghiệm hữu tỷ.

Bài 4. Giả sử $f_1(x)=x^2+a_1x+b_1; f_2(x)=x^2+a_2x+b_2$ là hai tam thức bậc hai với hệ số nguyên có nghiệm chung là a. Chứng minh rằng nếu a không là số nguyên thì tam thức bậc hai sau luôn có nghiệm thực $f(x)=x^2+(a_1+a_2)x+b_1+b_2$.

Lời giải

Ta chứng minh a không thể là số hữu tỷ thật vậy giả sử $a=\frac{p}{q}, p,q\in\mathbb{Z},(p,q)=1$.

Do a là nghiệm của

$$f_1(x)\Rightarrow a^2+a_1a+b_1=0\Leftrightarrow\frac{p^2}{q^2}+a_1\frac{p}{q}+b_1=0\Leftrightarrow p^2+a_1pq+b_1q^2=0.$$

Suy ra $p^2 \vdots q \Rightarrow p \vdots q \Rightarrow (p,q) = q = 1 \Rightarrow a \in \mathbb{Z}$ trái với giả thiết a không là số nguyên.

Vì vậy a không là số hữu tỷ.

Do a là nghiệm chung của

$$f_1(x), f_2(x) \Rightarrow \begin{cases} a^2 + a_1a + b_1 = 0 \\ a^2 + a_2a + b_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow (a_1 - a_2)a = b_2 - b_1 (1).$$

Do a không là số hữu tỷ nên $(1) \Leftrightarrow a_1 = a_2; b_1 = b_2$.

Khi đó $f_1(x) = x^2 + a_1x + b_1; f(x) = x^2 + 2a_1x + 2b_1$.

Do $f_1(x)$ có nghiệm nên $a_1^2 - 4b_1 \geq 0$ khi đó f(x) có

$$\Delta' = a_1^2 - 2b_1 = \frac{1}{2}\left(a_1^2 - 4b_1\right) + \frac{1}{2}a_1^2 \geq 0.$$

Điều đó chứng đó f(x) có nghiệm ta có đpcm.

Bài 5. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 3$.

Chứng minh rằng $\sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a} \geq 3\sqrt{2}$.

Lời giải

Đặt $x = \sqrt{\frac{a+b}{2}}, y = \sqrt{\frac{b+c}{2}}, z = \sqrt{\frac{c+a}{2}} \Rightarrow \begin{cases} a = x^2 + z^2 - y^2 \\ b = x^2 + y^2 - z^2 \\ c = z^2 + y^2 - x^2 \end{cases}$.

Ta cần chứng minh $x + y + z \geq 3$ với điều kiện

$$\frac{1}{x^2 + y^2 - z^2} + \frac{1}{y^2 + z^2 - x^2} + \frac{1}{z^2 + x^2 - y^2} = 3.$$

Thật vậy giả sử $x + y + z < 0$. Khi đó sử dụng bất đẳng thức AM – GM cho ba số dương ta có

$$\frac{1}{x^2 + y^2 - z^2} + \frac{1}{y^2 + z^2 - x^2} + \frac{1}{z^2 + x^2 - y^2} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{\left(x^2 + y^2 - z^2\right)\left(y^2 + z^2 - x^2\right)\left(z^2 + x^2 - y^2\right)}}.$$

Mặt khác

$$\left(x^2 + y^2 - z^2\right)\left(y^2 + z^2 - x^2\right)\left(z^2 + x^2 - y^2\right) \leq x^2y^2z^2 \leq \left(\frac{x+y+z}{3}\right)^6 < 1.$$

Suy ra $\frac{1}{x^2 + y^2 - z^2} + \frac{1}{y^2 + z^2 - x^2} + \frac{1}{z^2 + x^2 - y^2} > 3$ mâu thuẫn với giả thiết.

Vậy điều phản chứng là sai và ta có điều phải chứng minh.

Ta cùng xét bài toán quen thuộc sau trích từ đề thi IMO 2001

Bài 6.(IMO 2001) Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ac}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ba}}\ge 1.$$

Lời giải

Đặt $x=\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}};y=\frac{b}{\sqrt{b^2+8ac}};z=\frac{c}{\sqrt{c^2+8ba}},(x;y;z\in(0;1))$

Để ý rằng: $\frac{a^2}{8bc}=\frac{x^2}{1-x^2};\frac{b^2}{8ac}=\frac{y^2}{1-y^2};\frac{c^2}{8ba}=\frac{z^2}{1-z^2}$.

Suy ra $\frac{1}{512}=(\frac{x^2}{1-x^2})(\frac{y^2}{1-y^2})(\frac{z^2}{1-z^2})$.

Ta cần chứng minh $x+y+z\ge 1$ với $x,y,z\in(0;1)$ và

$(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)=512(xyz)^2$ (1).

Giả sử ngược lại $x+y+z<1$.

Theo bất đẳng thức AM – GM ta có:

$$\begin{aligned}(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)&>[(x+y+z)^2-x^2][(x+y+z)^2-y^2][(x+y+z)^2-z^2]\\&=(x+x+y+z)(y+z)(x+y+z+y)(z+x)(z+z+x+y)(x+y)\\&\ge 4(x^2yz)^{\frac14}.2(yz)^{\frac12}.4(y^2zx)^{\frac14}.2(xz)^{\frac12}.4(z^2xy)^{\frac14}.2(xy)^{\frac12}=512(xyz)^2\end{aligned}$$

Điều này mẫu thuẫn với (1).

Vậy điều phản chứng là sai và ta có điều phải chứng minh.

Bài tập tương tự

Cho a,b,c là các số thực dương có tích bằng 1. Chứng minh

$$\frac{1}{\sqrt{5a+1}}+\frac{1}{\sqrt{5b+1}}+\frac{1}{\sqrt{5c+1}}\le 1.$$

Bài 7. Cho a,b,c là các số thực dương thỏa điều kiện $a+b+c+abc=4$.

Chứng minh rằng: $a+b+c\ge ab+bc+ca$.

Lời giải

Giả sử ngược lại có $a+b+c<ab+bc+ac$.

Sử dụng bất đẳng thức Schur bậc 3 ta có(Xem chương 4).

$$\begin{aligned}\frac{9abc}{a+b+c}&\ge 4(ab+bc+ac)-(a+b+c)^2\\&>(a+b+c)[4-(a+b+c)]=abc(a+b+c)\end{aligned}$$

$\Rightarrow a+b+c<3$.

Khi đó $abc<1\Rightarrow 4=abc+a+b+c<4$. Mâu thuẫn.

Suy ra bất đẳng thức đầu đúng.

Từ bất đẳng thức này ta chứng minh được một bất đẳng thức khó sau

Cho a,b,c là các số thực dương và k số thực thoả mãn điều kiện

$4k^2+2k-1\geq 0$ ta luôn có $\left(k+\frac{a}{b+c}\right)\left(k+\frac{b}{c+a}\right)\left(k+\frac{c}{a+b}\right)\geq\left(k+\frac{1}{2}\right)^3$.

C. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1. Chứng minh rằng nếu $a+b=2cd$ thì ít nhất một trong các bất đẳng thức sau là đúng $c^2\geq a; d^2\geq b$.

Bài 2. Chứng minh rằng ít nhất một trong ba bất đẳng thức sau là đúng

$$a^2+b^2\geq\frac{(b+c)^2}{2}; b^2+c^2\geq\frac{(c+a)^2}{2}; c^2+a^2\geq\frac{(a+b)^2}{2}.$$

Bài 3. Cho a,b,c là các số thực thuộc khoảng $(0;2)$. Chứng minh rằng ít nhất một trong các bất đẳng thức sau là sai $a(2-b)>1; b(2-c)>1; c(2-a)>1$.

Bài 4. Cho a,b,c là các số thực thoả mãn $a+b+c>0; ab+bc+ca>0; abc>0$.

Chứng minh rằng $a>0, b>0, c>0$.

Bài 5. Chứng minh rằng nếu $a_1a_2\geq 2(b_1+b_2)$ thì ít nhất một trong hai phương trình sau có nghiệm $x^2+a_1x+b_1=0; x^2+a_2x+b_2=0$.

Bài 6. Cho $abc\neq 0$. Chứng minh ít nhất một trong ba phương trình sau có nghiệm

$$ax^2+2bx+c=0; bx^2+2cx+a=0; cx^2+2ax+b=0.$$

Bài 7. Cho $f(x)=x^2+ax+b$. Chứng minh rằng với mọi giá trị của a và b thì ít nhất một trong ba số

$|f(0)|, |f(1)|, |f(-1)|$ lớn hơn hoặc bằng $\frac{1}{2}$.

Bài 8. Cho a,b,c là các số thực thoả mãn điều kiện

1. $a+b+c=-2; a^2+b^2+c^2=2$.

2. Chứng minh rằng cả ba số a,b,c đều thuộc đoạn $\left[-\frac{4}{3};0\right]$.

Bài 9. Cho a,b,c là các số thực thoả mãn điều kiện $a^2+b^2+ab+bc+ca<0$.

Chứng minh rằng $a^2+b^2<c^2$.

Bài 10. Cho a,b,c là các số thực đôi một khác nhau chứng minh rằng ít nhất một trong ba bất đẳng thức sau là sai

$$9ab\geq(a+b+c)^2; 9bc\geq(a+b+c)^2; 9ca\geq(a+b+c)^2.$$

Bài 11. Cho a,b,c,d là các số thực dương chứng minh ít nhất một trong các bất đẳng thức sau là sai $a+b<c+d; (a+b)(c+d)<ab+cd; (a+b)cd<(c+d)ab$.

Bài 12. Cho a,b,c là các số thực dương có tích bằng 1. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{\sqrt{1+8a}}+\frac{1}{\sqrt{1+8b}}+\frac{1}{\sqrt{1+8c}}\ge 1$$

Bài 13. Cho a,b,c,d là các số thực chứng minh. Chứng minh rằng:

$$\min\{a-b^2;b-c^2;c-d^2;d-a^2\}\le\frac{1}{4}$$

Bài 14. (USAMO 2000) Cho a,b,c là các số thực dương.

Chứng minh rằng:

$$\frac{a+b+c}{3}-\sqrt[3]{abc}\le max\left\{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2;(\sqrt{b}-\sqrt{c})^2;(\sqrt{c}-\sqrt{a})^2\right\}$$

Bài 15. Cho a,b,c là các số thực dương và k số thực thoả mãn điều kiện $4k^2+2k-1\ge 0$ ta luôn có $\left(k+\frac{a}{b+c}\right)\left(k+\frac{b}{c+a}\right)\left(k+\frac{c}{a+b}\right)\ge\left(k+\frac{1}{2}\right)^3$.

D. HƯỚNG DẪN GIẢI – ĐÁP SỐ

Bài 1. Giả sử cả hai bất đẳng thức đều sai khi đó

$c^2<a;$

$d^2<b$

Cộng theo vế hai bất đẳng thức trên ta được

$$c^2+d^2<a+b=2cd\Leftrightarrow(c-d)^2<0 \text{ vô lý.}$$

Vậy điều phản chứng là sai ta có điều phải chứng minh.

Bài tập tương tự

Cho a,b,c,d là các số thực thoả mãn điều kiện $ac\ge 2(b+d)$. Chứng minh rằng ít nhất một trong các bất đẳng thức sau là sai $a^2<4b;c^2<4d$.

Bài 2. Giả sử tất cả các bất đẳng thức trên đều sai khi đó

$$a^2+b^2<\frac{(b+c)^2}{2};$$

$$b^2+c^2<\frac{(c+a)^2}{2};$$

$$c^2+a^2<\frac{(a+b)^2}{2}.$$

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên ta được

$$2\left(a^2+b^2+c^2\right)<\frac{(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\left(a^2+b^2+c^2\right)<2\left(ab+bc+ca\right) \qquad \text{(vô lý).}$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2<0$$

Điều phản chứng là sai do đó ta có điều phải chứng minh.

Bài 3. Giả sử tất cả các bất đẳng thức trên là đúng khi đó

$$a(2-b)>1; b(2-c)>1; c(2-a)>1.$$

Nhân theo vế ba bất đẳng thức trên ta được $a(2-a)b(2-b)c(2-c)>1(1)$.

Chú ý.

$$0<a(2-a)=-(a-1)^2+1\le 1$$

$$0<b(2-b)=-(b-1)^2+1\le 1\ .$$

$$0<c(2-c)=-(c-1)^2+1\le 1$$

Nhân theo vế ba bất đẳng thức trên ta được $a(2-a)b(2-b)c(2-c)\le 1$ mẫu thuẫn với (1).

Vậy điều phản chứng là sai(đpcm).

Bài 4. Giả sử tồn tại một số nhỏ hơn hoặc bằng 0 giả sử là a khi đó do $abc>0$ nên $a<0; bc<0$.

Khi đó $ab+bc+ca=a(b+c)+bc>0 \Rightarrow a(b+c)>-bc>0 \Rightarrow b+c<0$.

Suy ra $a+b+c<0$ mâu thuẫn với giả thiết. Vậy điều phản chứng là sai(đpcm).

Bài 5. Giả sử cả hai phương trình đều vô nghiệm khi đó $\begin{cases} a_1^2-4b_1<0 \\ a_2^2-4b_2<0 \end{cases}$.

Cộng theo vế hai bất đẳng thức trên ta được $4(b_1+b_2)>a_1^2+a_2^2$.

Mặt khác $a_1^2+a_2^2\ge 2a_1a_2\ge 4(b_1+b_2)$.

Suy ra $4(b_1+b_2)>4(b_1+b_2)$ vô lý.

Vậy điều phản chứng là sai ta có điều phải chứng minh.

Bài 6. Giả sử cả ba phương trình đều vô nghiệm khi đó

$$\begin{cases} \Delta'_1=b^2-ac<0 \\ \Delta'_2=c^2-ab<0 \\ \Delta'_3=a^2-bc<0 \end{cases}.$$

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên ta được $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca<0$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(a-b)^2+\frac{1}{2}(b-c)^2+\frac{1}{2}(c-a)^2<0 \text{ (vô lý).}$$

Vậy điều phản chứng là sai ta có đpcm.

Bài 7. Giả sử không có số nào trong ba số $|f(0)|,|f(1)|,|f(-1)|$ lớn hơn hoặc bằng $\frac{1}{2}$ khi đó $\begin{cases} |f(0)|=|b|<\frac{1}{2} \\ |f(1)|=|a+b+1|<\frac{1}{2} \\ |f(-1)|=|-a+b+1|<\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2}<b<\frac{1}{2} \ (1) \\ -\frac{3}{2}<a+b<-\frac{1}{2} \ (2) \\ -\frac{3}{2}<-a+b<-\frac{1}{2} \ (3) \end{cases}$.

Cộng theo vế của (2) và (3) ta được

$$-3<2b<-1 \Rightarrow b<-\frac{1}{2} \text{ mâu thuẫn với (1).}$$

Vậy điều phản chứng là sai ta có đpcm.

Bài 8. Giả sử tồn tại một số không thuộc đoạn $\left[-\frac{4}{3};0\right]$ ta có thể giả sử là a khi đó

$$\begin{cases} b+c=-2-a \\ b^2+c^2=2-a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b+c=-2-a \\ (b+c)^2-2bc=2-a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b+c=-2-a \\ bc=(a+1)^2 \end{cases}.$$

Chú ý. $(b+c)^2 \ge 4bc \Rightarrow (-2-a)^2 \ge 4(a+1)^2 \Leftrightarrow 3a^2+4a \le 0 \Leftrightarrow -\frac{4}{3} \le a \le 0$ mâu thuẫn.

Vậy điều phản chứng là sai ta có điều phải chứng minh.

Bài 9. Giả sử ngược lại $a^2+b^2 \ge c^2$ khi đó

$$2\left(a^2+b^2+ab+bc+ca\right) \ge a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)=(a+b+c)^2 \ge 0$$

(mẫu thuẫn với giả thiết).

Vậy điều phản chứng là sai ta có đpcm.

Bài 10. Giả sử tất cả các bất đẳng thức trên là đúng cộng theo vế ba bất đẳng thức ta được $9(ab+bc+ca) \ge 3(a+b+c)^2$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)^2-3(ab+bc+ca) \le 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(a-b)^2+\frac{1}{2}(b-c)^2+\frac{1}{2}(c-a)^2 \le 0 \Leftrightarrow a=b=c$$

Điều này mâu thuẫn với giả thiết ba số a,b,c đôi một phân biệt.

Vậy điều phản chứng là sai và bài toán được chứng minh.

Bài 11. Giả sử tất cả các bất đẳng thức là đúng khi đó

$$a+b<c+d \text{ (1)}$$

$$(a+b)(c+d)<ab+cd \text{ (2)}.$$

$$(a+b)cd<(c+d)ab \text{ (3)}$$

Nhân theo vế của (1) và (2) ta được

$$(a+b)^2(c+d)<(c+d)(ab+cd) \Leftrightarrow (a+b)^2<ab+cd$$

$$\Rightarrow cd>a^2+ab+b^2=(a-b)^2+3ab \geq 3ab \Rightarrow cd>3ab \text{ (4)}.$$

Nhân theo vế của (2) và (3) ta có

$$(a+b)^2cd(c+d)<(c+d)ab(ab+cd)$$

$$\Rightarrow (a+b)^2cd<(ab+cd)ab \Rightarrow ab(ab+cd)>4abcd.$$

$$\Rightarrow ab+cd>4cd \Rightarrow cd>3ab \text{ (5)}$$

Từ (4) và (5) ta có điều mâu thuẫn.

Vậy phản chứng là sai và ta có đpcm.

Bài 12. Đặt $x=\dfrac{1}{\sqrt{1+8a}}; y=\dfrac{1}{\sqrt{1+8b}}; z=\dfrac{1}{\sqrt{1+8c}}$.

Dễ thấy $0<x,y,z<1$ và $a=\dfrac{1-x^2}{8x}; b=\dfrac{1-y^2}{8y^2}; c=\dfrac{1-z^2}{8z^2}$.

Do abc=1 nên ta có $8^3x^2y^2z^2=(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)$.

Theo đề bài ta cần chứng minh $x+y+z \geq 1$.

Giả sử ngược lại $x+y+z<1$.

Ta có:

$$1-x^2>(x+y+z)^2-x^2=(z+y)[(x+y)+(x+z)] \geq 2(y+z)\sqrt{(x+y)(x+z}>0.$$

Thiết lập tương tự với hai biểu thức còn lại ta có

$$1-y^2>2(x+z)\sqrt{(y+z)(y+x)}>0$$

$$1-z^2>2(y+x)\sqrt{(x+z)(z+y)}>0.$$

Nhân lại theo vế ba bất đẳng thức trên ta có:

$$8^3x^2y^2z^2=(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)>8(x+z)^2(y+x)^2(z+y)^2.$$

$$\Rightarrow 8xyz>(x+y)(z+x)(y+z)$$

Điều này mâu thuẫn do theo bất đẳng thức AM – GM ta có

$$(x+y)(z+x)(y+z) \geq 8xyz.$$

Do đó ta có điều phải chứng minh.

Bài 13. Giả sử $\min\{a-b^2;b-c^2;c-d^2;d-a^2\}>\dfrac{1}{4}$.

Suy ra $a+b+c+d-(a^2+b^2+c^2+d^2)>1$.

Mặt khác:

$$a^2+b^2+c^2+d^2-(a+b+c+d)>\frac{(a+b+c+d)^2}{4}-(a+b+c+d)+1-1$$
$$=(\frac{a+b+c+d}{2}-1)^2-1>-1$$.

Suy ra $a+b+c+d-(a^2+b^2+c^2+d^2)<1$ nên điều giả sử là sai .

Suy ra điều cần chứng minh.

Bài 14. Giả sử ngược lại

$$\frac{a+b+c}{3}-\sqrt[3]{abc}>max\left\{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2;(\sqrt{b}-\sqrt{c})^2;(\sqrt{c}-\sqrt{a})^2\right\}$$

Suy ra $a+b+c-3\sqrt[3]{abc}>2(a+b+c-\sqrt{ab}-\sqrt{bc}-\sqrt{ca})$.

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{ab}+2\sqrt{bc}+2\sqrt{ca}>a+b+c+3\sqrt[3]{abc}$$

Đổi biến lại $x^3+y^3+z^3+3xyz<2\sqrt{(xy)^3}+2\sqrt{(yz)^3}+2\sqrt{(zx)^3}$.

Nhưng theo bất đẳng thức Schur ta có:

$$x^3+y^3+z^3+3xyz\ge xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x)$$
$$\ge 2\sqrt{(xy)^3}+2\sqrt{(yz)^3}+2\sqrt{(zx)^3}$$

Suy ra mâu thuẫn, vậy giả sử sai, suy ra điều cần chứng minh.

Bài 15. Đặt $x=\frac{2a}{b+c},y=\frac{2b}{c+a},z=\frac{2c}{a+b}\Rightarrow xy+yz+zx+xyz=4$.

Ta có $xyz\le 1; x+y+z\ge xy+yz+zx$.

Bất đẳng thức trở thành: $(2k+x)(2k+y)(2k+z)\ge(2k+1)^3$

$$\Leftrightarrow 4k^2(x+y+z)+2k(xy+yz+zx)+xyz\ge 12k^2+6k+1.$$

Ta có $4k^2(x+y+z)+2k(xy+yz+zx)+xyz$

$$\ge 4k^2(xy+yz+zx)+2k(xy+yz+zx)+xyz$$
$$=(4k^2+2k)(xy+yz+zx)+xyz=(4k^2+2k)(4-xyz)+xyz$$
$$=16k^2+8k-xyz(4k^2+2k-1)$$
$$\ge 16k^2+8k-4k^2-2k+1=12k^2+6k+1$$

Bất đẳng thức được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$

CHỦ ĐỀ 3: KỸ THUẬT QUY NẠP TOÁN HỌC

A. NỘI DUNG PHƯƠNG PHÁP

Giả sử ta cần chứng minh bất đẳng thức $A(n) \geq 0$ với A(n) là một biểu thức có chứa số nguyên dương n với $n \geq n_0$.

Ta thực hiện chứng minh bằng quy nạp như sau

- ✓ Chứng minh bất đẳng thức đúng với giá trị đầu tiên của n là n_0.
- ✓ Giả sử bất đẳng thức đúng với $n = k > n_0$ tức $A(k) \geq 0$.
- ✓ Sau đó chứng minh $A(k+1) \geq 0$ dựa vào $A(k) \geq 0$.
- ✓ Kết luận bất đẳng thức đúng.

B. BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Cho n là số nguyên dương $n \geq 5$. Chứng minh rằng $2^n > n^2$.

Lời giải

\+ Với $n = 5; 2^5 = 32 > 5^2 = 25$. Vậy bất đẳng thức đúng với $n = 5$.

\+ Giả sử bất đẳng thức đúng với $n = k > 5$ tức $2^k > k^2$.

Khi đó

$$2^{k+1} = 2.2^k > 2k^2 = (k+1)^2 + k^2 - 2k - 1 = (k+1)^2 + k(k-5) + 3k - 1 > (k+1)^2.$$

Vậy bất đẳng thức đúng với $n = k+1$.

Theo nguyên lý quy nạp ta có điều phải chứng minh.

Bài tập tương tự

Cho n là số nguyên dương lớn hơn 1. Chứng minh $n^n > (n+1)^{n-1}$.

Bài 2. Cho a,b là các số thực không âm và n là số nguyên dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a^n + b^n}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^n.$$

Lời giải

\+ Với $n = 1$ bất đẳng thức trở thành đẳng thức.

\+ Giả sử bất đẳng thức đúng với $n = k > 1$ tức $\frac{a^k + b^k}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^k$.

\+ Ta cần chứng minh $\frac{a^{k+1} + b^{k+1}}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^{k+1}$.

Chú ý

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^{k+1} = \left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{a+b}{2}\right)^k \leq \frac{a+b}{2}.\frac{a^k + b^k}{2}.$$

Vậy ta chứng minh $\frac{a^{k+1}+b^{k+1}}{2} \geq \frac{a+b}{2}.\frac{a^k+b^k}{2} \Leftrightarrow a^{k+1}+b^{k+1} \geq ab^k+ba^k$

$$\Leftrightarrow a\left(a^k-b^k\right)+b^k(b-a) \geq 0 \Leftrightarrow (a-b)\left(a^k-b^k\right) \geq 0$$

Bất đẳng thức cuối luôn đúng.

Vậy theo nguyên lý quy nạp ta có điều phải chứng. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b$.

Tổng quát với n số thực không âm và m là một số nguyên dương ta có

$$\frac{a_1^m+a_2^m+...+a_n^m}{n} \geq \left(\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}\right)^m.$$

Bài 3. Cho số nguyên dương $M>3$. Giả sử $x_1, x_2, ..., x_{2014}$ là các số nguyên dương sao cho $x_1.x_2.....x_{2014}=M$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$S=x_1^3+x_2^3+...+x_{2014}^3.$$

Lời giải

Ta chứng minh với n là số nguyên dương $x_1, x_2, ..., x_n$ thoả mãn điều kiện $x_1x_2...x_n=M$ thì $x_1^3+x_2^3+...+x_n^3 \leq \left(x_1x_2...x_n\right)^3+n-1$.

Và bài toán chính là trường hợp riêng khi n bằng 2014.

+ Với n bằng 1 bất đẳng thức chính là hằng đẳng thức.

+ Với n bằng 2 ta có $\left(x_1^3-1\right)\left(x_2^3-1\right) \geq 0 \Rightarrow x_1^3+x_2^3 \leq 1+x_1^3x_2^3$.

Vậy bất đẳng thức đúng với n bằng 1,2.

+ Giả sử bất đẳng thức đúng với $n=k>2$ tức

$$x_1^3+x_2^3+...+x_k^3 \leq \left(x_1x_2...x_k\right)^3+k-1 (1).$$

Ta cần chứng minh $x_1^3+x_2^3+...+x_{k+1}^3 \leq \left(x_1x_2...x_{k+1}\right)^3+k$.

Do (1) nên ta chỉ cần chứng minh $x_{k+1}^3+\left(x_1x_2...x_k\right)^3 \leq 1+\left(x_1x_2...x_kx_{k+1}\right)^3$

$$\Leftrightarrow \left(x_{k+1}^3-1\right)\left(\left(x_1x_2...x_k\right)^3-1\right) \geq 0$$

Bất đẳng thức cuối đúng.

Theo nguyên lý quy nạp ta có điều phải chứng minh.

Vậy giá trị lớn nhất của S bằng M^3+2013 đạt tại một số bằng M và 2013 số bằng 1.

Bài 4. Cho n là số nguyên dương $x_k \geq 1, k=\overline{1,n}$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_2}+...+\frac{1}{1+x_n} \geq \frac{n}{1+\sqrt[n]{x_1x_2...x_n}}.$$

Lời giải

+ Với $n=1$ bất đẳng thức trở thành đẳng thức.

+ Giả sử bất đẳng thức đúng với $n=k>1,$ tức

$$\frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_2}+...+\frac{1}{1+x_k}\ge\frac{k}{1+\sqrt[k]{x_1x_2...x_k}}\ (1).$$

+ Ta cần chứng minh

$$\frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_2}+...+\frac{1}{1+x_k}+\frac{1}{1+x_{k+1}}\ge\frac{k+1}{1+\sqrt[k+1]{x_1x_2...x_{k+1}}}.$$

Do (1) nên ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{k}{1+\sqrt[k]{x_1x_2...x_k}}+\frac{1}{1+x_{k+1}}\ge\frac{k+1}{1+\sqrt[k+1]{x_1x_2...x_{k+1}}}\ (2).$$

Chú ý $\frac{1}{1+x_{k+1}}+\frac{k-1}{1+\sqrt[k+1]{x_1x_2...x_{k+1}}}\ge\frac{k}{1+\sqrt[k]{\left(x_1x_2...x_k\right)^{\frac{k-1}{k+1}}x_{k+1}^{\frac{2k}{k+1}}}}$

$$\frac{k}{1+\sqrt[k]{\left(x_1x_2...x_k\right)^{\frac{k-1}{k+1}}x_{k+1}^{\frac{2k}{k+1}}}}+\frac{k}{1+\sqrt[k]{x_1x_2...x_k}}\ge\frac{2k}{1+\sqrt[k+1]{x_1x_2...x_{k+1}}}$$

Cộng theo vế hai bất đẳng thức trên ta có (2). Tức bất đẳng thức đúng với $n=k+1$.

Vậy theo nguyên lý quy nạp ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1=x_2=...=x_n$.

Bài 5. (VMO 2011) Chứng minh rằng với mọi số thực dương x và số nguyên dương n ta có $\frac{x^n\left(x^{n+1}+1\right)}{x^n+1}\le\left(\frac{x+1}{2}\right)^{2n+1}$.

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Lời giải

+ Với $n=1$ bất đẳng thức trở thành $\left(\frac{x+1}{2}\right)^3\ge\frac{x\left(x^2+1\right)}{x+1}$

$$\Leftrightarrow\left(x+1\right)^4-8x\left(x^2+1\right)\ge0\Leftrightarrow\left(x-1\right)^4\ge0.$$

Vậy bất đẳng thức đúng với $n=1$.

+ Giả sử bất đẳng thức đúng với $n=k$ tức $\frac{x^k\left(x^{k+1}+1\right)}{x^k+1}\le\left(\frac{x+1}{2}\right)^{2k+1}$ (1).

Ta cần chứng minh

$$\frac{x^{k+1}\left(x^{k+2}+1\right)}{x^{k+1}+1} \le \left(\frac{x+1}{2}\right)^{2k+3}.$$

Do (1) nên ta chỉ cần chứng minh

$$\left(\frac{x+1}{2}\right)^2 \frac{x^k\left(x^{k+1}+1\right)}{x^k+1} \ge \frac{x^{k+1}\left(x^{k+2}+1\right)}{x^{k+1}+1}$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 x^k\left(x^{k+1}+1\right)^2 - 4\left(x^k+1\right)x^{k+1}\left(x^{k+2}+1\right) \ge 0.$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2\left(x^{k+1}-1\right)^2 \ge 0$$

Bất đẳng thức luôn đúng. Vậy theo nguyên lý quy nạp ta có điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=1$.

Để kết thức tôi trình bày lời giải chứng minh bất đẳng thức AM – GM bằng quy nạp.

Bài 6. (BĐT AM – GM) Cho $a_1, a_2, \ldots, a_n$ là các số thực không âm.

Chứng minh rằng ta luôn có $a_1+a_2+\ldots+a_n \ge n\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}$

Lời giải

Cơ sở quy nạp với n = 1, 2 được kiểm tra dễ dàng.

Giả sử bất đẳng thức đã được chứng minh cho n số.

Xét n+1 số không âm $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$. Đặt $a_1a_2\ldots a_{n+1} = A^{n+1}$. Nếu tất cả các số bằng nhau thì bất đẳng thức đúng.

Trong trường hợp ngược lại, phải tồn tại hai số a_i, a_j sao cho $a_i < A < a_j$.

Không mất tính tổng quát, có thể giả sử $a_n < A < a_{n+1}$.

Khi đó ta có $(a_n - A)(a_{n+1} - A) < 0$, suy ra $a_n + a_{n+1} > a_na_{n+1}/A + A$.

Từ đó ta có $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + a_{n+1} > a_1 + \ldots + a_{n-1} + a_na_{n+1}/A + A (1)$

Bây giờ áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho n số $a_1 + \ldots + a_{n-1} + a_na_{n+1}/A$ ta được $a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}+a_n \ge n\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_{n-1}\frac{a_na_{n+1}}{A}} = nA$.

Kết hợp với (1) ta có điều phải chứng minh.

C. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1. Cho a,b,c là độ dài ba cạnh một tam giác vuông có c là cạnh huyền. Chứng minh $a^{2n}+b^{2n} \le c^{2n}$ với mọi số nguyên dương n.

Bài 2. Cho n số thực không âm $x_1, x_2, \ldots, x_n$ thoả mãn điều kiện

$$2\left(x_1+x_2+\ldots+x_n\right) \le 1.$$

Chứng minh rằng $(1-x_1)(1-x_2)...(1-x_n) \geq \frac{1}{2}$.

Bài 3. Chứng minh rằng với n số nguyên dương phân biệt ta có

$$a_1^3 + a_2^3 + ... + a_n^3 \geq (a_1 + a_2 + ... + a_n)^2.$$

Bài 4. Cho $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là các số thực thuộc [0, 1]. Chứng minh rằng

$$x_1(1-x_2) + x_2(1-x_3) + \ldots + x_n(1-x_1) \leq [n/2]$$

Bài 5. Cho $n \geq 2$ và $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là n số nguyên phân biệt.

Chứng minh rằng $(x_1-x_2)^2 + (x_2-x_3)^2 + \ldots + (x_n - x_1)^2 \geq 4n - 6$

Bài 6. Chứng minh rằng với $x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_n \geq 0$ ta có bất đẳng thức

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\sqrt{i}}.$$

Bài 7. Chứng minh rằng nếu $a_1, a_2, \ldots, a_n$ là các số nguyên dương phân biệt thì ta có bất đẳng thức $\sum_{i=1}^{n} (a_i^7 + a_i^5) \geq 2\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^3\right)^2$.

Bài 8. (Bất đẳng thức Mc-Lauflin) Với mọi số thực $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$ và $b_1, b_2, \ldots, b_{2n}$ ta có bất đẳng thức $\sum_{k=1}^{2n} a_k^2 \sum_{k=1}^{2n} b_k^2 - \left(\sum_{k=1}^{n} (a_{2k}b_{2k-1} - a_{2k-1}b_{2k})\right)^2 \geq \left(\sum_{k=1}^{2n} a_k b_k\right)^2$.

D. HƯỚNG DẪN GIẢI – ĐÁP SỐ

Bài 1. Với $n = 1$ bất đẳng thức trở thành đẳng thức.

Giả sử bất đẳng thức đúng với $n = k > 1$ tức $a^{2k} + b^{2k} \leq c^{2k}$ (1).

Ta cần chứng minh $a^{2(k+1)} + b^{2(k+1)} \leq c^{2(k+1)}$.

Chú ý do có (1) nên ta chỉ cần chứng minh $c^2\left(a^{2k} + b^{2k}\right) \geq a^{2(k+1)} + b^{2(k+1)}$

$\Leftrightarrow \left(a^2 + b^2\right)\left(a^{2k} + b^{2k}\right) \geq a^{2(k+1)} + b^{2(k+1)} \Leftrightarrow a^2b^{2k} + b^2a^{2k} \geq 0$.

Bất đẳng thức. Vậy theo nguyên lý quy nạp ta có điều phải chứng minh.

CHỦ ĐỀ 4: KỸ THUẬT MIỀN GIÁ TRỊ

A. GIỚI THIỆU

Phương pháp này khá cơ bản và thường được sử dụng trong các bài toán tìm cực trị với các bất đẳng thức có dạng: $a \leq f(x) \leq b$ với $x \in D$.

Nguyên tắc chung là đưa về tìm điều kiện để phương trình $m = f(x)$ có nghiệm trên D.

Trong trường hợp có nhiều biến ta cần đưa về phương trình với một biến hoặc đưa về hệ phương trình nếu có.

B. NỘI DUNG PHƯƠNG PHÁP

1) Tìm miền giá trị bằng cách xét điều kiện có nghiệm của phương trình bậc hai

Một phương trình bậc hai có dạng: $Ax^2 + Bx + C = 0$ với $A \neq 0$.

Điều kiện để phương trình có nghiệm là: $\Delta = B^2 - 4AC \geq 0$.

Vì vậy cần tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của một biểu thức $m = f(x, y, z)$.

Ta biến đổi tương đương m để đưa về một phương trình bậc của x hoặc y hoặc của z.

Khi đó sử dụng điều kiện có nghiệm ta tìm được Max và Min của m.

Ví dụ 1. Cho x,y,z là các số thực thoả mãn điều kiện $\begin{cases} x - y + z = 3 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 5 \end{cases}$.

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P = \dfrac{x + y - 2}{z + 2}$.

Lời giải

Trong biểu thức của P có z khác so với x và y do vậy ta tìm cách rút $x + y$ theo z và đưa về phương trình bậc hai đối với z. Việc tìm Max và Min của P ta chặn bằng điều kiện có nghiệm của phương trình bậc hai đối với z.

Ta có $(z+2)P = x + y - 2 \Rightarrow \left[(z+2)P + 2\right]^2 = (x+y)^2$.

Chú ý

$$\begin{cases} x - y = 3 - z \\ x^2 + y^2 = 5 - z^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 3 - z \\ \dfrac{1}{2}(x+y)^2 + \dfrac{1}{2}(x-y)^2 = 5 - z^2 \end{cases} \Rightarrow (x+y)^2 = -3z^2 + 6z + 1.$$

Vì vậy

$$\begin{aligned} &\left[(z+2)P + 2\right]^2 = -3z^2 + 6z + 1 \\ &\Leftrightarrow (z+2)^2 P^2 + 4(z+2)P + 3z^2 - 6z + 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(P^2 + 3\right)z^2 + \left(4P^2 + 4P - 6\right)z + 4P^2 + 8P + 3 = 0 \ (1) \end{aligned}.$$

Ta có (1) là phương trình bậc hai đối với z điều kiện có nghiệm là

$$\Delta' = \left(2P^2 + 2P - 3\right)^2 - \left(P^2 + 3\right)\left(4P^2 + 8P + 3\right) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow 23P^2 + 36P \le 0 \Leftrightarrow -\frac{36}{23} \le P \le 0$$

+ Với $x = 2, y = 0, z = 1$ ta có P bằng 0. Vậy giá trị lớn nhất của P bằng 0.

+ Với $x = \frac{20}{31}, y = -\frac{66}{31}, z = \frac{7}{31}$ thì P bằng -36/23. Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $-\frac{36}{23}$.

Bài tập tương tự

Cho x,y,z là các số thực thoả mãn điều kiện $\begin{cases} x - y + z = 3 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 5 \end{cases}$.

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x + y - 1}{z + 2}$.

Đáp số: $\frac{3 - 2\sqrt{3}}{3} \le P \le \frac{3 + 2\sqrt{3}}{3}$.

2) Kỹ thuật sử dụng điều kiện có nghiệm của phương trình lượng giác

Phương trình dạng: $A\sin x + B\cos x = C$

có nghiệm khi và chỉ khi $A^2 + B^2 \ge C^2$.

Ví dụ 1. Chứng minh rằng với mọi số thực x ta có $\frac{2}{11} \le \frac{\cos x + 2\sin x + 3}{2\cos x - \sin x + 4} \le 2$.

Lời giải

Đặt $y = \frac{\cos x + 2\sin x + 3}{2\cos x - \sin x + 4} \Rightarrow y\left(2\cos x - \sin x + 4\right) = \cos x + 2\sin x + 3$.

$\Leftrightarrow \left(2y - 1\right)\cos x - \left(y + 2\right)\sin x = 3 - 4y$ (1).

Điều kiện để (1) có nghiệm là $\left(2y - 1\right)^2 + \left(y + 2\right)^2 \ge \left(3 - 4y\right)^2$

$$\Leftrightarrow 11y^2 - 24y + 4 \le 0 \Leftrightarrow \frac{2}{11} \le y \le 2$$

Bài toán được chứng minh.

3) Kỹ thuật điều kiện có nghiệm của phương trình - hệ phương trình

Thay vì tìm trực tiếp Max và Min của biểu thức ta đưa về tìm điều kiện có nghiệm của hệ phương trình.

Ví dụ 1. Cho x,y là hai số thực thoả mãn điều kiện

$$\left(x^2 - y^2 + 1\right)^2 + 4x^2y^2 - x^2 - y^2 = 0.$$

Chứng minh rằng $\frac{3-\sqrt{5}}{2} \le x^2 + y^2 \le \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Lời giải

Đặt $m = x^2 + y^2$. Ta cần tìm Max và Min của m.

Thay vì đi chứng minh trực tiếp ta tìm điều kiện để hệ phương trình sau có nghiệm $\begin{cases} m = x^2 + y^2 \\ \left(x^2 - y^2 + 1\right)^2 + 4x^2y^2 - x^2 - y^2 = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = x^2 + y^2 \\ x^4 + y^4 + x^2 - 3y^2 + 2x^2y^2 + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = x^2 + y^2 \\ \left(x^2 + y^2\right)^2 - 3\left(x^2 + y^2\right) + 4x^2 + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = x^2 + y^2 \\ m^2 - 3m + 1 + 4x^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = -\frac{m^2 - 3m + 1}{4} \\ y^2 = \frac{m^2 + m + 1}{4} \end{cases}$$

Điều kiện để hệ phương trình có nghiệm là

$$\begin{cases} -\frac{m^2 - 3m + 1}{4} \ge 0 \\ \frac{m^2 + m + 1}{4} \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{3-\sqrt{5}}{2} \le m \le \frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

Vì vậy $\frac{3-\sqrt{5}}{2} \le x^2 + y^2 \le \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Bài tập tương tự

Cho x,y là các số thực thoả mãn điều kiện $x, y \ge 1; 4x^2y^2 - x^2 - y^2 = 18xy - 16$.

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{2^{x+y}}{\sqrt{x^2 + x + y^2 + y + 5} + x + y}.$$

Đáp số: $P_{\min} = 16\left(\sqrt{17} - 4\right); P_{\max} = 64\left(\sqrt{37} - 6\right)$.

Ví dụ 2. Cho x,y là các số thực thay đổi thoả mãn điều kiện

$$x + y - 2 = \sqrt{2x+1} + \sqrt{2y+1}.$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \left(x - y\right)^2$.

Lời giải

Đặt $\begin{cases} u=\sqrt{2x+1} \\ v=\sqrt{2y+1} \end{cases},(u,v\geq 0)\Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{u^2-1}{2} \\ y=\dfrac{v^2-1}{2} \end{cases}$.

Điều kiện bài toán trở thành $\dfrac{u^2+v^2-2}{2}-2=u+v\Leftrightarrow u^2+v^2-6=2(u+v)$

$\Leftrightarrow (u+v)^2-2(u+v)-2uv-6=0$.

Khi đó $P=\left(\dfrac{u^2-1}{2}-\dfrac{v^2-1}{2}\right)^2=\dfrac{(u^2-v^2)^2}{4}$.

$$=\frac{(u-v)^2(u+v)^2}{4}=\frac{\left[(u+v)^2-4uv\right](u+v)^2}{4}$$

Vậy ta có hệ phương trình $\begin{cases} (u+v)^2-2(u+v)-2uv-6=0\ (1) \\ P=\dfrac{\left[(u+v)^2-4uv\right](u+v)^2}{4}\quad (2) \end{cases}$.

Từ (1) ta có $2uv=(u+v)^2-2(u+v)-6\leq \dfrac{1}{2}(u+v)^2$

$\Rightarrow (u+v)^2-4(u+v)-12\leq 0\Leftrightarrow -2\leq u+v\leq 6$.

Chú ý $u+v=\sqrt{2(x+y)+2+2\sqrt{(2x+1)(2y+1)}}\geq \sqrt{2(x+y)+2}\geq \sqrt{6}$.

Vì vậy ta có $t=u+v\in\left[\sqrt{6};6\right]$.

Khi đó $P=\dfrac{\left\{(u+v)^2-2\left[(u+v)^2-2(u+v)-6\right]\right\}(u+v)^2}{4}$

$$=\frac{\left[-(u+v)^2+4(u+v)+12\right](u+v)^2}{4}=\frac{t^2\left(-t^2+4t+12\right)}{4}$$

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{t^2\left(-t^2+4t+12\right)}{4}$ liên tục trên đoạn $\left[\sqrt{6};6\right]$ ta có

$f'(t)=t\left(-t^2+3t+6\right)$; $f'(t)=0\xleftrightarrow{t\in\left[\sqrt{6};6\right]}t=\dfrac{3+\sqrt{33}}{2}$.

Ta có $f(\sqrt{6})=9+6\sqrt{6}$; $f\left(\dfrac{3+\sqrt{33}}{2}\right)=\dfrac{3\left(69+11\sqrt{33}\right)}{8}$; $f(6)=0$.

Vì vậy $P_{\max}=f_{\max}=f\left(\dfrac{3+\sqrt{33}}{2}\right)=\dfrac{3\left(69+11\sqrt{33}\right)}{8}$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} u+v=\dfrac{3+\sqrt{33}}{2} \\ x+y-2=\dfrac{3+\sqrt{33}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=\dfrac{7+\sqrt{33}}{2} \\ \sqrt{2x+1}+\sqrt{2y+1}=\dfrac{3+\sqrt{33}}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{14+2\sqrt{33}-\sqrt{414+66\sqrt{33}}}{8}, y=\dfrac{14+2\sqrt{33}+\sqrt{414+66\sqrt{33}}}{8} \\ x=\dfrac{14+2\sqrt{33}+\sqrt{414+66\sqrt{33}}}{8}, y=\dfrac{14+2\sqrt{33}-\sqrt{414+66\sqrt{33}}}{8} \end{array}\right.$$

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng $\dfrac{3\left(69+11\sqrt{33}\right)}{8}$.

Ví dụ 3. (TSĐH Khối A 2006) Cho *x,y* là 2 số thực và $x\neq 0, y\neq 0$ thỏa mãn điều kiện $xy(x+y)=x^2+y^2-xy$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A=\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{y^3}$.

Lời giải

Nhận thấy x, y đối xứng nên đặt: $\begin{cases} x+y=u \\ x.y=v \end{cases}$.

Giả thiết bài toán trở thành: $u.v=u^2-3v \Leftrightarrow v=\dfrac{u^2}{u+3}$ (do $u\neq -3$)

Ta có $\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{y^3}=\dfrac{x^3+y^3}{(xy)^3}=\dfrac{u(u^2-3v)}{v^3}=\dfrac{u^2}{v^2}=\left(\dfrac{u+3}{u}\right)^2$

Vì $u^2\geq 4v \Rightarrow u^2\geq \dfrac{4u^2}{u+3} \Leftrightarrow \dfrac{4}{u+3}\leq 1 \Leftrightarrow \dfrac{u-1}{u+3}\geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u\geq 1 \\ u\leq -3 \end{array}\right.$.

Chú ý để tìm Max của A ta chỉ cần xét với $\dfrac{u+3}{u}>0$ nên ta chỉ cần chứng minh Max của A bằng 16 vậy : $\dfrac{u+3}{u}\leq 4$ với $u\geq 1$ hoặc $u\leq -3$.

Xét hàm số f(u) = $\frac{u+3}{u} \Rightarrow$ f'(u) = $\frac{-3}{u^2} < 0$

Trên mỗi khoảng $(-\infty;-3)$ và $[1;+\infty)$ do đó f(u) $\le$ f(1); $\forall u \ge 1$.

Còn 0 < f(-3) < f(u) <1, $\forall$ u > -3.

Vậy giá trị lớn nhất của A bằng 16.

C. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1. Chứng minh rằng với mọi số thực x ta có $-\frac{1}{2} \le \frac{2\sin x + \cos x + 1}{\sin x - 2\cos x + 3} \le 2$.

Bài 2. Chứng minh rằng với mọi số thực x và y ta có

$$\left(\frac{\cos 3x + y\sin 3x + 1}{\cos 3x + 2}\right)^2 \le \frac{3y^2 + 2 + 2\sqrt{3y^2+1}}{9}.$$

Bài 3. Chứng minh rằng với mọi số thực x,y thoả mãn điều kiện

$$x^2 - y^2 + \frac{5}{4} = 3.\frac{x^2+y^2}{2} - \frac{\left(x^2+y^2\right)^2}{2}.$$

Chứng minh rằng $\frac{5-\sqrt{5}}{2} \le x^2 + y^2 \le \frac{5+\sqrt{5}}{2}$.

Bài 4. Cho x,y là các số thực thoả mãn điều kiện $x^2 + xy + y^2 \le 3$.

Chứng minh rằng $-4\sqrt{3} - 3 \le x^2 - xy - 3y^2 \le 4\sqrt{3} - 3$.

Bài 5. Cho x,y,z là các số thực thoả mãn điều kiện $\begin{cases} x+y+z=3 \\ x^2+y^2+z^2=5 \end{cases}$.

Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x-y+3}{z+2}$.

Bài 6. Cho x,y là hai số thực thay đổi thoả mãn điều kiện $\sqrt{2x+3} + \sqrt{y+3} = 4$.

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \sqrt{x+2} + \sqrt{y+9}$.

D. HƯỚNG DẪN GIẢI – ĐÁP SỐ

Bài 1. Đặt $y = \frac{2\sin x + \cos x + 1}{\sin x - 2\cos x + 3} \Rightarrow (2-y)\sin x + (2y+1)\cos x = 3y - 1$.

Điều kiện để phương trình có nghiệm là: $(2-y)^2 + (2y+1)^2 \ge (3y-1)^2$

$\Leftrightarrow 4y^2 - 6y - 4 \le 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \le y \le 2$.

Bài toán được chứng minh.

Bài 2. Đặt $m=\dfrac{\cos 3x+y\sin 3x+1}{\cos 3x+2}\Rightarrow(m-1)\cos 3x-y\sin 3x=1-2m$.

Điều kiện để phương trình có nghiệm là $(m-1)^2+y^2\ge(1-2m)^2$

$\Leftrightarrow 3m^2-2m-y^2\le 0\Leftrightarrow\dfrac{1-\sqrt{3y^2+1}}{3}\le m\le\dfrac{1+\sqrt{3y^2+1}}{3}$.

Suy ra $|m|\le\dfrac{1+\sqrt{3y^2+1}}{3}\Rightarrow m^2\le\left(\dfrac{1+\sqrt{3y^2+1}}{3}\right)^2=\dfrac{3y^2+2+2\sqrt{3y^2+1}}{9}$.

Bài toán được chứng minh.

Bài 3. Tìm được: $\begin{cases}x^2=-\dfrac{m^2-5m+5}{4}\\ y^2=\dfrac{m^2-m+5}{4}\end{cases}$.

Điều kiện để hệ phương trình có nghiệm là:

$\begin{cases}-\dfrac{m^2-5m+5}{4}\ge 0\\ \dfrac{m^2-m+5}{4}\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow m^2-5m+5\le 0\Leftrightarrow\dfrac{5-\sqrt5}{2}\le m\le\dfrac{5+\sqrt5}{2}$.

Bài toán được chứng minh.

Bài 4. Nếu $y=0$ bất đẳng thức luôn đúng.

Xét với $y\ne 0$ đặt $m=\dfrac{x^2-xy-3y^2}{x^2+xy+y^2}=\dfrac{t^2-t-3}{t^2+t+1}$.

Suy ra $m(t^2+t+1)=t^2-t-3\Leftrightarrow(m-1)t^2+(m+1)t+m+3=0$.

Điều kiện để phương trình có nghiệm là $\Delta=(m+1)^2-4(m-1)(m+3)\ge 0$

$\Leftrightarrow 3m^2-6m-13\le 0\Leftrightarrow\dfrac{-3-4\sqrt3}{3}\le m\le\dfrac{-3+4\sqrt3}{3}$.

Chú ý do $0<x^2+xy+y^2\le 3\Rightarrow -4\sqrt3-3\le x^2-xy-3y^2\le 4\sqrt3-3$.

Bài toán được chứng minh.

Bài 5. Chú ý $z\ne -2$ vì ngược lại ta có $\begin{cases}x+y=5\\ x^2+y^2=1\end{cases}$ vô nghiệm.

Khi đó $(z+2)P=x-y+3\Leftrightarrow(z+2)P-3=x-y$.

Từ hệ điều kiện ta có

$$\begin{cases} x+y=3-z \\ x^2+y^2=5-z^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=3-z \\ \frac{1}{2}(x+y)^2+\frac{1}{2}(x-y)^2=5-z^2 \end{cases} \Rightarrow (x-y)^2=-3z^2+6z+1.$$

Khi đó $\left[(z+2)P-3\right]^2=-3z^2+6z+1$

$$\Leftrightarrow (z+2)^2P^2-6(z+2)P+3z^2-6z+8=0$$

$$\Leftrightarrow \left(P^2+3\right)z^2+\left(4P^2-6P-6\right)z+4P^2-12P+8=0$$

Điều kiện phương trình có nghiệm là

$$\left(4P^2-3P-3\right)^2-\left(P^2+3\right)\left(4P^2-12P+8\right)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow 23P^2-54P+15\le 0 \Leftrightarrow \frac{27-8\sqrt{6}}{23}\le P\le \frac{27+8\sqrt{6}}{23}$$

Vì vậy $P_{\min}=\frac{27-8\sqrt{6}}{23}; P_{\max}=\frac{27+8\sqrt{6}}{23}$.

Bài 6. Thực hiện tương tự bài tập mẫu: $P_{\max}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\sqrt{22}; P_{\min}=\frac{3\sqrt{10}}{2}$.

CHỦ ĐỀ 5: KỸ THUẬT SỬ DỤNG NGUYÊN LÝ DIRICLE

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Cho x,y,z là các số thực dương thoả mãn điều kiện $x+y+z+1=4xyz$.

Chứng minh rằng $xy+yz+zx\ge x+y+z$.

Lời giải

Theo nguyên lý Dirichlet tồn tại 2 trong 3 số $(x-1),(y-1),(z-1)$ cùng dấu, không mất tính tổng quát giả sử $(x-1)(y-1)\ge 0 \Leftrightarrow xy\ge x+y-1$.

$\Rightarrow xy+yz+zx\ge x+y-1+yz+zx$.

Vậy ta cần chứng minh $x+y-1+yz+zx\ge x+y+z \Leftrightarrow z(x+y-1)\ge 1$.

Theo giả thiết ta có $z=\frac{x+y+1}{4xy-1}$.

Vậy ta chứng minh

$$\frac{x+y+1}{4xy-1}.(x+y-1)\ge 1 \Leftrightarrow (x+y)^2-1\ge 4xy-1 \Leftrightarrow (x-y)^2\ge 0.$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$.

Bài tập tương tự

Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện $a+b+c+abc=4$.

Chứng minh rằng $a+b+c \ge ab+bc+ca$.

Bài 2. Cho a,b,c là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $a+b+c=3$.

Chứng minh rằng $\left(1-a+a^2\right)\left(1-b+b^2\right)\left(1-c+c^2\right) \ge 1$.

Lời giải

Trong ba số $1-a, 1-b$ và $1-c$ luôn tồn tại hai số cùng dấu không mất tính tổng quát giả sử hai số đó là $1-b$ và $1-c$ suy ra $(1-b)(1-c) \ge 0$.

Khi đó $\left(1-b+b^2\right)\left(1-c+c^2\right)=\left(b^2-b\right)\left(c^2-c\right)+b^2+c^2-b-c+1$

$$=bc(b-1)(c-1)+b^2+c^2-b-c+1$$

$$\ge b^2+c^2-b-c+1 \ge \frac{1}{2}(b+c)^2-(b+c)+1$$

$$=\frac{1}{2}(3-a)^2-(3-a)+1=\frac{a^2-4a+5}{2}$$

Vì vậy bất đẳng thức được chứng minh nếu ta chứng minh được

$\left(1-a+a^2\right).\frac{a^2-4a+5}{2} \ge 1 \Leftrightarrow (a-1)^2\left(a^2-3a+3\right) \ge 0$ (luôn đúng).

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Nhận xét. Ngoài ra bài toán có thể giải bằng kỹ thuật dồn biến xem chương 4.

Bài 3. Cho x,y,z là các số thực không âm thoả mãn điều kiện

$$x^2+y^2+z^2+2xyz=1.$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=xy+yz+zx-2xyz$.

Lời giải

Trong 3 số $(2x-1),(2y-1),(2z-1)$ luôn tồn tại hai số cùng dấu, không mất tính tổng quát giả sử $(2x-1)(2y-1) \ge 0 \Rightarrow 2(x+y)-4xy \le 1 \Rightarrow z(x+y)-2xyz \le \frac{z}{2}$.

Chú ý $1-z^2=2xyz+x^2+y^2 \ge 2xy+2xyz=2xy(z+1) \Rightarrow xy \le \frac{1-z}{2}$.

Vì vậy $P \le \frac{1-z}{2}+\frac{z}{2}=\frac{1}{2}$.

Với $x=y=z=\frac{1}{2}$ thì P bằng $\frac{1}{2}$. Vậy giá trị lớn nhất của P bằng $\frac{1}{2}$.

Bài tập tương tự

Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện $a^2+b^2+c^2+abc=4$.

Chứng minh rằng $ab+bc+ca-abc\le 2$.

Bài 4. Cho x,y,z là các số thực dương có tích bằng 1.

Chứng minh rằng $\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(y+1)^2}+\frac{1}{(z+1)^2}+\frac{2}{(x+1)(y+1)(z+1)}\ge 1$.

Lời giải

Trong ba số $(x-1),(y-1),(z-1)$ luôn có hai số cùng dấu, không mất tính tổng quát giả sử $(x-1)(y-1)\ge 0\Rightarrow xy+1\ge x+y\Rightarrow 2(xy+1)\ge(x+1)(y+1)$.

Sử dụng bất đẳng thức $\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(y+1)^2}\ge\frac{1}{1+xy}$.

Chứng minh xem chương 3.

Suy ra $VT\ge\frac{1}{1+xy}+\frac{1}{(z+1)^2}+\frac{1}{(1+xy)(1+z)}=\frac{z}{1+z}+\frac{1}{(z+1)^2}+\frac{z}{(1+z)^2}=1$.

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$.

Bài 5. Cho a,b,c là các số thực không âm. Chứng minh

$$abc+2+\frac{1}{\sqrt{2}}\left[(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2\right]\ge a+b+c.$$

Lời giải

Luôn tồn tại hai trong ba số $(a-1),(b-1),(c-1)$ cùng dấu, không mất tính tổng quát giả sử $(a-1)(b-1)\ge 0\Rightarrow ab\ge a+b-1$.

Khi đó ta chỉ cần chứng minh

$$c(a+b-1)+2+\frac{1}{\sqrt{2}}\left[(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2\right]\ge a+b+c$$

$$\Leftrightarrow (a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2\ge\sqrt{2}(a+b-2)(c-1)$$

Sử dụng bất đẳng thức C –S và bất đẳng thức AM – GM ta có

$$(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2\ge\frac{(a+b-2)^2}{2}+(c-1)^2\ge 2\sqrt{\frac{(a+b-2)^2}{2}.(c-1)^2}$$

$$=\sqrt{2}\left|(a+b-2)(c-1)\right|\ge\sqrt{2}(a+b-2)(c-1)$$

Bài 6. Cho a,b,c là các số thực không âm chứng minh

$$a^2+b^2+c^2+2abc+1\ge 2(ab+bc+ca).$$

Lời giải

Bài toán đã được trình bày trong chủ đề Kỹ thuật sử dụng tam thức bậc hai. Dưới đây là lời giải tiếp cận theo nguyên lý Dircihlet.

Luôn tồn tại 2 trong 3 số $(a-1),(b-1),(c-1)$ cùng dấu, không mất tính tổng quát ta giả sử $(a-1)(b-1)\ge 0 \Rightarrow 2c(a-1)(b-1)\ge 0 \Leftrightarrow 2abc \ge 2(ac+bc-c)$.

Vậy ta chỉ cần chứng minh

$$a^2+b^2+c^2+1+2(ac+bc-c)\ge 2(ab+bc+ca)$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2+(c-1)^2 \ge 0$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài toán tương tự

Cho a,b,c là các số thực không âm chứng minh

$$a^2+b^2+c^2+a^2b^2c^2+2\ge 2(ab+bc+ca).$$

Bài 7. Cho a,b,c là các số thực không âm thoả mãn điều kiện $a^2+b^2+c^2+abc=4$.

Chứng minh rằng $abc \le ab+bc+ca \le abc+2$.

Lời giải

Bất đẳng thức vế trái đơn giản bởi trong 3 số có ít nhất một số không vượt quá 1 giả sử là c khi đó $ab+bc+ca-abc=ab(1-c)+c(a+b)\ge 0$.

Đẳng thức xảy ra chẳng hạn tại $a=2, b=c=0$.

Ta chứng minh bất đẳng thức vế phải:

Trong ba số $(a-1),(b-1),(c-1)$ luôn có hai số cùng dấu, không mất tính tổng quát giả sử $(a-1)(b-1)\ge 0 \Rightarrow ab \ge a+b-1 \Rightarrow abc \ge c(a+b-1)$.

Vậy ta chứng minh $c(a+b-1)+2\ge ab+bc+ca \Leftrightarrow ab \le 2-c$.

Chú ý $4=(a^2+b^2)+c^2+abc \ge 2ab+c^2+abc \Rightarrow ab\le 2-c$.

Bất đẳng thức được chứng minh.

Bài 8. Cho a,b,c là các số thực dương có tích bằng 1.

Chứng minh rằng $\dfrac{1}{(1+a)^2}+\dfrac{1}{(1+b)^2}+\dfrac{1}{(1+c)^2}+\dfrac{1}{a+b+c+1}\ge 1$.

Lời giải

Theo nguyên lý Dirichlet thì 2 trong 3 số $(a-1),(b-1),(c-1)$ cùng dấu, không mất tính tổng quát ta giả sử $(a-1)(b-1)\ge 0 \Rightarrow 1+ab=\dfrac{c+1}{c}\ge a+b$.

Chú ý. $\dfrac{1}{(1+a)^2}+\dfrac{1}{(1+b)^2}\ge \dfrac{1}{1+ab}=\dfrac{c}{c+1}$.

Gọi P là biểu thức vế trái ta có $P \ge \frac{c}{c+1} + \frac{1}{(c+1)^2} + \frac{1}{\frac{c+1}{c} + c + 1} = 1$.

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

A. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1. Cho a,b,c là các số thực thoả mãn điều kiện

$$\frac{1}{a^2+8} + \frac{1}{4b^2+8} + \frac{1}{9c^2+8} = \frac{1}{3}.$$

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = a + 2b + 3c$.

B. HƯỚNG DẪN GIẢI – ĐÁP SỐ

Bài 1. Để đơn giản đặt $x = a, y = 2b, z = 3c$ ta có $\frac{1}{x^2+8} + \frac{1}{y^2+8} + \frac{1}{z^2+8} = \frac{1}{3}$.

Ta cần Max và Min của $P = x + y + z$.

Theo giả thiết kết hợp sử dụng bất đẳng thức AM – GM ta có

$$\frac{1}{x^2+8} = \frac{1}{6} - \frac{1}{y^2+8} + \frac{1}{6} - \frac{1}{z^2+8}$$

$$= \frac{y^2+2}{6\left(y^2+8\right)} + \frac{z^2+2}{6\left(z^2+8\right)} \ge \frac{1}{3}\sqrt{\frac{y^2+2}{y^2+8}.\frac{z^2+2}{z^2+8}}$$

Tương tự ta có

$$\frac{1}{y^2+8} \ge \frac{1}{3}\sqrt{\frac{x^2+2}{x^2+8}.\frac{z^2+2}{z^2+8}};\ \frac{1}{z^2+8} \ge \frac{1}{3}\sqrt{\frac{y^2+2}{y^2+8}.\frac{x^2+2}{x^2+8}}$$

Nhân theo vế ba bất đẳng thức trên ta được:

$\left(x^2+2\right)\left(y^2+2\right)\left(z^2+2\right) \le 27$ (1).

Mặt khác $\left(x^2+2\right)\left(y^2+2\right)\left(z^2+2\right) \ge 3\left(x+y+z\right)^2$ (2).

Thật vậy bất đẳng thức đã cho tương đương với:

$x^2y^2z^2 + 2\left(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2\right) + 8 \ge 6\left(xy + yz + zx\right)$.

Trong ba số $(x^2-1),(y^2-1),(z^2-1)$ luôn có hai số cùng dấu, không mất tính tổng quát giả sử

$$\left(x^2-1\right)\left(y^2-1\right) \ge 0 \Rightarrow x^2y^2 \ge x^2 + y^2 - 1 \Rightarrow x^2y^2z^2 \ge z^2\left(x^2+y^2-1\right).$$

Do đó ta chỉ cần chứng minh

$$z^2\left(x^2+y^2-1\right)+x^2+y^2+z^2+2\left(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2\right)+8\geq 6\left(xy+yz+zx\right)$$

$$\Leftrightarrow (x-y)^2+3(yz-1)^2+2(xy-1)^2+3(xz-1)^2\geq 0$$

Bất đẳng thức cuối đúng suy ra điều phải chứng minh.

Kết hợp (1) và (2) ta có

$(x+y+z)^2\leq 9\Leftrightarrow -3\leq x+y+z\leq 3$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng -3 đạt tại $a=-1, b=-\frac{1}{2}, c=-\frac{1}{3}$.

Giá trị lớn nhất của P bằng 3 đạt tại $a=1, b=\frac{1}{2}, c=\frac{1}{3}$.

CHỦ ĐỀ 6: KỸ THUẬT SỬ DỤNG TAM THỨC BẬC HAI

Các tính chất về nghiệm và dấu của tam thức bậc hai có một ứng dụng hết sức sâu rộng trong giải toán. Dưới đây tôi trình bày một ứng dụng của tam thức bậc hại trong chứng minh bất đẳng thức. Bất đẳng thức tiếp cận bằng phương pháp này có thể nói là rất tự nhiên.

A. NỘI DUNG PHƯƠNG PHÁP

Xét tam thức bậc hai $f(x)=ax^2+bx+c$.

Đính lý 1. Nếu $a>0$ thì f(x) đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_0=-\frac{b}{2a}$ và giá trị nhỏ nhất

$$f(x_0)=-\frac{b^2-4ac}{4a}.$$

Định lý 2. Nếu $a<0$ thì f(x) đạt giá trị lớn nhất tại $x_0=-\frac{b}{2a}$ và giá trị lớn nhất

$$f(x_0)=-\frac{b^2-4ac}{4a}.$$

Định lý 3. Nếu $\Delta=b^2-4ac\geq 0$ thì f(x) luôn có nghiệm.

Định lý 4. Nếu $\begin{cases}a>0\\ \Delta=b^2-4ac\leq 0\end{cases}$ thì $f(x)\geq 0$ với mọi x.

Định lý 5. Nếu $\begin{cases}a<0\\ \Delta=b^2-4ac\leq 0\end{cases}$ thì $f(x)\leq 0$ với mọi x.

B. BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Chứng minh rằng với x,y,z là các số thực có tổng bằng 1 ta có

$$(3x+4y+5z)^2 \geq 44(xy+yz+zx).$$

Lời giải

Thay $z=1-x-y$ bất đẳng thức trở thành:

$$(3x+4y+5-5x-5y)^2 \geq 44xy+44(x+y)(1-x-y)$$

$$\Leftrightarrow 48x^2+16x(3y-4)+45y^2-54y+25 \geq 0$$

Vế trái là tam thức bậc hai của x với hệ số của x^2 dương và có

$$\Delta'_x = 64(3y-4)^2 - 48\left(45y^2-54y+25\right) = -176(3y-1)^2 \leq 0.$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$x=\frac{1}{2}, y=\frac{1}{3}, z=\frac{1}{6}$.

<u>Cách 2:</u> Bất đẳng thức đã cho tương đương với:

$$9x^2+16y^2+25z^2 \geq 20xy+4yz+14zx.$$

Sử dụng bất đẳng thức AM – GM ta có

$$\frac{5}{3}\left(4x^2+9y^2\right) \geq 2.\frac{5}{3}\sqrt{4x^2.9y^2} \geq 20xy$$

$$\frac{7}{12}\left(4x^2+36z^2\right) \geq 2.\frac{7}{12}\sqrt{4x^2.36z^2} \geq 14xz$$

$$y^2+4z^2 \geq 2\sqrt{y^2.4z^2} \geq 4yz$$

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên ta có đpcm. Như vậy không cần giả thiết bài toán ba số có tổng bằng 1(Xem thêm chủ đề kỹ thuật tham số hoá – Chương 2).

Bài 2. Chứng minh rằng với mọi số thực a và b ta luôn có

$$3\left(1-a+a^2\right)\left(1-b+b^2\right) \geq 2\left(1-ab+a^2b^2\right).$$

Lời giải

Viết lại bất đẳng thức dưới dạng:

$$\left(a^2-3a+3\right)b^2-\left(3a^2-5a+3\right)b+3a^2-3a+1 \geq 0.$$

Vế trái là tam thức bậc hai của b có $a^2-3a+3>0, \forall a \in \mathbb{R}$ và

$$\Delta_b = \left(3a^2-5a+3\right)^2 - 4\left(a^2-3a+3\right)\left(3a^2-3a+1\right) = -\left(a^2-3a+1\right)^2 \leq 0, \forall a \in \mathbb{R}$$

Do đó vế trái luôn không âm. Bài toán được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} a^2-3a+1=0 \\ b=\dfrac{3a^2-5a+3}{2\left(a^2-3a+3\right)} \end{cases} \Leftrightarrow a=b=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$.

$\sqrt{}$

Bài tập tương tự

Chứng minh rằng với mọi số thực a,b,c,d ta có

$$3(a^2-ab+b^2)(c^2-cd+d^2)\ge 2(c^2a^2-abcd+b^2d^2).$$

Ta cùng xét một số bài toán cùng dạng sau đây

Bài 2.1. Cho a,b,c là các số thực không âm. Chứng minh rằng

$$3\left(1-a+a^2\right)\left(1-b+b^2\right)\left(1-c+c^2\right)\ge 1+abc+a^2b^2c^2.$$

Lời giải

Ta có $2\left(1-a+a^2\right)\left(1-b+b^2\right)=1+a^2b^2+\left(a-b\right)^2+\left(1-a\right)^2\left(1-b\right)^2$.

Suy ra $2\left(1-a+a^2\right)\left(1-b+b^2\right)\ge 1+a^2b^2$.

Do ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức sau

$$3\left(1+a^2b^2\right)\left(1-c+c^2\right)\ge 2\left(1+abc+a^2b^2c^2\right).$$

$$\Leftrightarrow \left(3+a^2b^2\right)c^2-\left(3+2ab+3a^2b^2\right)c+1+3a^2b^2\ge 0.$$

Coi vế trái là tam thức bậc hai của c có hệ số của c^2 dương và

$$\Delta=\left(3+2ab+3a^2b^2\right)^2-4\left(3+a^2b^2\right)\left(1+3a^2b^2\right)=-3\left(1-ab\right)^4\le 0.$$

Do đó vế trái luôn không âm.

Bài toán được chứng minh đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài 2.2. Cho *x* và *y* là hai số thực không cùng dương ta luôn có

$$\frac{4}{3}\left(x^2-x+1\right)\left(y^2-y+1\right)\ge x^2y^2-xy+1.$$

Lời giải

Theo giả thiết trong hai số luôn có một số không dương không mất tính tổng quát ta giả sử $y\le 0$ khi đó viết lại bất đẳng thức dưới dạng:

$$\left(y-2\right)^2x^2-\left(4y^2-7y+4\right)x+\left(1-2y\right)^2\ge 0.$$

Coi vế trái là tam thức bậc hai của x ta có

$$\Delta=\left(4y^2-7y+4\right)^2-4\left(y-2\right)^2\left(1-2y\right)^2=y\left(24y^2-51y+24\right)\le 0,\forall y\le 0.$$

Bài toán được chứng minh đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=\frac{1}{2}, y=0$ hoặc $x=0, y=\frac{1}{2}$.

Mở rộng bài toán cho 3 biến ta có kết quả

Cho *x,y,z* là các số thực không cùng dương ta luôn có

$$\frac{16}{9}\left(x^2-x+1\right)\left(y^2-y+1\right)\left(z^2-z+1\right)\geq 1-xyz+x^2y^2z^2.$$

Bài 3. Cho a,b,c là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $a^2+b^2+c^2=2$.

Chứng minh rằng: $1+2abc\geq ab+bc+ac$.

Lời giải

Giả sử $c=\max\left\{a,b,c\right\}\Rightarrow c\geq\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Khi đó đặt $S=a+b, P=ab$ theo giả thiết bài toán ta có

$$S^2-2P+c^2=2\Rightarrow P=\frac{S^2+c^2-2}{2}.$$

Ta cần chứng minh $1+2c.\frac{S^2+c^2-2}{2}\geq\frac{S^2+c^2-2}{2}+c.S$

$$\Leftrightarrow\left(2c-1\right)S^2-2cS+2c^3-c^2-4c+4\geq 0$$

Vế trái là tam thức bậc hai với hệ số dương do vậy ta chỉ cần chứng minh

$$\Delta'_S=c^2-\left(2c-1\right)\left(2c^3-c^2-4c+4\right)\leq 0$$

$$\Leftrightarrow 4\left(c-1\right)^2\left(c^2+c-1\right)\geq 0$$

Bất đẳng thức cuối luôn đúng do $c\geq\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=1, c=0$ hoặc các hoán vị.

Bài tập tương tự

Cho a, b, c là các số thực dương thoả mãn điều kiện

$$(a+1)(b+1)(c+1)=1+4abc.$$

Chứng minh rằng: $a+b+c\leq 1+abc$.

Bài 4. Cho a,b,c là các số thực không âm thay đổi thỏa mãn điều kiện

$$a+b+c=1.$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=a\left(b-c\right)^4+b\left(c-a\right)^4+c\left(a-b\right)^4$.

Lời giải

Không mất tính tổng quát giả sử $a \ge b \ge c$, khi đó

$$\begin{aligned} P &= a\left(b-c\right)^4 + b\left(c-a\right)^4 + c\left(a-b\right)^4 \le a\left(b+c\right)^4 + ba^4 + ca^4 \\ &= a\left(b+c\right)^4 + a^4\left(b+c\right) = a\left(b+c\right)\left[\left(b+c\right)^3 + a^3\right] \\ &= a\left(b+c\right)\left[\left(a+b+c\right)^3 - 3a\left(b+c\right)\left(a+b+c\right)\right] \\ &= a\left(b+c\right)\left(1-3a\left(b+c\right)\right) = -3\left[a\left(b+c\right)\right]^2 + a\left(b+c\right) \\ &= -3\left[a\left(b+c\right) - \frac{1}{6}\right]^2 + \frac{1}{12} \le \frac{1}{12} \end{aligned}.$$

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng $\frac{1}{12}$ đạt tại $a = \frac{3+\sqrt{6}}{6}, b = \frac{3-\sqrt{6}}{6}, c = 0$ hoặc các hoán vị.

Chú ý. Ta có bất đẳng thức mạnh hơn như sau

$$a\left(b+c\right)^4 + b\left(c+a\right)^4 + c\left(a+b\right)^4 \le \frac{1}{12}\left(a+b+c\right)^4$$

Bài 5. Cho các số thực thay đổi x,y,z thõa mãn điều kiện

$$x^2 + y^2 + z^2 + \frac{16}{25}xy = 3.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{3}{5}(x^2 + y^2) + \frac{5}{6}z^2 + xy - \sqrt{10(xy + yz + zx)}.$$

Lời giải

Nhận xét. Trước hết ta chưa quan tâm đến điều kiện của x,y,z mà để ý đến tính chất đối xứng của x và y trong điều kiện cũng như biểu thức của P nên ta sử dụng đánh giá: $x^2 + y^2 \ge \frac{(x+y)^2}{2}$.

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta được:

$$\begin{aligned} P &\ge \frac{3}{10}(x+y)^2 + \frac{5}{6}z^2 + xy - \sqrt{10(xy+yz+zx)} \\ &\ge 2\sqrt{\frac{3}{10}\left(x+y\right)^2.\frac{5}{6}z^2} + xy - \sqrt{10\left(xy+yz+zx\right)} \\ &= \left|(x+y)z\right| + xy - \sqrt{10(xy+yz+zx)} \ge xy + yz + zx - \sqrt{10(xy+yz+zx)} \end{aligned}$$

Một đánh giá dễ nhận ra là đưa về tam thức bậc 2:

$$xy+yz+zx-\sqrt{10\left(xy+yz+zx\right)}=\left(\sqrt{xy+yz+zx}-\sqrt{\frac{5}{2}}\right)^2-\frac{5}{2}\geq-\frac{5}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} xy+yz+zx=\dfrac{5}{2} \\ x=y \\ x^2+y^2+z^2+\dfrac{16}{25}xy=3 \\ z\left(x+y\right)\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{5}{\sqrt{34}},y=-\dfrac{5}{\sqrt{34}},z=-3\sqrt{\dfrac{2}{17}} \\ x=\dfrac{5}{\sqrt{34}},y=\dfrac{5}{\sqrt{34}},z=3\sqrt{\dfrac{2}{17}} \end{array}\right..$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $-\frac{5}{2}$ đạt tại $-\frac{5}{\sqrt{34}},y=-\frac{5}{\sqrt{34}},z=-3\sqrt{\frac{2}{17}}$ hoặc $x=\frac{5}{\sqrt{34}},y=\frac{5}{\sqrt{34}},z=3\sqrt{\frac{2}{17}}$.

Bài 6. Cho *x,y,z* là các số thực thỏa mãn điều kiện $x^2+y^2+z^2=3$.

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=xy+yz+2yz$.

Lời giải

Ta tìm giá trị nhỏ nhất của P

Xuất phát từ bất đẳng thức cơ bản:

$$\left(x+y+z\right)^2\geq 0\Leftrightarrow xy+yz+zx\geq-\frac{x^2+y^2+z^2}{2}=-\frac{3}{2}.$$

Suy ra $P=\left(xy+yz+zx\right)+zx\geq-\frac{3}{2}+zx\geq-\frac{3}{2}-\frac{x^2+z^2}{2}\geq-\frac{3}{2}-\frac{x^2+y^2+z^2}{2}=-3$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x^2+y^2+z^2=3 \\ xz=-\dfrac{x^2+z^2}{2}=\dfrac{x^2+y^2+z^2}{2}=-\dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\sqrt{\dfrac{3}{2}},y=0,z=\sqrt{\dfrac{3}{2}} \\ x=\sqrt{\dfrac{3}{2}},y=0,z=-\sqrt{\dfrac{3}{2}} \end{array}\right..$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng -3 đạt tại $x=-\sqrt{\frac{3}{2}},\ y=0,\ z=\sqrt{\frac{3}{2}}$ hoặc $x=\sqrt{\frac{3}{2}},y=0,z=-\sqrt{\frac{3}{2}}$.

<u>**Cách 2:**</u> Viết lại biểu thức P dưới dạng

$$P+3=\left(x+z\right)^2+y\left(x+z\right)+y^2\Leftrightarrow\left(x+z\right)^2+y\left(x+z\right)+y^2-P-3=0\ (1).$$

Coi (1) là phương trình bậc 2 với ẩn là $(x+z)$ ta có điều kiện có nghiệm của phương trình là $\Delta_{(x+z)} = y^2 - 4\left(y^2 - P - 3\right) \ge 0 \Leftrightarrow P \ge -3 + \dfrac{3y^2}{4} \ge -3$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} y = 0 \\ x + z = -\dfrac{y}{2} = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\sqrt{\dfrac{3}{2}}, y = 0, z = \sqrt{\dfrac{3}{2}} \\ x = \sqrt{\dfrac{3}{2}}, y = 0, z = -\sqrt{\dfrac{3}{2}} \end{array}\right.$.

Ta có kết quả tương tự cách trên.

Tìm giá trị lớn nhất của P

Ta tìm số thực $k > 0$ nhỏ nhất sao cho $P = xy + yz + 2zx \le k\left(x^2 + y^2 + z^2\right)$ đúng với mọi x,y,z và $x^2 + y^2 + z^2$. Khi đó giá trị lớn nhất của P bằng 3k.

Viết lại bất đẳng thức trên dưới dạng: $ky^2 - y\left(x+z\right) + kx^2 + kz^2 - 2xz \ge 0$.

Đây là một tam thức bậc hai với hệ số của y^2 dương nên ta chỉ cần tìm k sao cho $\Delta_y \le 0$.

Tức

$$\left(x+z\right)^2 - 4k\left(kx^2 + kz^2 - 2xz\right) \le 0 \Leftrightarrow \left(1 - 4k^2\right)\left(x^2 + z^2\right) + 2xz\left(1 + 4k\right) \le 0, \forall x, z.$$

Đây là một bất đẳng thức đối xứng với x và z nên ta chọn $x = z = 1$.

Suy ra $1 - 4k^2 + 1 + 4k \le 0 \Leftrightarrow 2k^2 - 2k - 1 \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k \le \dfrac{1-\sqrt{3}}{2} \\ k \ge \dfrac{1+\sqrt{3}}{2} \end{array}\right.$.

Vậy $k = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2} \Rightarrow P \le \dfrac{3\left(1+\sqrt{3}\right)}{2}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = z = \sqrt{\dfrac{3+\sqrt{3}}{4}}, y = \sqrt{\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}}$.

Nhận xét. Ngoài lời giải bằng tam thức bậc hai như trên ta có thể sử dụng kỹ thuật tham số hóa hoặc sử dụng C –S.

Bài 7. Cho a,b,c là các số thực thuộc đoạn $\left[\dfrac{1}{3}; 3\right]$. Chứng minh

$$\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} \ge \frac{7}{5}.$$

Lời giải

Không mất tính tổng quát giả sử $a = \max\{a,b,c\}$.

Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$(3a-2b)c^2 - (2a^2 - ab - 3b^2)c + 3a^2b - 2ab^2 \ge 0.$$

Vì $3a-2b>0$ ta chỉ cần chứng minh

$$(2a^2 - ab - 3b^2)^2 - 4(3a-2b)(3a^2b - 2ab^2) \le 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)(a-9b)(4a^2+b^2) \le 0$$

Bất đẳng thức cuối đúng do $a-b \ge 0;\ a-9b \le 3-9.\dfrac{1}{3} = 0$.

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a=3,\ b=\dfrac{1}{3},\ c=1$.

Nhận xét. Bằng cách tương tự ta chứng minh được

$$\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} \le \frac{8}{5}.$$

Ngoài ra có thể đưa về xét tính đơn điệu của hàm số (Xem chương 3).

Bài tập tương tự

(TSĐH Khối A 2011) Cho các số $x,y,z \in [1;4]$ thỏa mãn điều kiện

$$x \ge y, x \ge z.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \dfrac{x}{2x+3y} + \dfrac{y}{y+z} + \dfrac{z}{z+x}$.

HD: Chứng minh $P_{\min} = \dfrac{34}{33}$.

Bài 8. Cho a,b,c là các số thực không âm.

Chứng minh rằng $a^2+b^2+c^2+2abc+1 \ge 2(ab+bc+ca)$.

Lời giải

Viết lại bất đẳng thức dưới dạng: $a^2 + 2(bc-b-c)a + (b-c)^2 + 1 \ge 0$.

Coi vế trái bất đẳng thức trên là tam thức bậc hai của a ta được:

$$\Delta'_a = (bc-b-c)^2 - (b-c)^2 - 1 = bc(b-2)(c-2) - 1.$$

TH1: Nếu $bc-b-c \ge 0$ ta có ngay điều phải chứng minh.

TH2: Nếu $bc-b-c \le 0 \Leftrightarrow (b-1)(c-1) \le 1$ ta xét hai khả năng sau:

Khả năng 1. Nếu $(b-2)(c-2) \le 0 \Rightarrow \Delta'_a \le -1$ ta có ngay điều phải chứng minh.

Khả năng 2. Nếu $(b-2)(c-2)\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b,c\ge 2 \\ b,c\le 2 \end{array}\right.$ vì $(b-1)(c-1)\le 1$ nên $b,c\le 2$ khi đó sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta được:

$\Delta'_a = b(2-b).c(2-c)-1\le \left(\dfrac{b+2-b}{2}\right)^2.\left(\dfrac{c+2-c}{2}\right)^2-1=0,$ ta có điều phải chứng minh.

Chú ý. Xem thêm lời giải bằng Nguyên lý Dirichlet trong chủ đề tương ứng.

Bài tập tương tự

Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện $a^2+b^2+c^2-2abc-1\ge 0$.

Chứng minh rằng $|a-b|+|b-c|+|c-a|\ge \sqrt{a^2+b^2+c^2-2abc-1}$.

Bài 9. Cho x,y,z là các số thực thoả mãn điều kiện $x+y+z=xy+yz+zx$.

Chứng minh rằng $\dfrac{x}{x^2+1}+\dfrac{y}{y^2+1}+\dfrac{z}{z^2+1}\ge -\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Theo giả thiết ta có: $z(x+y-1)=x+y-xy$.

+ Nếu $x+y=1\Rightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ xy=1 \end{cases}$, vô nghiệm.

+ Vậy $x+y\ne 1$ và $z=\dfrac{x+y-xy}{x+y-1}$.

Vậy ta cần chứng minh $\dfrac{x}{x^2+1}+\dfrac{y}{y^2+1}+\dfrac{\dfrac{x+y-xy}{x+y-1}}{\left(\dfrac{x+y-xy}{x+y-1}\right)^2+1}\ge -\dfrac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{2x}{x^2+1}+\frac{2y}{y^2+1}+\frac{2(x+y-xy)(x+y-1)}{(x+y-xy)^2+(x+y-1)^2}\ge -1$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+1)^2}{x^2+1}+\frac{(y+1)^2}{y^2+1}\ge \frac{(xy-1)^2}{(x+y-xy)^2+(x+y-1)^2}$$

Chú ý theo bất đẳng thức C–S ta có

$$\frac{(x+1)^2}{x^2+1}+\frac{(y+1)^2}{y^2+1}=\frac{(x+1)^2(1-y)^2}{(x^2+1)(1-y)^2}+\frac{(y+1)^2(1-x)^2}{(y^2+1)(1-x)^2}$$

$$\ge \frac{\left[(x+1)(1-y)+(y+1)(1-x)\right]^2}{(x^2+1)(1-y)^2+(y^2+1)(1-x)^2}=\frac{4(xy-1)^2}{(x^2+1)(1-y)^2+(y^2+1)(1-x)^2}$$

Vậy ta chỉ cần chứng minh

$$4(x+y-xy)^2+4(x+y-1)^2 \ge (x^2+1)(1-y)^2+(y^2+1)(1-x)^2$$

$$\Leftrightarrow (y^2-3y+3)x^2-(3y^2-8y+3)x+3y^2-3y+1=0$$

Vế trái bất đẳng thức là tam thức bậc hai của x với hệ số của x^2 dương và có

$$\Delta_x=(3y^2-8y+3)^2-4(y^2-3y+3)(3y^2-3y+1)=-3(y^2-1)^2 \le 0.$$

Điều đó chứng tỏ bất đẳng thức đúng. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=-1, z=1$ hoặc các hoán vị.

Bài 10. Cho a,b,c là các số thực thỏa mãn điều kiện $a+b+c=2$ và $a^3+b^3+c^3-3abc=2$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=max\{a,b,c\}-\min\{a,b,c\}$.

Lời giải

Không mất tính tổng quát giả sử $a=max\{a,b,c\}, c=\min\{a,b,c\} \Rightarrow P=a-c$.

Ta có: $2=a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$.

$$\Rightarrow 2=\frac{1}{2}(a+b+c)\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=2$$

Suy ra: $P^2+(a-b)^2+(b-c)^2=2$.

$$\Leftrightarrow P^2+\left[(a-c)+(c-b)\right]^2+(b-c)^2=2$$

$$\Leftrightarrow P^2+(a-c)^2+2(b-c)^2-2(a-c)(b-c)=2.$$

$$\Leftrightarrow P^2-P(b-c)+(b-c)^2-1=0$$

Coi đẳng thức trên là phương trình bậc 2 với ẩn là (b – c). Để phương trình này có nghiệm ta phải có $\Delta_{b-c}=P^2-4(P^2-1)\ge 0 \Leftrightarrow P^2 \le \frac{4}{3} \Rightarrow P \le \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} a-c=\frac{2}{\sqrt{3}} \\ (b-c)^2-\frac{2}{\sqrt{3}}(b-c)+\frac{1}{3}=0 \\ a+b+c=0 \\ a \ge b \ge c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{2+\sqrt{3}}{3} \\ b=\frac{2}{3} \\ c=\frac{2-\sqrt{3}}{3} \end{cases}$.

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng $\frac{2}{\sqrt{3}}$ đạt tại $a=\frac{2+\sqrt{3}}{3}, b=\frac{2}{3}, c=\frac{2-\sqrt{3}}{3}$ hoặc các hoán vị.

Cách 2: Không mất tính tổng quát giả sử $a = max\{a,b,c\}, c=\min\{a,b,c\} \Rightarrow P=a-c$.

Ta có

$$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=1 \Leftrightarrow (a+b+c)^2-3(ab+bc+ca)=1$$

$$\Leftrightarrow ab+bc+ca=1$$

Suy ra: $P^2=(a-c)^2=(a+c)^2-4ac=(2-b)^2-4\left[1-b(a+c)\right]$

$$=(2-b)^2-4+4b(2-b)=-3b^2+4b=-3\left(b-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{4}{3}\le\frac{4}{3}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} b=\frac{2}{3} \\ a-c=\frac{2}{\sqrt{3}} \\ a+b+c=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{2+\sqrt{3}}{3} \\ b=\frac{2}{3} \\ c=\frac{2-\sqrt{3}}{3} \end{cases}$

Cách 3: Không mất tính tổng quát giả sử $c=\min\{a,b,c\}$.

Đặt $a=x+c, b=y+c, (x,y\ge 0)$.

Ta có: $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=1$ suy ra

$$\Leftrightarrow (x+c)^2+(y+c)^2+c^2-c(x+c)-c(y+c)-(x+c)(y+c)=1.$$

$$\Leftrightarrow x^2-xy+y^2=1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \left(x-\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3y^2}{4}=1 \\ \left(\frac{x}{2}-y\right)^2+\frac{3x^2}{4}=1 \end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases} x\le\frac{2}{\sqrt{3}} \\ y\le\frac{2}{\sqrt{3}} \end{cases}.$$

Suy ra $P=max\{x,y\}\le\frac{2}{\sqrt{3}}$.

C. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1. Cho a,b,c là độ dài 3 cạnh một tam giác và x,y,z là các số thực thay đổi thỏa mãn $ax+by+cz=0$. Chứng minh $xy+yz+zx\le 0$.

Bài 2. Cho x,y,z là các số thực thoả mãn điều kiện $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x^2+2y^2+3z^2=4 \end{cases}$.

Tìm giá trị lớn nhất của x.

Bài 3. Cho x,y là hai số thực thoả mãn điều kiện $x^2+xy+y^2-6(x+y)+11=0$.

Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=y+2x$.

Bài 4. Cho x,y,z là các số thực không âm có tổng bằng 1. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=9xy+10yz+11zx$.

Bài 5. Cho hai số thực dương x,y thoả mãn điều kiện $x^2y=1$. Chứng minh rằng

$$x\sqrt{x^2+y^2}+x^2\geq 2.$$

Bài 6. Cho n số thực $a_1,a_2,...,a_n$ thuộc đoạn [0;1]. Chứng minh

$$(1+a_1+a_2+...+a_n)^2\geq 4\left(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2\right).$$

Bài 7. Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho với mọi số thực $x_1,x_2,..,x_n$ ta có

$$x_1^2+x_2^2+...+x_n^2\geq (x_1+x_2+...+x_{n-1})x_n.$$

Bài 8. Chứng minh với mọi số thực x,y,z và a,b,c là độ dài ba cạnh một tam giác ta có $a(x-y)(x-z)+b(y-z)(y-z)+c(z-x)(z-y)\geq 0$.

Bài 9. (Vasile-Cirtoaje) Chứng minh với mọi số thực a,b,c ta có

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)^2\geq 3\left(a^3b+b^3c+c^3a\right).$$

Bài 10. Cho a,b,c là các số thực dương có tổng bằng 3. Chứng minh

$$a+ab+2abc\leq\frac{9}{2}.$$

Bài 11. Cho a,b,c là các số thực không âm. Chứng minh rằng

$$a^2+b^2+c^2+2abc+3\geq (1+a)(1+b)(1+c).$$

Bài 12. Cho a,b,c là các số thực không âm. Chứng minh

$$2\left(a^2+b^2+c^2\right)+abc+8\geq 5(a+b+c).$$

Bài 13. Cho *a,b,c* là các số thực không âm. Chứng minh

$$\left(a^2+2\right)\left(b^2+2\right)\left(c^2+2\right)\geq 9(ab+bc+ca).$$

Bài 14. Cho tam giác có ba góc A,B,C chứng minh với mọi số thực x ta có

$$1+\frac{1}{2}x^2\geq\cos A+x(\cos B+\cos C).$$

Bài 15. Chứng minh rằng với mọi số thực x và y ta có

$$x^2\left(1+\sin^2 y\right)+2x(\sin y+\cos y)+1+\cos^2 y>0.$$

Bài 16. Chứng minh rằng với mọi số thực x và y ta luôn có

$$(x+y)^2 - xy + 1 \geq \sqrt{3}(x+y).$$

Bài 17. Chứng minh rằng với mọi số thực x,y,z và ba góc A,B,C của một tam giác ta có $x^2 + y^2 + z^2 \geq 2xy\cos C + 2yz\cos A + 2zx\cos B$.

Bài 18. Cho x,y,z là các số thực không âm thoả mãn điều kiện

$$xyz + x + y + z = 4.$$

Chứng minh rằng $x + y + z \geq xy + yz + zx$.

Bài 19. Cho $\begin{cases} 0 < a \leq b \leq c \\ x, y, z > 0 \end{cases}$. Chứng minh

$$ac(xa + yb + zc)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right) \leq \frac{(a+c)^2}{4ac}(x+y+z)^2.$$

Bài 20. Cho a,b,c,d là các số thực thỏa mãn điều kiện $\begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ c + d = 3 \end{cases}$.

Chứng minh rằng $ac + bd + cd \leq \dfrac{9 + 6\sqrt{2}}{4}$.

Bài 21. (TSĐH Khối A 2011) Cho các số $x, y, z \in [1;4]$ thỏa mãn điều kiện $x \geq y, x \geq z$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \dfrac{x}{2x+3y} + \dfrac{y}{y+z} + \dfrac{z}{z+x}$.

Bài 22. Cho *a,b,c,d* là các số thực thỏa mãn $b > c > d$. Chứng minh

$$(a+b+c+d)^2 > 8(ac+bd).$$

Bài 23. Cho *a,b,c,d,p,q* là các số thực thỏa mãn điều kiện

$$p^2 + q^2 - a^2 - b^2 - c^2 - d^2 > 0.$$

Chứng minh $(p^2 - a^2 - b^2)(q^2 - c^2 - d^2) \leq (pq - ac - bd)^2$.

Bài 24. Cho *a,b,c* là độ dài ba cạnh một tam giác và p,q,r là ba số thực thay đổi thỏa mãn điều kiện $p + q + r = 0$. Chứng minh $a^2qr + b^2rp + c^2pq \leq 0$.

Bài 25. Chứng minh rằng với mọi số thực a,b ta có $(a^2+2)(b^2+2) \geq 3(ab+a+b)$.

D. HƯỚNG DẪN GIẢI – ĐÁP SỐ

Bài 1. Từ giả thiết ta có: $z = -\dfrac{ax+by}{c}$. Viết lại bất đẳng thức cần chứng minh dưới dạng: $xy - \dfrac{ax+by}{c}(x+y) \leq 0 \Leftrightarrow ax^2 - y(a+b-c)x + by^2 \geq 0$.

Coi vế trái bất đẳng thức trên là tam thức bậc hai của x ta được:

$$\Delta_x = y^2(a+b-c)^2 - 4aby^2 = y^2\left[(a+b-c)^2 - 4ab\right]$$

$$= y^2\left[(a-b)^2 + c^2 - 2c(a+b)\right] \le y^2\left[c^2 + c^2 - 2c(a+b)\right] = 2cy^2(c-a-b) \le 0$$

Ta có điều phải chứng minh.

Bài 2. Thay $z = 1 - x - y$ vào phương trình thứ hai ta được

$$x^2 + 2y^2 + 3(1-x-y)^2 - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow 5y^2 + 6(x-1)y + 4x^2 - 6x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta'_y = 9(x-1)^2 - 5(4x^2 - 6x - 1) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow 11x^2 - 12x - 14 \le 0 \Leftrightarrow \frac{6-\sqrt{190}}{11} \le x \le \frac{6+\sqrt{190}}{\sqrt{11}}$$

Khi $x = \dfrac{6+\sqrt{190}}{11} \Rightarrow y = \dfrac{15-3\sqrt{190}}{55}, z = \dfrac{10-2\sqrt{190}}{55}$.

Vậy giá trị lớn nhất của x bằng $\dfrac{6+\sqrt{190}}{11}$.

Bài 3. Rút $y = P - 2x$ thay vào điều kiện bài toán ta được:

$$x^2 + x(P-2x) + (P-2x)^2 - 6(x+P-2x) + 11 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - (3P-6)x + P^2 - 6P + 5 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta_x = (3P-6)^2 - 12(P^2 - 6P + 5) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow P^2 - 12P + 8 \le 0 \Leftrightarrow 6 - 2\sqrt{7} \le P \le 6 + 2\sqrt{7}$$

Vậy $P_{\min} = 6 - 2\sqrt{7}; P_{\min} = 6 + 2\sqrt{7}$.

Bài 4. Thay $z = 1 - x - y$ vào biểu thức của P và rút gọn ta được

$$11x^2 + (12y-11)x + 10y^2 - 10y + P = 0$$

$$\Rightarrow \Delta_x = (12y-11)^2 - 44(10y^2 - 10y + P) \ge 0$$

$$\Rightarrow P \le -\frac{74}{11}\left(y^2 - \frac{22}{37}y - \frac{121}{196}\right) = -\frac{74}{11}\left(y - \frac{11}{37}\right)^2 + \frac{195}{148} \le \frac{195}{148}$$

Vậy $P_{\max} = \dfrac{195}{148} \Leftrightarrow (x;y;z) = \left(\dfrac{25}{74}; \dfrac{11}{37}; \dfrac{27}{74}\right)$.

Bài 5. Gọi P là biểu thức vế trái ta có $y = \dfrac{1}{x^2}$ suy ra

$$P = x^2 + \sqrt{x^4 + \frac{1}{x^2}} \Leftrightarrow P - x^2 = \sqrt{x^4 + \frac{1}{x^2}}$$

$$\Rightarrow P^2 - 2Px + x^4 = x^4 + \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow 2Px^4 - P^2x^2 + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta_{x^2} = P^4 - 8P \geq 0 \Leftrightarrow P\left(P^3 - 8\right) \geq 0 \Rightarrow P \geq 2$$

Khi $x = \frac{1}{\sqrt{2}}, y = 2$ thì P bằng 2. Vậy Min của P bằng 2.

Bài 6. Xét tam thức bậc hai

$$f(x) = x^2 - (1 + a_1 + a_2 + ... + a_n)x + \left(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2\right).$$

Ta có

$$f(0) = a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 \geq 0;\ f(1) = a_1(a_1 - 1) + a_2(a_2 - 1) + ... + a_n(a_n - 1) \leq 0.$$

Suy ra $f(0).f(1) \leq 0 \Rightarrow \exists x_0 \in [0;1]$ sao cho $f(x_0) = 0$ tức f(x) có nghiệm.

Vì vậy $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow (1 + a_1 + a_2 + ... + a_n)^2 \geq 4\left(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2\right)$.

Bài 7. Bất đẳng thức đúng với mọi số thực nên đúng với $\begin{cases} x_1 = x_2 = ... = x_{n-1} \\ x_n = 2 \end{cases}$.

Khi đó bất đẳng thức trở thành $(n-1) + 2^2 \geq 2(n-1) \Leftrightarrow n \leq 5 \Rightarrow 1 \leq n \leq 5$.

Ta chứng minh với n=1,2,3,4,5 là các giá trị cần tìm.

Xét tam thức bậc hai $f(x_n) = x_n^2 - (x_1 + x_2 + ... + x_{n-1})x_n + x_1^2 + x_2^2 + ... + x_{n-1}^2$.

Ta có $\Delta_{x_n} = (x_1 + x_2 + ... + x_{n-1})^2 - 4\left(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_{n-1}^2\right)$.

Do $n \leq 5$ và theo bất đẳng thức C–S ta có

$$4\left(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_{n-1}^2\right) \geq (n-1)\left(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_{n-1}^2\right)$$
$$\geq (x_1 + x_2 + ... + x_{n-1})^2$$
$$\Rightarrow \Delta_{x_n} \leq 0 \Rightarrow f(x_n) \geq 0$$

Điều đó chứng tỏ bất đẳng thức luôn đúng với $n = \overline{1,5}$. Vậy n=1,2,3,4,5 là tất cả các giá trị cần tìm.

Bài 8. Vế trái viết lại thành tam thức bậc hai của x ta được

$$ax^2 - (ay + az + by - bz + cz - cy)x + \left(ayz + by^2 - byz + cz^2 - cyz\right).$$

Ta có $\Delta = (ay + az + by - bz + cz - cy)^2 - 4a\left(ayz + by^2 - byz + cz^2 - cyz\right)$.

$$= \left(a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc - 2ca\right)(y - z)^2$$

Chú ý $a^2+b^2+c^2<2(ab+bc+ca)\Rightarrow\Delta\le 0\Rightarrow\square$.

Bài 9. Đặt $b=a+x;c=a+y$. Bất đẳng thức được viết lại dưới dạng:

$$\left(x^2-xy+y^2\right)a^2-\left(x^3-5x^2y+4xy^2+y^3\right)a+x^4-3x^3y+2x^2y^2+y^4\ge 0.$$

Vế trái là tam thức bậc hai của a có hệ số của a^2 không âm.

Chú ý $x^2-xy+y^2=0\Leftrightarrow x=y=0\Rightarrow$ bất đẳng thức luôn đúng.

Với $x^2-xy+y^2>0$ khi đó

$$\Delta_a=\left(x^3-5x^2y+4xy^2+y^3\right)^2-4\left(x^2-xy+y^2\right)\left(x^4-3x^3y+2x^2y^2+y^4\right)$$

$$=-3\left(x^3-x^2y-2xy^2+y^3\right)^2\le 0$$

Điều đó chứng tỏ bất đẳng thức luôn đúng(đpcm).

Bài 10. Thay $b=3-a-c$ và đưa về chứng minh

$$f(a)=(2c+1)a^2+\left(2c^2-5c-4\right)a+\frac{9}{2}\ge 0.$$

Chú ý $\Delta_a=\left(2c^2-5c-4\right)^2-18(2c+1)=(2c-1)^2\left[c(c-4)-2\right]\le 0,\forall c\in[0;3]$.

Điều đó chứng tỏ bất đẳng thức luôn đúng.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=\frac{3}{2},b=1,c=\frac{1}{2}$.

Bài 11. Bất đẳng thức tương đương với:

$$a^2+b^2+c^2+2abc+3\ge 1+a+b+c+ab+bc+ca+abc.$$

$$\Leftrightarrow a^2+a(bc-b-c-1)+b^2+c^2-bc-b-c+2\ge 0.$$

$$\Leftrightarrow a^2+a(bc-b-c-1)+(b-c)^2+bc-b-c+2\ge 0.$$

Coi vế trái bất đẳng thức trên là tam thức bậc hai của a ta được:

$$\Delta_a=(bc-b-c-1)^2-4\left[(b-c)^2+bc-b-c+2\right]$$

$$=b^2c^2-2b^2c-2bc^2-3b^2-3c^2+4bc+6b+6c-7.$$

$$=b^2\left(c^2-2c-3\right)-2\left(c^2-2c-3\right)b-3c^2+6c-7$$

Lại coi đây là tam thức bậc hai của b ta được:

$$\Delta'_b=\left(c^2-2c-3\right)^2-\left(c^2-2c-3\right)\left(-3c^2+6c-7\right)$$

$$=\left(c^2-2c-3\right)\left(c^2-2c-3+3c^2-6c+7\right).$$

$$=4\left(c^2-2c-3\right)(c-1)^2=4(c-1)^2(c+1)(c-3)$$

TH1: Nếu $bc-b-c-1\geq 0$ ta có ngay điều phải chứng minh.

TH2: Nếu $bc-b-c-1\leq 0\Leftrightarrow (b-1)(c-1)\leq 2$ ta xét hai khả năng

Khả năng 1. Nếu $c\leq 3\Rightarrow c^2-2c-3\leq 0, \Delta'_b\leq 0\Rightarrow \Delta_a\leq 0$ ta có ngay điều phải chứng minh.

Khả năng 2. Nếu $c\geq 3\Rightarrow b-1\leq \dfrac{2}{c-1}\leq 1\Leftrightarrow b\leq 2$ lúc này ta lại coi Δ_a là tam thức bậc hai của c và thực hiện tương tự trên ta có ngay $\Delta'_c\leq 0\Rightarrow \Delta_a\leq 0$ ta có ngay điều phải chứng minh.

Bài 12. Viết lại bất đẳng thức dưới dạng:

$$2a^2+a(bc-5)+2b^2+2c^2-5b-5c+8\geq 0.$$

Coi vế trái của bất đẳng thức là tam thức bậc hai của a ta được:

$$\begin{aligned}\Delta_a&=(bc-5)^2-8\left(2b^2+2c^2-5b-5c+8\right)\\&=b^2c^2-16b^2-16c^2-10bc+40b+40c-39.\\&=b^2\left(c^2-16\right)-10b(c-4)-16c^2+40c-39\end{aligned}$$

Ta có: $2b^2+2c^2-5b-5c+8>0, \forall b,c$ (xét tam thức bậc hai với b hoặc c).

TH1: Nếu $bc\geq 5$ ta có ngay điều phải chứng minh.

TH2: Nếu $bc\leq 5$ lại coi Δ_a là tam thức bậc hai của b ta được:

$$\begin{aligned}\Delta'_b&=25(c-4)^2-\left(c^2-16\right)\left(-16c^2+40c-39\right)\\&=8\left(2c^4-5c^3-24c^2+55c-28\right)=8(c-1)^2(c-4)(2c+7)\end{aligned}.$$

Khả năng 1. Nếu $c\leq 4\Rightarrow c^2-16\leq 0, \Delta'_b\leq 0\Rightarrow \Delta_a\leq 0$ ta có ngay điều phải chứng minh.

Khả năng 2. Nếu $c\geq 4\Rightarrow b\leq \dfrac{5}{c}\leq \dfrac{5}{4}<4$ lúc này coi Δ_a là tam thức bậc hai của c và thực hiện tương tự trên ta có $\Delta'_c\leq 0\Rightarrow \Delta_a\leq 0$ ta có điều phải chứng minh.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$.

Bài 13. Ta cần chứng minh: $\left(a^2+2\right)\left(b^2+2\right)\left(c^2+2\right)-9(ab+bc+ca)\geq 0$.

$$\Leftrightarrow 4\left(a^2+b^2+c^2\right)+2\left(a^2b^2+1\right)+2\left(b^2c^2+1\right)+$$
$$2\left(c^2a^2+1\right)+a^2b^2c^2+1-9(ab+bc+ca)\geq 0.$$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta được:

$$2\left(a^2b^2+1\right)+2\left(b^2c^2+1\right)+2\left(c^2a^2+1\right)+a^2b^2c^2+2\geq 4ab+4bc+4ca+2abc+1.$$

Ta cần đi chứng minh.

$4\left(a^2+b^2+c^2\right)+4ab+4bc+4ca+2abc+1-9\left(ab+bc+ca\right)\ge 0$.

$\Leftrightarrow 3\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\right)+\left[a^2+b^2+c^2+2abc+1-2\left(ab+bc+ca\right)\right]\ge 0$

(luôn đúng) do

$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\ge 0$ và $a^2+b^2+c^2+2abc+1-2\left(ab+bc+ca\right)\ge 0$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài tập tương tự

Cho a,b,c là các số thực không âm. Chứng minh

$$abc+3\left(a^2+b^2+c^2\right)+11\ge 7\left(a+b+c\right).$$

Bài 14. Viết lại bất đẳng thức dưới dạng

$$x^2-2x\left(\cos B+\cos C\right)+2\left(1-\cos A\right)\ge 0.$$

Ta có $\Delta'_x=\left(\cos B+\cos C\right)^2-2\left(1-\cos A\right)=4\sin^2\frac{A}{2}\left(\cos^2\frac{B-C}{2}-1\right)\le 0$.

Do đó bất đẳng thức được chứng minh.

Bài 15. Chú ý

$\Delta'_x=\left(\sin y+\cos y\right)^2-\left(1+\sin^2 y\right)\left(1+\cos^2 y\right)=-\left(1-\sin y\cos y\right)^2<0$.

Bài 16. Chú ý $\Delta_x=-\left(\sqrt{3}y-1\right)^2\le 0\Rightarrow dpcm$.

Bài 17. Chú ý $\Delta'_x=-\left(y\sin C-z\cos B\right)^2\le 0$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\dfrac{x}{\sin A}=\dfrac{y}{\sin B}=\dfrac{z}{\sin C}$.

Bài 18. Không mất tính tổng quát giả sử $z=\min\left\{x,y,z\right\}\Rightarrow z\le 1$. Khi đó

$x=\dfrac{4-yz}{y+z+yz}$.

Ta cần chứng minh $\dfrac{4-yz}{y+z+yz}+y+z\ge\left(y+z\right).\dfrac{4-yz}{y+z+yz}+yz$

$$\Leftrightarrow\left(1+z-z^2\right)y^2+\left(z^2+z-4\right)y+\left(z-2\right)^2\ge 0$$

$$\Delta_y=\left(z^2+z-4\right)^2-4\left(1+z-z^2\right)\left(z-2\right)^2=z\left(z-1\right)^2\left(5z-8\right)\le 0$$

Bài toán được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$ hoặc $x=y=2,z=0$ hoặc các hoán vị.(xem thêm kỹ thuật phản chứng).

Bài 19. Đặt $f(x)=x^2-(a+c)x+ac=0$ có 2 nghiệm a,c

Mà: $a\le b\le c\Rightarrow f(b)\le 0\Leftrightarrow b^2-(a+c)b+ac\le 0$

$$\Leftrightarrow b+\frac{ac}{b}\le a+c\Leftrightarrow yb+ac\frac{y}{b}\le (a+c)y$$

$$\Rightarrow \left(xa+ac\frac{x}{a}\right)+(yb+ac\frac{y}{b})+(zc+ac\frac{z}{c})\le (a+c)x+(a+c)y+(a+c)z$$

$$\Rightarrow xa+yb+zc+ac\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)\le (a+c)(x+y+z)$$

Theo bất đẳng thức AM – GM ta có

$$\Rightarrow 2\sqrt{(xa+yb+zc)ac\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)}\le (a+c)(x+y+z)$$

$$\Leftrightarrow 4(xa+yb+zc)ac\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)\le (a+c)^2(x+y+z)^2$$

$$\Leftrightarrow (xa+yb+zc)ac\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)\le \frac{(a+c)^2}{4ac}(x+y+z)^2\ (đpcm)$$

Bài 20. Thay $d=3-c$ vào biểu thức vế trái được tam thức bậc hai của c

$$f(c)=ac+b(3-c)+c(3-c)=-c^2-c(b-a-3)+3b$$

$$\le f\left(\frac{3+a-b}{2}\right)=\frac{12b+(a-b+3)^2}{4}$$

Ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{12b+(a-b+3)^2}{4}\le\frac{9+6\sqrt{2}}{4}\Leftrightarrow 6(a+b)-2ab\le 6\sqrt{2}-1$$

$$\Leftrightarrow 6(a+b)-\left[(a+b)^2-1\right]\le 6\sqrt{2}-1 .$$

$$\Leftrightarrow (a+b-\sqrt{2})(a+b+6\sqrt{2})\ge 0$$

Bất đẳng thức cuối đúng do $|a+b|\le\sqrt{2(a^2+b^2)}=\sqrt{2}$.

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$a=b=\dfrac{1}{\sqrt{2}},c=d=\dfrac{3}{2}$.

Bài 21. Ta chứng minh

$$P=\frac{x}{2x+3y}+\frac{y}{y+z}+\frac{z}{z+x}\ge\frac{34}{33}$$

$$\Leftrightarrow(31x-3y)z^2+\left(96y^2-35x^2-5xy\right)z+31x^2y-3xy^2\ge 0$$

Vế trái là tam thức bậc hai của z với hệ số của z^2 dương nên ta chỉ cần chứng minh

$$\left(96y^2-35x^2-5xy\right)^2-4(31x-3y)\left(31x^2y-3xy^2\right)\le 0$$

$$\Leftrightarrow(x-y)(x-4y)\left(1125x^2+2631xy+2304y^2\right)\le 0$$

Bất đẳng thức cuối đúng do $x-y\ge 0;x-4y\le 0$.

Nhận xét. Với cách làm này ta chỉ cần giả thiết bài toán là $x\ge y$.

Bài 22. Viết lại bất đẳng thức dưới dạng:

$$a^2+2(b+d-3c)a+(b+c+d)^2-8bd>0.$$

Vế trái là tam thức bậc hai của a đạt giá trị nhỏ nhất tại $3c-b-d$ giá trị nhỏ nhất này bằng

$$P_{\min}=(3c-b-d)^2-2(3c-b-d)^2+(b+c+d)^2-8bd$$

$$=(b+c+d)^2-(3c-b-d)^2-8bd$$

$$=8(b+d-c)c-8bd=-8\left[c^2-(b+d)c+bd\right]=-8(c-b)(c-d)>0$$

Bất đẳng thức được chứng minh.

Bài 23. Vì $p^2+q^2-a^2-b^2-c^2-d^2=\left(p^2-a^2-b^2\right)+\left(q^2-c^2-d^2\right)>0$ nên tồn tại ít nhất một trong hai số $p^2-a^2-b^2,\ q^2-c^2-d^2$ dương. Không mất tính tổng quát ta giả sử $p^2-a^2-b^2>0$.

Xét tam thức bậc hai

$$f(x)=\left(p^2-a^2-b^2\right)x^2-2(pq-ac-bd)x+\left(q^2-c^2-d^2\right).$$

Ta có: $p^2.f(q)=-(aq-pc)^2-(bq-pd)^2\le 0$ nên $f(x)$ luôn có nghiệm.

Suy ra $\Delta'_x\ge 0\Leftrightarrow(pq-ac-bd)^2\ge\left(p^2-a^2-b^2\right)\left(q^2-c^2-d^2\right)$.

Ta có điều phải chứng minh.

Tổng quát với n số thực thoả mãn điều kiện $a_1^2-a_2^2-...-a_n^2>0$ ta có

$$\left(a_1^2-a_2^2-...-a_n^2\right)\left(b_1^2-b_2^2-...-b_n^2\right)\le(a_1b_1-a_2b_2-...-a_nb_n)^2.$$

Bài 24. Thay $r=-p-q$ vào bất đẳng thức cần đưa về chứng minh:

$$a^2q(-p-q)+b^2(-p-q)p+c^2pq\le 0 \Leftrightarrow -a^2q^2+p\left(c^2-b^2-a^2\right)q-p^2b^2\le 0.$$

Coi vế trái bất đẳng thức trên là tam thức bậc hai của q ta được:

$$\Delta_q=p^2\left(c^2-b^2-a^2\right)^2-4p^2a^2b^2=p^2\left(c^2-b^2-a^2-2ab\right)\left(c^2-b^2-a^2+2ab\right)$$

$$=p^2\left(c^2-(a+b)^2\right)\left(c^2-(a-b)^2\right)\le 0$$

Do $c>|a-b|, c<a+b$. Vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài 25. Bất đẳng thức đã cho tương đương với:

$$a^2b^2+2\left(a^2+b^2\right)+4-3ab-3(a+b)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow a^2\left(b^2+2\right)-3a(b+1)+2b^2-3b+4\ge 0$$

Ta chỉ cần chứng minh rằng

$$\Delta_a=9(b+1)^2-4\left(b^2+2\right)\left(2b^2-3b+4\right)$$

$$=-(b-1)^2\left(8b^2+4b+23\right)\le 0$$

Bất đẳng thức cuối đúng.

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=1$.

CHỦ ĐỀ 7: KỸ THUẬT ĐÁNH GIÁ BẤT ĐẲNG THỨC TÍCH PHÂN

Dưới đây chỉ trình bày một số bài toán bất đẳng thức tích phân mà phương pháp giải chỉ thông qua các bất đẳng thức đại số rồi lấy tổng tích phân sẽ dẫn đến kết quả của bài toán.

Bất đẳng thức tích phân là bài toán khá hay để tìm hiểu thêm bạn đọc tìm đọc các Chuyên đề khác về bất đẳng thức tích phân trên Diễn đàn học tập trực tuyến Mathlinks.vn

A. NỘI DUNG PHƯƠNG PHÁP

Bài toán: Cho $f,g,h:[a,b]\to\mathbb{R}$ là các hàm khả tích trên $[a,b]$ đồng thời thỏa mãn điều kiện $g(x)\le f(x)\le h(x)$ với mọi $x\in[a,b]$ ta có

$$\int_a^b g(x)dx\le\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b h(x)dx.$$

Các bất đẳng thức phụ hay được sử dụng

- $\sin x<x$ và $x-\frac{x^3}{3!}<\sin x<x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}, \forall x>0.$

➢ $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}$ và $1 - \frac{x^2}{2} < \cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}, \forall x > 0$.

➢ $\frac{x}{x+1} < \ln(1+x) < x$.

Yêu cầu. Các bất đẳng thức đại số như Cô si, Cauchy – Schwarz,… cần nắm vững.

Như vậy dạng bất đẳng thức cơ bản của tích phân chính là quy bài toán về đánh giá bất đẳng thức trong dấu tích phân.

B. BÀI TẬP MẪU

Bài 1. [IMC 2011] Chứng minh rằng $\int_a^b (x^2+1)e^{-x^2}dx \ge e^{-a^2} - e^{-b^2}$ với mọi số thực $a < b$.

Lời giải

Với mọi số thực x ta luôn có $x^2 + 1 \ge 2x$ suy ra

$$\int_a^b (x^2+1)e^{-x^2}dx \ge \int_a^b 2xe^{-x^2}dx = e^{-a^2} - e^{-b^2}.$$

Bài toán được chứng minh hoàn toàn.

Bài 2. Chứng minh rằng $\int_0^1 \frac{x\sin x}{1+x\sin x}dx < 1 - \ln 2$.

Lời giải

Viết lại bất đẳng thức cần chứng minh dưới dạng: $\int_0^1 \frac{dx}{1+x\sin x} > \ln 2$.

Với mọi $x > 0 \Rightarrow \sin x < x \Rightarrow \int_0^1 \frac{dx}{1+x\sin x} > \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4} > l\text{n}\,2$.

Bài toán được chứng minh hoàn toàn.

Bài 3. Cho hàm số $f(x)$ được xác định bởi $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, x \in (0;1] \\ \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{x}, x = 0 \end{cases}$.

Chứng minh rằng $\frac{17}{18} < \int_0^1 f(x)dx < \frac{1703}{1800}$.

Lời giải

Rõ ràng với giả thiết hàm số $f(x)$ đã cho thì $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$.

Tiếp đến sử dụng bất đẳng thức phụ $x-\frac{x^3}{6}<\sin x<x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}, \forall x>0$, ta được $1-\frac{x^2}{6}<\frac{\sin x}{x}<1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}$.

Chuyển qua tích phân hai vế của bất đẳng thức trên ta được

$$\int_0^1\left(1-\frac{x^2}{6}\right)dx<\int_0^1\frac{\sin x}{x}dx<\int_0^1\left(1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}\right)dx \Leftrightarrow \frac{17}{18}<\int_0^1\frac{\sin x}{x}dx<\frac{1703}{1800}.$$

Bài toán được chứng minh hoàn toàn.

Bài 4. Chứng minh rằng $\frac{1}{2(n+1)}<\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n xdx<\frac{1}{2(n-1)}$ với mọi số nguyên dương $n\geq 2$.

Lời giải

Đặt $a_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n xdx$ với mọi $0\leq x\leq\frac{\pi}{4}\Rightarrow 0\leq\tan x\leq 1\Rightarrow\tan^n x\leq\tan^{n-1}x$

$\Rightarrow a_n\leq a_{n-1}$ tức dãy $\{a_n\}$ giảm.

Suy ra $a_{n+2}+a_n<2a_n<a_n+a_{n-2}$.

Mặt khác ta lại có $a_{n+2}+a_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\left(1+\tan^2 x\right)dx=\frac{1}{n+1}\tan^n x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{n+1}$

Và $a_{n-2}+a_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{n-2} x\left(1+\tan^2 x\right)dx=\frac{1}{n-1}\tan^{n-2} x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{n-1}$.

Từ đó suy ra $\frac{1}{2(n+1)}<a_n<\frac{1}{2(n-1)}$.

Vậy $\frac{1}{2(n+1)}<\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n xdx<\frac{1}{2(n-1)}, \forall n\geq 2$.

Từ chứng minh trên suy ra $\lim\limits_{n\to\infty} n\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n xdx=\frac{1}{2}$.

Bài 5. [VMC 1994] Xét tích phân $I_n = \int\limits_0^4 x^n \sqrt{4-x}dx, n \in \mathbb{N}^*$.

a) Tính I_n.

b) Chứng minh rằng $I_n < 2^{2n+3}(2ne)^{-\frac{1}{2}}$.

Lời giải

Ta có

$$I_n = \int\limits_0^4 x^n \sqrt{4-x}dx = 2^{2n+4}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} t \sin^2 tdt = 2^{2n+4}\left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} tdt - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+3} tdt\right)$$

với $x = 4\cos^2 t, t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Xét tích phân $J_m = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m tdt, m > 1$.

Tích phân từng phần ta được:

$$J_m = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m tdt = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{m-1} td(\sin t) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (m-1)\sin^2 t\cos^{m-2} tdt$$

$$= (m-1)\left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{m-2} tdt - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m tdt\right)$$

$\Rightarrow J_m = \frac{m-1}{m} J_{m-2}$. Ta có $J_1 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos tdt = 1$ suy ra

$$I_n = 2^{2n+4}\left(J_{2n+1} - J_{2n+3}\right) = 2^{2n+4}\left(\frac{2n}{2n+1}.\frac{2n-2}{2n-1}...\frac{2}{3}.1 - \frac{2n+2}{2n+3}.\frac{2n}{2n+1}...\frac{2}{3}.1\right)$$

$$= 2^{2n+4}\frac{2n(2n-2)...2}{(2n+1)(2n-1)...3}\left(1 - \frac{2n+2}{2n+3}\right) = 2^{2n+4}\frac{2n(2n-2)...2}{(2n+3)(2n+1)(2n-1)...3}.$$

Chứng minh $I_n < 2^{2n+3}(2ne)^{-\frac{1}{2}}$.

Đặt $x=4t$. Khi đó $I_n=2^{2n+3}\int\limits_0^1 t^n\sqrt{1-t}dt$ ta chứng minh $t^n\sqrt{1-t}<\frac{1}{\sqrt{2ne}}$ hay $t^{2n}(1-t)<\frac{1}{2ne}$.

Sử dụng bất đẳng thức AM – GM ta được:

$$t^{2n}(1-t)=(2n)^{2n}\left(\frac{t}{2n}\right)^{2n}(1-t)\le(2n)^{2n}\left(\frac{\frac{t}{2n}+\frac{t}{2n}+...+\frac{t}{2n}+1-t}{2n+1}\right)^{2n+1}=\frac{(2n)^{2n}}{(2n+1)^{2n+1}}.$$

Như vậy ta chứng minh

$$\frac{(2n)^{2n}}{(2n+1)^{2n+1}}<\frac{1}{2ne}\Leftrightarrow e<\left(\frac{2n+1}{2n}\right)^{2n+1}\Leftrightarrow 1<(2n+1)\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right).$$

Dễ dàng chứng minh được $\ln(1+x)>\frac{x}{x+1},\forall x>0$.

Từ đó ta có điều phải chứng minh.

Bài 6. Chứng minh rằng $\int\limits_{\pi}^{2\pi}\frac{|\sin nx|}{x}dx>\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{1+n}+\frac{1}{2+n}+...+\frac{1}{2n}\right)$.

Lời giải

Đặt $t=nx$. Khi đó $I_n=\int\limits_{\pi}^{2\pi}\frac{|\sin nx|}{x}dx=\int\limits_{n\pi}^{2n\pi}\frac{|\sin t|}{t}dt=\sum\limits_{k=n}^{2n-1}\int\limits_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{|\sin t|}{t}dt$.

$$>\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{(k+1)\pi}\int\limits_{k\pi}^{(k+1)\pi}|\sin t|dt=\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{2}{(k+1)\pi}.$$

Bài toán được chứng minh hoàn toàn.

Bài 7. Chứng minh rằng $\frac{6n^2+2n+1}{6n^2}<\int\limits_0^1\sqrt[n]{1+x}dx<\frac{2n+1}{2n}$ với mọi $n\in\mathbb{N},n\ge 2$.

Lời giải

Ta sẽ chứng minh

$$1+\frac{x}{n}-\frac{n(n-1)}{2n^2}x^2\le\sqrt[n]{1+x}\le 1+\frac{x}{n}\text{ với mọi } x\ge 0,n\in\mathbb{N}^* \qquad (1.1)$$

Khi đó lấy tích phân hai vế của (1.1) trên $[0,1]$ ta có điều phải chứng minh.

Thật vậy ta có $\int_0^1\left(1+\frac{x}{n}\right)dx=\left(x+\frac{x^2}{2n}\right)\Bigg|_0^1=1+\frac{1}{2n}=\frac{2n+1}{2n}$ và

$$\int_0^1\left(1+\frac{x}{n}-\frac{n-1}{2n^2}x^2\right)dx=\left(x+\frac{x^2}{2n}-\frac{(n-1)x^3}{6n^2}\right)\Bigg|_0^1=\frac{6n^2+3n-(n-1)}{6n^2}=\frac{6n^2+2n+1}{6n^2}.$$

Việc chứng minh bất đẳng thức (1.1) chỉ việc khảo sát hàm số.

Bình luận: Vì sao lời giải nghĩ đến việc chứng minh bất đẳng thức (1.1)?.

Đây là một kinh nghiệm khi giải toán, đó là dựa vào khai triển Taylor của hàm số $f(x)=\sqrt[n]{1+x}$ tại $x=0$ ta được

$$\sqrt[n]{1+x}=1+\frac{x}{n}-\frac{n(n-1)}{2n^2}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{6n^3}x^3+...$$

Cũng tư tưởng này với $\cos x=\frac{1}{2}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)$ và $\sin x=\frac{1}{2i}\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)$ và khai triển Taylor cho hàm e^x và ta có các bất đẳng thức sau đây.

$$x-\frac{x^3}{6}<\sin x<x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120} \text{ và } 1-\frac{x^2}{2}<\cos x<1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24} \text{ với mọi } x>0.$$

Lúc này chỉ việc lấy tích phân hai vế trên $[a,b],(0<a<b)$ ta có các bất đẳng thức hết sức thú vị.

Bài 8. Chứng minh rằng $\int_0^{\sqrt{2\pi}}\sin x^2dx>0$.

Lời giải

Trước tiên ta chứng minh: $\sin x\ge x-\frac{x^3}{6},\forall x\ge 0$

Thật vậy xét hàm số $f(x)=\sin x-x+\frac{x^3}{6}$ ta có

$$f'(x)=\cos x-1+\frac{x^2}{2}\Rightarrow f''(x)=-\sin x+x\Rightarrow f'''(x)=1-\cos x\ge 0.$$

Suy ra $f''(x)\ge f''(0)=0\Rightarrow f'(x)\ge f'(0)=0\Rightarrow f(x)\ge f(0)=0$.

Tức là $\sin x\ge x-\frac{x^3}{6},\forall x\ge 0$.

Suy ra

$$\int_0^{\sqrt{2\pi}}\sin x^2dx\ge\int_0^{\sqrt{2\pi}}\left(x^2-\frac{x^6}{6}\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^7}{42}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{2\pi}}=\frac{2\pi\sqrt{2\pi}}{3}-\frac{4\pi^3\sqrt{2\pi}}{21}=\frac{2\pi\sqrt{2\pi}}{3}\left(1-\frac{2\pi}{7}\right)>0.$$

Bài 9. Chứng minh rằng với mỗi n nguyên dương ta luôn có

$$\int_0^1 \frac{x^n+1}{x^n+x^{n-1}+...+x+1}dx \ge \frac{2}{n+1}.$$

Lời giải

Với mọi $k\in[0,n]$ và $x\in[0,1]$ ta có $\left(1-x^n\right)\left(1-x^{n-k}\right)\ge 0 \Rightarrow x^k+x^{n-k}\le x^n+1$.

Cho $k=0,1,2,...,n$ và cộng theo vế của $n+1$ bất đẳng trên theo vế, suy ra

$$2\left(x^n+x^{n-1}+...+x+1\right)\le(n+1)\left(x^n+1\right)\Rightarrow \frac{x^n+1}{x^n+x^{n-1}+...+x+1}\ge\frac{2}{n+1}.$$

Suy ra $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^n+1}{x^n+x^{n-1}+...+x+1}dx \ge \int_0^1 \frac{2}{n+1}dx=\frac{2}{n+1}$.

Bài toán được chứng minh hoàn toàn.

Bài 10. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\displaystyle I_n=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{8}}\left(\frac{\sin^{n+2}x}{\cos^n x}+\frac{\cos^{n+2}x}{\sin^n x}\right)dx$.

Lời giải

Với mọi $x\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{8}\right]\Rightarrow \cos x>0,\sin x>0$ khi đó ta có

$$\frac{\sin^{n+2}x}{\cos^n x}+\frac{\cos^{n+2}x}{\sin^n x}=\frac{2^n\left(\sin^{2(n+1)}x+\cos^{2(n+1)}x\right)}{\sin^n 2x}\ge 2^n\left(\sin^{2(n+1)}x+\cos^{2(n+1)}x\right).$$

Mặt khác hàm $f(n)=a^{n+1}$ là hàm lồi nên ta có

$$f\left(\sin^2 x\right)+f\left(\cos^2 x\right)=\sin^{2(n+1)}x+\cos^{2(n+1)}x$$

$$\ge 2f\left(\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{2}\right)=2\left(\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{2}\right)^{n+1}=\frac{1}{2^n}$$

Suy ra

$$2^n\left(\sin^{2(n+1)}x+\cos^{2(n+1)}x\right)\ge 1\Rightarrow I_n=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{8}}\left(\frac{\sin^{n+2}x}{\cos^n x}+\frac{\cos^{n+2}x}{\sin^n x}\right)dx\ge\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{8}}dx=\frac{\pi}{8}.$$

Bài 11. Với mọi số thực $a_i, i=1,2,...,n$. Chứng minh rằng

$$\sum_{1\le i\le n,1\le j\le n}\frac{a_ia_j}{i+j+1}\ge 0.$$

Lời giải

Xét đa thức $f(x)=\sum_{i=1}^{n}a_ix^i$ ta có $f^2(x)=\left(\sum_{i=1}^{n}a_ix^i\right)^2=\sum_{1\le i\le n,1\le j\le n}a_ia_jx^{i+j}$.

Đến đây lấy tích phân hai vế trên $[0,1]$ ta có điều phải chứng minh.

C. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1. Chứng minh rằng

a) $2\sqrt{3}<\int_{-2}^{0}\sqrt{x^3-\frac{3x^2}{2}-6x+5}dx<\sqrt{34}$.

b) $\frac{\pi}{6}\le\int_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{4-x^2-x^3}}\le\frac{\pi\sqrt{2}}{8}$.

c) $\frac{1}{2}\le\int_{0}^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt{1-x^{2n}}}\le\frac{\pi}{6},\forall n\in\mathbb{N}^*$.

d) $\int_{0}^{\pi}e^{\sin^2x}dx>\frac{3\pi}{2}$.

e) $\frac{1}{2\cos 1}\int_{1}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}dx\le\frac{\ln\pi-\ln 2}{\pi-2}$.

f) $\int_{1}^{\sqrt{3}}\frac{e^{-x}\sin x}{x^2+1}dx\le\frac{\pi}{12e}$.

Bài 2. Chứng minh rằng với mọi $x>0$ ta luôn có

$$e^x-1<\int_{0}^{x}\sqrt{e^{2t}+e^{-t}}dt<\sqrt{\left(e^x-1\right)\left(e^x-\frac{1}{2}\right)}.$$

Bài 3. Chứng minh rằng $\frac{5}{6}<\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}dx<\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Bài 4. Chứng minh rằng $\int_{1}^{e}\frac{(\ln x)^{2013}}{x^2}dx>\frac{1}{2014.2015.2016}$.

Bài 5. Chứng minh rằng $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(\cos x)^{\sin x}}{(\cos x)^{\sin x}+(\sin x)^{\cos x}}dx<1$.

Bài 6. Cho $0<a\le b$ chứng minh rằng

a) $\int_{a}^{b}\frac{x^2+x+1}{(x+2)^5}dx\le\frac{1}{54}\ln\frac{2b+1}{2a+1}$.

b) $\int_{a}^{b}\frac{x^4+x^2+1}{\left(x^2+3x+2\right)^5}dx\le\frac{1}{2916}\ln\frac{(2b-1)(2a+1)}{(2a-1)(2b+1)}$.

Bài 7. Chứng minh rằng $1+\frac{e-2}{n} \le \int_0^1 e^{x^n} dx \le 1+\frac{e-1}{n}$ với $n \in \mathbb{N}^*$.

Bài 8. Chứng minh rằng $\int_0^1 \sqrt{1+x^2 \ln^2(x+1)}\,dx \ge \sqrt{\frac{17}{16}}$.

Bài 9. Với mọi số nguyên dương n. Chứng minh rằng $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx > \frac{\pi}{2n\pi+4}$.

Bài 10. Chứng minh rằng $\frac{\pi}{2} < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}} dx < \frac{\pi}{2\sqrt{1-k^2}}$ với mọi $k \in (0,1)$.

Bài 11. Chứng minh rằng $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\left(\frac{\sin nx}{\sin x}\right)^4 dx < \frac{n^2\pi^2}{8}$ với $n \ge 1$.

Bài 12. Với mọi số nguyên dương $n \ge 2$.

Chứng minh rằng $\frac{n+2}{n+1} < \int_0^1 e^{x^n} dx < \frac{e+n}{n+1}$.

Bài 13. Với $k \ge 0$ chứng minh rằng $\int_0^1 \left(x-x^2\right)^k dx \le \frac{2}{4^k\sqrt{k+1}+2k+1}$.

$$I_n > \frac{1}{2\ln 2n}, n \ge 2.$$

Bài 14. Cho các số thực dương $a_1, a_2, ..., a_N$.

Chứng minh rằng $\sum_{m=0}^{N}\sum_{n=0}^{N} \frac{a_m a_n}{m+n+1} \le \pi \sum_{k=1}^{N} a_k^2$.

Chương 2:

BẤT ĐẲNG THỨC VÀ PHƯƠNG PHÁP TIẾP CẬN

CHỦ ĐỀ 1:

CÁC KỸ THUẬT SỬ DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC AM – GM CƠ BẢN

A. NỘI DUNG PHƯƠNG PHÁP

I. Bất đẳng thức Cô si (AM-GM) cho 2 số không âm

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b$.

Các dạng tương đương của bất đẳng thức trên

$$ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \text{ và } a^2+b^2 \geq \frac{(a+b)^2}{2}.$$

Ví dụ 1. Chứng minh rằng với mọi số thực dương a và b ta có

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}.$$

Lời giải. Sử dụng bất đẳng thức AM-GM cho 2 số ta có

$$(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \geq 2\sqrt{ab}.\frac{2}{\sqrt{ab}}=4.$$

Do đó $\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b$.

II. Bất đẳng thức Cô si (AM-GM) cho 3 số không âm

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Các dạng tương đương của bất đẳng thức trên

$$abc \leq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3.$$

Ví dụ 2. Chứng minh rằng với mọi số thực dương a,b,c ta có

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c}.$$

Lời giải. Sử dụng bất đẳng thức AM-GM cho 3 số dương ta có

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \ge 3\sqrt[3]{abc}.\frac{3}{\sqrt[3]{abc}} = 9.$$

Do đó $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \ge \frac{9}{a+b+c}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

III. Bất đẳng thức Cô si (AM-GM) cho n số không âm

$$\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n} \ge \sqrt[n]{a_1a_2...a_n}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = ... = a_n$.

1. Các bất đẳng thức hay sử dụng

Trước tiên nhắc lại một số bất đẳng thức hay được sử dụng

$$a^2+b^2 \ge \frac{1}{2}(a+b)^2; (a+b)^2 \ge 4ab$$

$$a^2+b^2+c^2 \ge ab+bc+ca; a^2+b^2+c^2 \ge \frac{1}{3}(a+b+c)^2$$

$$(a+b+c)^2 \ge 3(ab+bc+ca); (ab+bc+ca)^2 \ge 3abc(a+b+c)$$

$$(a+b)(b+c)(c+a) \ge \frac{8}{9}(a+b+c)(ab+bc+ca) \quad (1)$$

$$a^2b+b^2c+c^2a+abc \le \frac{4}{27}(a+b+c)^3 \quad (2)$$

Chứng minh (1) và (2) xem bên dưới

2. Kỹ thuật đánh giá trung bình cộng qua trung bình nhân

Giả thiết bài toán thường cho tích của các số

Sử dụng bất đẳng thức AM – GM cho n số dạng

$$\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n} \ge \sqrt[n]{a_1a_2...a_n}.$$

Ví dụ 1. Chứng minh với mọi a,b,c là các số thực ta có

$$\left(a^2+b^2\right)\left(b^2+c^2\right)\left(c^2+a^2\right) \ge 8a^2b^2c^2.$$

Lời giải

Ta có

$$a^2+b^2 \ge 2\sqrt{a^2b^2} = 2|ab|$$

$$b^2+c^2 \ge 2\sqrt{b^2c^2} = 2|bc|$$

$$c^2+a^2 \ge 2\sqrt{c^2a^2} = 2|ca|$$

Nhân theo vế 3 bất đẳng thức trên ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 2. (TSĐH Khối D 2005) Cho x,y,z là các số thực dương thoả mãn điều kiện $xyz=1$. Chứng minh rằng $\frac{\sqrt{1+x^3+y^3}}{xy}+\frac{\sqrt{1+y^3+z^3}}{yz}+\frac{\sqrt{1+z^3+x^3}}{zx}\ge 3\sqrt{3}$.

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức AM – GM cho 3 số dương ta được

$$\frac{\sqrt{1+x^3+y^3}}{xy}\ge\frac{\sqrt{3\sqrt[3]{x^3y^3.1}}}{xy}=\sqrt{\frac{3}{xy}}$$

$$\frac{\sqrt{1+y^3+z^3}}{yz}\ge\frac{\sqrt{3\sqrt[3]{y^3z^3.1}}}{yz}=\sqrt{\frac{3}{yz}}$$

$$\frac{\sqrt{1+z^3+x^3}}{zx}\ge\frac{\sqrt{3\sqrt[3]{z^3x^3.1}}}{zx}=\sqrt{\frac{3}{zx}}$$

Cộng theo vế 3 bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{\sqrt{1+x^3+y^3}}{xy}+\frac{\sqrt{1+y^3+z^3}}{yz}+\frac{\sqrt{1+z^3+x^3}}{zx}\ge\sqrt{3}\left(\frac{1}{\sqrt{xy}}+\frac{1}{\sqrt{yz}}+\frac{1}{\sqrt{zx}}\right).$$

Mặt khác AM – GM cho 3 số dương ta được

$$\frac{1}{\sqrt{xy}}+\frac{1}{\sqrt{yz}}+\frac{1}{\sqrt{zx}}\ge 3\sqrt[3]{\frac{1}{\sqrt{xy}}.\frac{1}{\sqrt{yz}}.\frac{1}{\sqrt{zx}}}=3.$$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$.

Ví dụ 3. Cho a,b,c là các số thực dương có tổng bằng 3.

Chứng minh rằng $\sqrt{a(b+c)}+\sqrt{b(c+a)}+\sqrt{c(a+b)}\ge 3\sqrt{2abc}$.

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức AM – GM ta có

$$\sqrt{a(b+c)}+\sqrt{b(c+a)}+\sqrt{c(a+b)}\ge 3\sqrt[6]{abc(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

Mặt khác $abc\le\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3=1$.

$$(a+b)(b+c)(c+a)\ge 8abc$$

Suy ra

$$\sqrt{a(b+c)}+\sqrt{b(c+a)}+\sqrt{c(a+b)}\ge 3\sqrt[6]{8a^2b^2c^2}\ge 3\sqrt[6]{8a^3b^3c^3}=3\sqrt{2abc}.$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Ví dụ 4. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều $a > b; a + b + c = 4$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 4a + 3b + \dfrac{c^3}{(a-b)b}$.

Lời giải

Chú ý điều kiện $a + b + c = 4, a > b, c^3$ ta sẽ tách P thành tổng của các số dương để sử dụng AM – GM sao cho mất đi (a-b) và xuất hiện tổng (a+b+c) vế phải.

Sử dụng bất đẳng thức AM – GM cho ba số dương ta có

$$P = 4a + 3b + \frac{c^3}{(a-b)b} = (a-b) + b + \frac{c^3}{(a-b)b} + 3(a+b)$$

$$\geq 3\sqrt[3]{(a-b).b.\frac{c^3}{(a-b)b}} + 3(a+b) = 3(a+b+c) = 12$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} a - b = b = \dfrac{c^3}{(a-b)b} \\ a + b + c = 4 \end{cases} \Leftrightarrow a = 2; b = c = 1$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 12.

Bài tập tương tự

Cho $a > b > c > 0$ chứng minh $a + \dfrac{108}{(a-b)^3(b-c)^2 c} \geq 7$.

Ví dụ 5. (IMO 2012) Cho $a_2, a_3, ..., a_n$ là các số thực dương thoả mãn điều kiện $a_2 a_3 ... a_n = 1$. Chứng minh rằng $(1+a_2)^2(1+a_3)^3...(1+a_n)^n > n^n$.

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức AM –GM ta có

$$(a_k + 1)^k = \left(a_k + \underbrace{\frac{1}{k-1} + \frac{1}{k-1} + ... + \frac{1}{k-1}}_{(k-1)\text{ times}}\right)^k \geq k^k.a_k.\frac{1}{(k-1)^{k-1}}, k = \overline{2,n}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_k = \dfrac{1}{k-1}, k = \overline{2,n}$.

Khi đó $a_2 a_3 ... a_n = \dfrac{1}{(n-1)!} = 1$, vô lý. Vậy dấu bằng không xảy ra khi đó

Nhân theo vế (n – 1) bất đẳng thức trên ta được:

$$(1+a_2)^2(1+a_3)^3...(1+a_n)^n > \frac{2^2}{1^1}.\frac{3^3}{2^2}...\frac{n^n}{(n-1)^{n-1}}.a_2 a_3 ... a_n = n^n.$$

Bất đẳng thức được chứng minh.

Ví dụ 6. Cho x,y,z là các số thực chứng minh

$$-\frac{1}{8} \le \frac{(x+y)(y+z)(z+x)(1-xy)(1-yz)(1-zx)}{(1+x^2)^2(1+y^2)^2(1+z^2)^2} \le \frac{1}{8}.$$

Lời giải

Sử dụng đẳng thức và bất đẳng thức AM – GM cho hai số ta có

$$(1+x^2)(1+y^2) = (x+y)^2 + (xy-1)^2 \ge 2\left|(x+y)(xy-1)\right|$$

$$(1+y^2)(1+z^2) = (y+z)^2 + (yz-1)^2 \ge 2\left|(y+z)(zyz-1)\right|$$

$$(1+z^2)(1+x^2) = (z+x)^2 + (zx-1)^2 \ge 2\left|(z+x)(zx-1)\right|$$

Nhân theo vế ba bất đẳng thức trên ta được

$$8\left|(x+y)(y+z)(z+x)(1-xy)(1-yz)(1-zx)\right| \le (1+x^2)^2(1+y^2)^2(1+z^2)^2$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{8} \le \frac{(x+y)(y+z)(z+x)(1-xy)(1-yz)(1-zx)}{(1+x^2)^2(1+y^2)^2(1+z^2)^2} \le \frac{1}{8}$$

Bất đẳng thức được chứng minh.

Bài tập tương tự

Cho x,y là hai số thực. Chứng minh $-\frac{1}{2} \le \frac{(x+y)(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)} \le \frac{1}{2}$.

Ví dụ 7. Cho x,y,z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $x \ge \max\{y,z\}$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x}{y} + 2\sqrt{1+\frac{y}{z}} + 3\sqrt[3]{1+\frac{z}{x}}$.

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức AM – GM ta có

$$P \ge \frac{x}{y} + 2\sqrt{2\sqrt{\frac{y}{z}}} + 3\sqrt[3]{2\sqrt{\frac{z}{x}}} = \frac{x}{y} + 2\sqrt{2}\sqrt[4]{\frac{y}{z}} + 3\sqrt[3]{2}\sqrt[6]{\frac{z}{x}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{x}{y} + 4\sqrt[4]{\frac{y}{z}} + 6\sqrt[6]{\frac{z}{x}}\right) + \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\frac{x}{y} - 3\left(\sqrt{2} - \sqrt[3]{2}\right)\sqrt[6]{\frac{z}{x}}$$

Sử dụng bất đẳng thức AM – GM ta có

$$\frac{x}{y} + 4\sqrt[4]{\frac{y}{z}} + 6\sqrt[6]{\frac{z}{x}} \ge 11\sqrt[11]{\frac{x}{y}\left(\sqrt[4]{\frac{y}{z}}\right)^4\left(\sqrt[6]{\frac{z}{x}}\right)^6} = 11.$$

Chú ý giả thiết bài toán ta có

$$\frac{x}{y}\ge 1;\ \frac{z}{x}\le 1\Rightarrow\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\frac{x}{y}\ge 1-\frac{\sqrt{2}}{2};-3\left(\sqrt{2}-\sqrt[3]{2}\right)\sqrt[6]{\frac{z}{x}}\ge -3\left(\sqrt{2}-\sqrt[3]{2}\right).$$

Từ đó suy ra $P\ge 11.\frac{\sqrt{2}}{2}+\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-3\left(\sqrt{2}-\sqrt[3]{2}\right)=1+2\sqrt{2}+3\sqrt[3]{2}$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $1+2\sqrt{2}+3\sqrt[3]{2}$.

Bài tập tương tự

Cho x,y,z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $x\ge \max\{y,z\}$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{x}{y}+2\sqrt{1+\frac{y}{z}}+4\sqrt[4]{1+\frac{z}{x}}$.

3. Đánh giá trung bình nhân qua trung bình cộng

Sử dụng bất đẳng thức AM – GM theo chiều $\sqrt[n]{a_1a_2...a_n}\le\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}$.

Ta có 2 hướng xử lý

+ Đánh giá trực tiếp.
+ Nhân thêm hằng số mục đích lược bỏ biến hoặc hằng số không thích hợp.

Nhận dạng bất đẳng thức có dạng: $\sqrt[m]{A_1}+\sqrt[m]{A_2}+...+\sqrt[m]{A_n}\le B$.

Khi đó áp dụng bất đẳng thức AM – GM theo chiều trung bình nhân qua trung bình cộng cho mỗi căn thức vế trái.

Ví dụ 1. Chứng minh rằng với mọi $a,b\ge 1$ ta có $a\sqrt{b-1}+b\sqrt{a-1}\le ab$.

Lời giải

Nhận xét. Vế phải không chứa hằng số do vậy sử dụng AM – GM để triệt tiêu các số –1 trong 2 căn thức do đó nhân thêm vào mỗi căn với 1.

Sử dụng bất đẳng thức AM – GM ta có

$$a\sqrt{b-1}=a\sqrt{(b-1).1}\le a.\frac{b-1+1}{2}=\frac{ab}{2}$$

$$b\sqrt{a-1}=b\sqrt{(a-1).1}\le b.\frac{a-1+1}{2}=\frac{ab}{2}$$

Cộng theo vế 2 bất đẳng thức trên ta có điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=2$.

Bài tập tương tự

1) Chứng minh rằng $x\sqrt{12-y}+\sqrt{y\left(12-x^2\right)}\le 12$ với x, y là các số thực để các căn thức có nghĩa.

2) Cho x,y là hai số thực thoả mãn điều kiện $x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}=1$.

Chứng minh rằng : $x^2 + y^2 = 1$.

Ví dụ 2. Cho $\begin{cases} 0 \le x \le 3 \\ 0 \le y \le 4 \end{cases}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = (3-x)(4-y)(2x+3y).$$

Lời giải

Nhận xét. Ta cần triệt tiêu đi x và y vì vậy nhân thêm vào $(3-x)$ và $(4-y)$ lần lượt thành $2(3-x), 3(4-y)$ khi đó sử dụng AM – GM cho 3 số dương.

Sử dụng bất đẳng thức AM – GM cho 3 số không âm ta được

$$P = \frac{1}{6}\left[2(3-x)\right].\left[3(4-y)\right].(2x+3y)$$

$$\le \frac{1}{6}\left(\frac{2(3-x)+3(4-y)+(2x+3y)}{3}\right)^3 = 36$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 0, y = 2$. Vậy giá trị lớn nhất của P bằng 36.

Bài tập tương tự

Cho $0 \le x \le \frac{5}{2}, 0 \le y \le 3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$P = (5-2x)(3-y)(2x+3y-5)$.

Ví dụ 3. Cho *a,b,c* là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $a+b+c=1$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = (a+2b+3c)(6a+3b+2c)$.

Lời giải

Với các hệ số lệch nhau trước tiên giảm biến bằng phép thế $c = 1-a-b.$ Khi đó đưa về $P = (3-2a-b)(2+4a+b)$.

Ta thấy nếu áp dụng trực tiếp AM – GM cho hai số triệt tiêu được b tuy nhiên còn dư 2a không đánh giá được vì vậy nghĩ đến triệt tiêu a bằng cách nhân thêm 2 vào $(3-2a-b)$.

Ta có: $P = \left(a+2b+3(1-a-b)\right)\left(6a+3b+2(1-a-b)\right)$

$$= (3-2a-b)(2+4a+b) = 2(3-2a-b)\left(1+2a+\frac{b}{2}\right)$$

$$\le 2\left(\frac{3-2a-b+1+2a+\frac{b}{2}}{2}\right)^2 = 2.\left(\frac{4-\frac{b}{2}}{2}\right)^2 = 8$$

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng 8 đạt tại $a = c = \frac{1}{2}, b = 0$.

Ví dụ 4. Cho a,b,c là các số thực không âm có tổng bằng 3.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=(5a+b)(b^2+4ac)$.

Lời giải

Ta có: $5a+b\le 5(a+\frac{b}{2});b^2+4ac=b^2+2(ab+bc)+4ac=4(a+\frac{b}{2})(c+\frac{b}{2})$.

Sử dụng bất đẳng thức AM – GM ta có:

$P\le 10(a+\frac{b}{2})^2(2c+b)\le 10(\frac{2a+2b+2c}{3})^3=80$.

Dấu bằng xẩy ra khi $b=0;a=2c=2$.

Ví dụ 5. Chứng minh rằng với mọi số thực dương a và b ta có

$$\sqrt{2a\left(a+b\right)^3}+b\sqrt{2\left(a^2+b^2\right)}\le 3\left(a^2+b^2\right).$$

Lời giải

Trước hết chuyển bất đẳng thức về dạng một biến bằng cách chia hai vế bất đẳng thức cho b^2 và đưa về chứng minh bất đẳng thức:

$$\sqrt{2x\left(x+1\right)^3}+\sqrt{2\left(x^2+1\right)}\le 3\left(x^2+1\right).$$

Chú ý dấu bằng đạt tại $x=1$ và bậc vế phải là bậc hai do vậy ta cần tách $2x\left(x+1\right)^3=2x\left(x+1\right).\left(x+1\right)^2$ để sử dụng bất đẳng thức AM – GM thuận tiện cho việc so sánh với vế phải.

Sử dụng bất đẳng thức AM – GM ta có

$$\sqrt{2x\left(x+1\right)^3}=\sqrt{2x\left(x+1\right).\left(x+1\right)^2}\le\frac{2x\left(x+1\right)+\left(x+1\right)^2}{2}$$

$$\sqrt{2\left(x^2+1\right)}\le\frac{2+x^2+1}{2}$$

Cộng theo vế hai bất đẳng thức trên ta được

$$\sqrt{2x\left(x+1\right)^3}+\sqrt{2\left(x^2+1\right)}\le\frac{\left(x+1\right)^2+2x\left(x+1\right)+x^2+3}{2}.$$

Vậy ta chỉ cần chứng minh

$$3\left(x^2+1\right)\ge\frac{\left(x+1\right)^2+2x\left(x+1\right)+x^2+3}{2}$$

$$\Leftrightarrow 6\left(x^2+1\right)\ge 4x^2+4x+4\Leftrightarrow\Leftrightarrow 2\left(x-1\right)^2\ge 0$$

Bất đẳng thức cuối đúng và ta có đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b$.

Ví dụ 6. Cho a,b,c là các số thực dương chứng minh

$$81abc\left(a^2+b^2+c^2\right)\le\left(a+b+c\right)^5.$$

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức $3abc\left(a+b+c\right)\le\left(ab+bc+ca\right)^2$.

Ta chỉ cần chứng minh $27\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(ab+bc+ca\right)^2\le\left(a+b+c\right)^6$.

Thật vậy sử dụng bất đẳng thức AM – GM cho ba số dương ta được

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(ab+bc+ca\right)^2\le\left(\frac{a^2+b^2+c^2+2\left(ab+bc+ca\right)}{3}\right)^3=\frac{1}{27}\left(a+b+c\right)^6.$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bài tập tương tự

Cho a,b,c là các số thực dương có tích bằng 1. Chứng minh

$$\frac{a+b+c}{3}\ge\sqrt[5]{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}.$$

Ví dụ 7. Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$a+\sqrt[3]{ab.\frac{a+b}{2}}+\sqrt[3]{abc}\le3\sqrt[3]{a.\frac{a+b}{2}.\frac{a+b+c}{3}}.$$

Lời giải

Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$\sqrt[3]{\frac{6a^2}{\left(a+b\right)\left(a+b+c\right)}}+\sqrt[3]{\frac{3b}{a+b+c}}+\sqrt[3]{\frac{6bc}{\left(a+b\right)\left(a+b+c\right)}}\le3.$$

Sử dụng bất đẳng thức AM – GM cho ba số dương ta có

$$\sqrt[3]{\frac{6a^2}{\left(a+b\right)\left(a+b+c\right)}}=\sqrt[3]{1.\frac{2a}{a+b}.\frac{3a}{a+b+c}}\le\frac{1}{3}\left(1+\frac{2a}{a+b}+\frac{3a}{a+b+c}\right)$$

$$\sqrt[3]{\frac{3b}{a+b+c}}=\sqrt[3]{1.1.\frac{3b}{a+b+c}}\le\frac{1}{3}\left(1+1+\frac{3b}{a+b+c}\right)$$

$$\sqrt[3]{\frac{6bc}{\left(a+b\right)\left(a+b+c\right)}}=\sqrt[3]{1.\frac{2b}{a+b}.\frac{3c}{a+b+c}}\le\frac{1}{3}\left(1+\frac{2b}{a+b}+\frac{3c}{a+b+c}\right)$$

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bài tập tương tự

1) Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh

$$\frac{a+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{abc}}{3}\le\sqrt[3]{a.\frac{a+b}{2}.\frac{a+b+c}{3}}.$$

2) Cho a,b,c,d là các số thực dương. Chứng minh

$$2\sqrt{\frac{3a}{a+b+c}}+3\sqrt[3]{\frac{bc}{(a+b)(a+b+c+d)}}+4\sqrt[4]{\frac{2b^3d}{81(a+b)^3(a+b+c+d)}}\le\frac{25}{6}.$$

Ví dụ 7. Chứng minh rằng với mọi x,y,z không âm ta có

$$yz\sqrt[3]{\frac{y^3+z^3}{2}}+zx\sqrt[3]{\frac{z^3+x^3}{2}}+xy\sqrt[3]{\frac{x^3+y^3}{2}}\le\frac{(x+y)^3+(y+z)^3+(z+x)^3}{8}.$$

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức AM – GM ta có

$$yz\sqrt[3]{\frac{y^3+z^3}{2}}=\sqrt[3]{\frac{y+z}{2}.yz.yz.yz.\left(y^2-yz+z^2\right)}$$

$$\le\sqrt[3]{\frac{y+z}{2}.\left(\frac{3yz+y^2-yz+z^2}{4}\right)^4}=\left(\frac{y+z}{2}\right)^3$$

Tương tự ta có $zx\sqrt[3]{\frac{z^3+x^3}{2}}\le\left(\frac{z+x}{2}\right)^3;xy\sqrt[3]{\frac{x^3+y^3}{2}}\le\left(\frac{x+y}{2}\right)^3$.

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z$.

Ví dụ 8. Cho a,b,c là các số thực không âm chứng minh rằng

$$(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2\ge4\left(a^2+bc\right)\left(b^2+ca\right)\left(c^2+ab\right).$$

Lời giải

Không mất tính tổng quát giả sử $a\ge b\ge c$. Khi đó $a^2+bc\le a^2+ac\le(a+c)^2$.

Vậy ta chứng minh $(a+b)^2(b+c)^2\ge4\left(b^2+ca\right)\left(c^2+ab\right)$.

Thật vậy sử dụng bất đẳng thức AM – GM ta có

$$4\left(b^2+ca\right)\left(c^2+ab\right)\le\left(b^2+ca+c^2+ab\right)^2$$

$$=\left(b^2+ab+bc+ca+c^2-bc\right)^2$$

$$=\left((b+a)(b+c)+c(c-b)\right)^2$$

$$\le(b+a)^2(b+c)^2$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b,c=0$ hoặc các hoán vị.

Bài tập tương tự

Cho a,b,c là các số thực không âm thoả mãn điều kiện

$$\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)=2$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\left(a^2+bc\right)\left(b^2+ca\right)\left(c^2+ab\right)$.

Ví dụ 9. Cho a, b, c là các số thuộc đoạn [0, 1].

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = \left(a-b\right)\left(b-c\right)\left(c-a\right)\left(a+b+c\right)$.

Lời giải

Giả sử $a=\max\left\{a,b,c\right\}$.

Nếu $a\ge b\ge c\Rightarrow A\le 0$.

Nếu $a\ge c\ge b$.

Khi đó $A\le \dfrac{2(c-b)\cdot(1+\sqrt{3})(a-c)\cdot(-1+\sqrt{3})(a+b+c)}{4}$.

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM cho ba số dương ta có :

$$2(c-b)\cdot(1+\sqrt{3})(a-c)\cdot(-1+\sqrt{3})(a+b+c)$$

$$\le\left[\frac{2\left(c-b\right)+\left(1+\sqrt{3}\right)\left(a-c\right)+\left(-1+\sqrt{3}\right)\left(a+b+c\right)}{3}\right]^3.$$

$$=\left(\frac{-3b+2\sqrt{3}a+\sqrt{3}b}{3}\right)^3\le\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^3=\frac{8\sqrt{3}}{9}$$

Suy ra $P_{\max}=\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$ tại $(a,b,c)=(1,0,\dfrac{1}{\sqrt{3}})$.

Chú ý. Ta có thể mở rộng đoạn [0;1] và giải bài toán bằng tính đơn điệu của hàm số(xem chương 3).

4. Kỹ thuật ghép cặp

Xem chi tiết trong chủ đề sau

Ví dụ 1. Cho a,b,c là các số thực dương có tổng bằng 1. Chứng minh

$$\frac{a+bc}{b+c}+\frac{b+ca}{c+a}+\frac{c+ab}{a+b}\ge 2.$$

Lời giải

Chú ý điều kiện tổng bằng 1 ta có

$$\frac{a+bc}{b+c}+\frac{b+ca}{c+a}+\frac{c+ab}{a+b}=$$

$$=\frac{a\left(a+b+c\right)+bc}{b+c}+\frac{b\left(a+b+c\right)+ca}{c+a}+\frac{c\left(c+a+b\right)+ab}{a+b}$$

$$=\frac{\left(a+b\right)\left(a+c\right)}{b+c}+\frac{\left(b+c\right)\left(b+a\right)}{c+a}+\frac{\left(c+a\right)\left(c+b\right)}{a+b}$$

Sử dụng bất đẳng thức AM – GM cho 2 số dương ta có

$$\frac{(a+b)(a+c)}{b+c}+\frac{(b+c)(b+a)}{c+a}\ge 2(a+b)$$

$$\frac{(b+c)(b+a)}{c+a}+\frac{(c+a)(c+b)}{a+b}\ge 2(b+c)$$

$$\frac{(a+b)(a+c)}{b+c}+\frac{(c+a)(c+b)}{a+b}\ge 2(c+a)$$

Cộng theo vế 3 bất đẳng thức trên ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Ví dụ 2. Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh

$$\sqrt{\frac{1+a^2}{b+c}}+\sqrt{\frac{1+b^2}{c+a}}+\sqrt{\frac{1+c^2}{a+b}}\ge 3.$$

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức AM – GM ta có

$$\sqrt{\frac{1+a^2}{b+c}}+\sqrt{\frac{1+b^2}{c+a}}+\sqrt{\frac{1+c^2}{a+b}}\ge 3\sqrt[6]{\frac{(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)}{(a+b)(b+c)(c+a)}}.$$

Ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)}{(a+b)(b+c)(c+a)}\ge 1$$

$$\Leftrightarrow (1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)\ge (a+b)(b+c)(c+a)$$

Tới đây ta đánh giá ghép cặp $(1+a^2)(1+b^2)\ge (a+b)^2$.

Chú ý sử dụng bất đẳng thức C–S ta có:

$$(1+a^2)(1+b^2)=(1+a^2)(b^2+1)\ge (a+b)^2;$$

$$(1+b^2)(1+c^2)=(1+b^2)(c^2+1)\ge (b+c)^2;$$

$$(1+c^2)(1+a^2)=(1+c^2)(a^2+1)\ge (a+c)^2.$$

Nhân theo vế ba bất đẳng thức trên ta có đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Chú ý. Ta có đẳng thức sau: $(1+x^2)(1+y^2)=(x+y)^2+(xy-1)^2$.

Từ đó cũng có ngay bất đẳng thức trên tương tự như dùng C–S.

Bằng cách tương tự ta chứng minh được với mọi k dương ta có

$$\sqrt{\frac{k+a^2}{b+c}}+\sqrt{\frac{k+b^2}{c+a}}+\sqrt{\frac{k+c^2}{a+b}}\ge 3\sqrt[4]{k}\,.$$

5. Kỹ thuật đánh giá mẫu số

Các bất đẳng thức hay được sử dụng để đánh giá mẫu số

$$x^3+y^3\ge xy\left(x+y\right);x^5+y^5\ge x^2y^2\left(x+y\right).$$

Chú ý dạng toán này thường cho các điều kiện ràng buộc ta cần tinh tế phân tích mẫu số thành nhân tử dựa vào điều kiện.

Chú ý nếu mẫu số có chứa căn hoặc tổng các biến ta có thể đặt mỗi mẫu số là một ẩn khi đó đưa về sử dụng bất đẳng thức AM – GM đơn giản hơn.

Ví dụ 1. Cho a,b,c là các số thực dương.

Chứng minh rằng $\frac{1}{a^2+bc}+\frac{1}{b^2+ac}+\frac{1}{c^2+ab}\le\frac{a+b+c}{2abc}$.

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có

$$a^2+bc\ge 2a\sqrt{bc}\Rightarrow\frac{2}{a^2++bc}\le\frac{1}{a\sqrt{bc}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}\right).$$

Tương tự ta có: $\frac{2}{b^2+ac}\le\frac{1}{b\sqrt{ac}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{bc}+\frac{1}{ab}\right)$

$$\frac{2}{c^2+ab}\le\frac{1}{c\sqrt{ab}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc}\right)$$

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{2}{a^2+bc}+\frac{2}{b^2+ac}+\frac{2}{c^2+ab}\le\frac{a+b+c}{2abc}.$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Ví dụ 2. Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc}+\frac{1}{b^3+c^3+abc}+\frac{1}{c^3+a^3+abc}\le\frac{1}{abc}.$$

Lời giải

Ta có

$$a^3+b^3=\left(a+b\right)\left(a^2-ab+b^2\right)=ab\left(a+b\right)+\left(a+b\right)\left(a-b\right)^2\ge ab\left(a+b\right)$$

$$\Rightarrow\frac{1}{a^3+b^3+abc}\le\frac{1}{ab\left(a+b\right)+abc}=\frac{1}{ab\left(a+b+c\right)}=\frac{c}{abc\left(a+b+c\right)}$$

Tương tự ta có $\frac{1}{b^3+c^3+abc}\le\frac{a}{abc\left(a+b+c\right)}$

$$\frac{1}{c^3+a^3+abc}\le\frac{b}{abc\left(a+b+c\right)}$$

Cộng theo vế 3 bất đẳng thức trên ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bài tập tương tự

1) Cho x,y,z là các số thực dương có tích bằng 1. Chứng minh

$$\frac{1}{x+y+1}+\frac{1}{y+z+1}+\frac{1}{z+x+1}\le 1.$$

<u>HD:</u> Đặt $x=a^3, y=b^3, z=c^3$ đưa về bất đẳng thức trên.

2) Cho x,y,z là các số thực dương có tích bằng 1. Chứng minh

$$\frac{xy}{x^5+y^5+xy}+\frac{yz}{y^5+z^5+yz}+\frac{zx}{z^5+x^5+zx}\le 1.$$

Ví dụ 3. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện $a^2+b^2+c^2=1$.

Chứng minh rằng $\frac{a}{b^2+c^2}+\frac{b}{c^2+a^2}+\frac{c}{a^2+b^2}\ge\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chú ý điều kiện ta có thể viết bất đẳng thức dưới dạng

$$\frac{a}{b^2+c^2}+\frac{b}{c^2+a^2}+\frac{c}{a^2+b^2}\ge\frac{3\sqrt{3}}{2}\left(a^2+b^2+c^2\right).$$

Điều này làm ta suy nghĩ đánh giá $\frac{a}{b^2+c^2}\ge\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$.

Thật vậy ta có $\frac{a}{b^2+c^2}=\frac{a}{1-a^2}=\frac{a^2}{a\left(1-a^2\right)}=\frac{\sqrt{2}a^2}{\sqrt{2a^2\left(1-a^2\right)\left(1-a^2\right)}}$.

$$\ge\frac{\sqrt{2}a^2}{\sqrt{\left(\frac{2a^2+1-a^2+1-a^2}{3}\right)^3}}=\frac{3\sqrt{3}a^2}{2}$$

Tương tự ta có $\frac{b}{c^2+a^2}\ge\frac{3\sqrt{3}b^2}{2};\frac{c}{a^2+b^2}\ge\frac{3\sqrt{3}c^2}{2}$

Cộng theo vế 3 bất đẳng thức trên ta có điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Bài tập tương tự

Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh

$$\frac{a}{b^2+c^2}+\frac{b}{c^2+a^2}+\frac{c}{a^2+b^2}\ge \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Ví dụ 4. Cho a,b,c là các số thực dương có tổng bằng 1.

Chứng minh rằng $\frac{ab}{\sqrt{c+ab}}+\frac{bc}{\sqrt{a+bc}}+\frac{ca}{\sqrt{b+ca}}\le \frac{1}{2}$.

Lời giải

Theo giả thiết ta có

$$\frac{ab}{\sqrt{c+ab}}=\frac{ab}{\sqrt{c(a+b+c)+ab}}=\frac{ab}{\sqrt{(c+a)(c+b)}}\le \frac{1}{2}\left(\frac{ab}{c+a}+\frac{ab}{c+b}\right);$$

$$\frac{bc}{\sqrt{a+bc}}=\frac{bc}{\sqrt{(a+b)(a+c)}}\le \frac{1}{2}\left(\frac{bc}{c+a}+\frac{bc}{a+b}\right);$$

$$\frac{ca}{\sqrt{b+ca}}=\frac{ca}{\sqrt{(b+c)(b+a)}}\le \frac{1}{2}\left(\frac{ca}{a+b}+\frac{ca}{b+c}\right).$$

Cộng theo vế 3 bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{ab}{\sqrt{c+ab}}+\frac{bc}{\sqrt{a+bc}}+\frac{ca}{\sqrt{b+ca}}\le \frac{a+b+c}{2}=\frac{1}{2}.$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Bài tập tương tự

Cho a,b,c là các số thực dương có tổng bằng 1. Chứng minh

$$\frac{1}{\sqrt{a+bc}}+\frac{1}{\sqrt{b+ca}}+\frac{1}{\sqrt{c+ab}}\le \frac{1}{6abc}.$$

Ví dụ 5. Cho *x,y,z* là các số thực dương thoả mãn điều kiện $xyz=1$.

Chứng minh rằng $\frac{1}{x^2+2y^2+3}+\frac{1}{y^2+2z^2+3}+\frac{1}{z^2+2x^2+3}\le \frac{1}{2}$.

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức AM – GM ta có

$x^2+y^2\ge 2xy;$

$y^2+1\ge 2y.$

Cộng lại theo vế ta được: $x^2+2y^2+3\ge 2(x+xy+1)$.

Suy ra $\frac{1}{x^2+2y^2+3}\le \frac{1}{2}.\frac{1}{x+xy+1}$.

Tương tự ta có $\dfrac{1}{y^2+2z^2+3}\le\dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{y+yz+1}$

$$\dfrac{1}{z^2+2x^2+3}\le\dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{z+zx+1}$$

Cộng theo vế 3 bất đẳng thức trên và gọi P là biểu thức vế trái của bất đẳng thức ta được $P\le\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x+xy+1}+\dfrac{1}{y+yz+1}+\dfrac{1}{z+zx+1}\right)$.

Vậy ta cần chứng minh $\dfrac{1}{x+xy+1}+\dfrac{1}{y+yz+1}+\dfrac{1}{z+zx+1}\le 1$.

Tuy nhiên đây là một đẳng thức luôn đúng, thật vậy

$$\dfrac{1}{x+xy+1}+\dfrac{1}{y+yz+1}+\dfrac{1}{z+zx+1}$$

$$=\dfrac{1}{x+xy+1}+\dfrac{1}{y+y.\dfrac{1}{xy}+1}+\dfrac{1}{\dfrac{1}{xy}+\dfrac{1}{xy}.x+1}$$

$$=\dfrac{1}{x+xy+1}+\dfrac{x}{xy+1+x}+\dfrac{xy}{1+x+xy}=1$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$.

Nhận xét. Bạn đọc lưu ý đẳng thức quan trọng với x,y,z có tích bằng 1 ta có

$$\dfrac{1}{x+xy+1}+\dfrac{1}{y+yz+1}+\dfrac{1}{z+zx+1}=1.$$

Bài tập tương tự

1) Cho x,y,z là các số thực dương thoả mãn điều kiện $xyz=8$.

Chứng minh rằng $\dfrac{1}{2x+y+6}+\dfrac{1}{2y+z+6}+\dfrac{1}{2z+x+6}\le\dfrac{1}{4}$.

2) Cho x,y,z là các số thực dương có tích bằng 1. Chứng minh

$$\dfrac{1}{x^5-x^2+3xy+6}+\dfrac{1}{y^5-y^2+3yz+6}+\dfrac{1}{z^5-z^2+3zx+6}\le\dfrac{1}{3}.$$

Ví dụ 6. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=1$.

Chứng minh rằng $\dfrac{a^2}{a+bc}+\dfrac{b^2}{b+ca}+\dfrac{c^2}{c+ab}\ge\dfrac{a+b+c}{4}$.

Lời giải

Chú ý điều kiện được viết lại dưới dạng: $abc=ab+bc+ca$.

Khi đó $\frac{a^2}{a+bc}=\frac{a^3}{a^2+abc}=\frac{a^3}{a^2+ab+bc+ca}=\frac{a^3}{(a+b)(a+c)}$.

Sử dụng bất đẳng thức AM – GM ta có

$$\frac{a^3}{(a+b)(a+c)}+\frac{a+b}{8}+\frac{a+c}{8}\ge\frac{3a}{4}\Rightarrow\frac{a^3}{(a+b)(a+c)}\ge\frac{4a-b-c}{8}.$$

Tương tự ta có $\frac{b^2}{b+ca}\ge\frac{4b-a-c}{8};\frac{c^2}{c+ab}\ge\frac{4c-a-b}{8}$.

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=3$.

Ví dụ 7. Cho a,b,c là các số thực dương.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{a+3c}{a+2b+c}+\frac{4b}{a+b+2c}-\frac{8c}{a+b+3c}.$$

Lời giải

Đặt $\begin{cases}x=a+2b+c\\y=a+b+2c\\z=a+b+3c\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-x+5y-3z\\b=x-2y+z\\c=z-y\end{cases}$.

Khi đó $P=\frac{-x+2y}{x}+\frac{4(x-2y+z)}{y}-\frac{8(z-y)}{z}$

$$=\frac{2y}{x}+\frac{4x}{y}+\frac{4z}{y}+\frac{8y}{z}-17$$

$$=2\left(\frac{y}{x}+\frac{2x}{y}\right)+4\left(\frac{z}{y}+\frac{2y}{z}\right)-17$$

Sử dụng bất đẳng thức AM – GM ta có

$$P\ge4\sqrt{\frac{y}{x}.\frac{2x}{y}}+8\sqrt{\frac{z}{y}.\frac{2y}{z}}-17=12\sqrt{2}-17.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}\frac{y}{x}=\frac{2x}{y}\\\frac{z}{y}=\frac{2y}{z}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=\sqrt{2}x\\z=\sqrt{2}y=2x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\left(5\sqrt{2}-7\right)x\\b=\left(3-2\sqrt{2}\right)x\\c=\left(2-\sqrt{2}\right)x\end{cases}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $12\sqrt{2}-17$.

Bài tập tương tự

Cho x,y là các số thực dương.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{x+3}{x+2y+1}+\frac{4y}{x+y+2}-\frac{8}{x+y+3}.$$

6. Kỹ thuật nghịch đảo

Một số trường áp dụng trực tiếp AM – GM làm bất đẳng thức đổi chiều vì vậy ta khéo léo chia phân thức cho tử thức áp dụng AM – GM. Kỹ thuật này hay được áp dụng với bất đẳng thức Bernoulli(xem chủ đề sau).

Ví dụ 1. Cho a,b,c là các số thực dương chứng minh

$$\sqrt{\frac{a^3}{a^3+(b+c)^3}}+\sqrt{\frac{b^3}{b^3+(c+a)^3}}+\sqrt{\frac{c^3}{c^3+(a+b)^3}}\ge 1.$$

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức AM –GM ta có

$$\sqrt{1+x^3}=\sqrt{(x+1)\left(x^2-x+1\right)}\le\frac{x^2-x+1+x+1}{2}=\frac{x^2+2}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=0$ hoặc $x=2$.

Ta có $\sqrt{\frac{a^3}{a^3+(b+c)^3}}=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{b+c}{a}\right)^3}}\ge\frac{2}{\left(\frac{b+c}{a}\right)^2+2}$

$$=\frac{2a^2}{2a^2+(b+c)^2}\ge\frac{2a^2}{2a^2+2\left(b^2+c^2\right)}=\frac{a^2}{a^2+b^2+c^2}$$

Tương tự ta có $\sqrt{\frac{b^3}{b^3+(c+a)^3}}\ge\frac{b^2}{a^2+b^2+c^2}$

$$\sqrt{\frac{c^3}{c^3+(a+c)^3}}\ge\frac{c^2}{a^2+b^2+c^2}$$

Cộng theo vế 3 bất đẳng thức trên ta có điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bài tập tương tự

Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện $abc=8$.

Chứng minh $\frac{a^2}{\sqrt{\left(1+a^3\right)\left(1+b^3\right)}}+\frac{b^2}{\sqrt{\left(1+b^3\right)\left(1+c^3\right)}}+\frac{c^2}{\sqrt{\left(1+c^3\right)\left(1+a^3\right)}}\ge\frac{4}{3}$.

Ví dụ 2. Cho a,b,c là các số thực dương chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}}>2.$$

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức AM – GM ta có

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}}=\frac{2a}{2\sqrt{a\left(b+c\right)}}\ge\frac{2a}{a+b+c};$$

$$\sqrt{\frac{b}{c+a}}=\frac{2b}{2\sqrt{b\left(c+a\right)}}\ge\frac{2b}{a+b+c};$$

$$\sqrt{\frac{c}{a+b}}=\frac{2c}{2\sqrt{c\left(a+b\right)}}\ge\frac{2c}{a+b+c}.$$

Cộng theo vế 3 bất đẳng thức trên ta được

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}}\ge 2\left(\frac{a}{a+b+c}+\frac{b}{a+b+c}+\frac{c}{a+b+c}\right)=2.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b+c,b=c+a,c=a+b$

$\Rightarrow a+b+c=2\left(a+b+c\right)$ vô lý. Vậy đẳng thức không xảy ra ta có điều phải chứng minh.

Bài tập tương tự

1) Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh

$$\sqrt[3]{\left(\frac{2a}{b+c}\right)^2}+\sqrt[3]{\left(\frac{2b}{c+a}\right)^2}+\sqrt[3]{\left(\frac{2c}{a+b}\right)^2}\ge 3.$$

2) Cho a,b,c là các số thực không âm thoả mãn điều kiện $a^2+b^2+c^2=2$.

Chứng minh rằng $\sqrt{\dfrac{1+bc}{(b+c)^2}}+\sqrt{\dfrac{1+ca}{(c+a)^2}}+\sqrt{\dfrac{c}{a+b}}\ge 2$.

3) Cho x,y,z là các số thực không âm và tổng đôi một khác 0. Chứng minh rằng

$$\frac{x}{\sqrt{y^2+z^2}}+\frac{y}{\sqrt{z^2+x^2}}+\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\ge 2.$$

4) Cho a,b,c là các số thực không âm thoả mãn điều kiện $ab+bc+ca>0$. Chứng minh

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{2c+a}}+2\sqrt{\frac{c}{a+b+c}}\ge 2.$$

5) Cho x,y là các số thực không âm. Chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{x}{y+1}}+\sqrt{\frac{y}{x+1}}+\sqrt{\frac{1}{x+y}}\ge 2.$$

Ví dụ 3. Cho a,b,c là các số thực dương có tổng bằng 3. Chứng minh

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2+c}{a+b+c^2}}+\sqrt{\frac{b^2+c^2+a}{b+c+a^2}}+\sqrt{\frac{c^2+a^2+b}{c+a+b^2}}\ge 3.$$

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức AM – GM cho hai số dương ta có

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2+c}{a+b+c^2}}=\frac{a^2+b^2+c}{\sqrt{\left(a+b+c^2\right)\left(a^2+b^2+c\right)}}\geq\frac{2\left(a^2+b^2+c\right)}{a+b+c+a^2+b^2+c^2}$$

$$\sqrt{\frac{b^2+c^2+a}{b+c+a^2}}\geq\frac{2\left(b^2+c^2+a\right)}{a+b+c+a^2+b^2+c^2};\sqrt{\frac{c^2+a^2+b}{c+a+b^2}}\geq\frac{2\left(c^2+a^2+b\right)}{a+b+c+a^2+b^2+c^2}$$

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên và đưa về chứng minh

$$\frac{4\left(a^2+b^2+c^2\right)+2\left(a+b+c\right)}{a+b+c+a^2+b^2+c^2}\geq 3\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2\geq 3.$$

Bất đẳng thức cuối đúng theo AM – GM.

Bài toán được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài tập tương tự

Cho a,b,c,d là các số thực dương. Chứng minh

$$\frac{a}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}}+\frac{b}{\sqrt{c^2+d^2+a^2}}+\frac{c}{\sqrt{d^2+a^2+b^2}}+\frac{d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\geq 2.$$

Ví dụ 4. Cho a,b,c là các số thực không âm thoả mãn điều kiện $ab+bc+ca>0$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\sqrt{\frac{a(b+c)}{a^2+bc}}+\sqrt{\frac{b(c+a)}{b^2+ca}}+\sqrt{\frac{c(a+b)}{c^2+ab}}.$$

Lời giải

Chú ý

$$a(b+c)^2=a\left(b^2+c^2+2bc\right)\geq a\left(b^2+c^2\right)$$

$$\left(a^2+bc\right)(b+c)=b\left(a^2+c^2\right)+c\left(a^2+b^2\right)$$

Do vậy nếu đặt $x=a\left(b^2+c^2\right);y=b\left(c^2+a^2\right);z=c\left(a^2+b^2\right)$ ta có

$$\sqrt{\frac{a(b+c)}{a^2+bc}}\geq\sqrt{\frac{x}{y+z}};\sqrt{\frac{b(c+a)}{b^2+ca}}\geq\sqrt{\frac{y}{z+x}};\sqrt{\frac{c(a+b)}{c^2+ab}}\geq\sqrt{\frac{z}{x+y}}.$$

Như vậy sau khi cộng theo vế ba bất đẳng thức trên đưa về bài toán đã trình bày.

$$\sqrt{\frac{x}{y+z}}+\sqrt{\frac{y}{z+x}}+\sqrt{\frac{z}{x+y}}\geq 2.$$

Ta có giá trị nhỏ nhất của P bằng 2 đạt tại $a=b,c=0$ hoặc các hoán vị.

Cách 2: Nếu có một số bằng 0, không mất tính tổng quát giả sử là c, khi đó

$$P=\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}=\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{\sqrt{ab}}+2\ge 2.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b,c=0$.

Nếu cả ba số đều dương khi đó sử dụng bất đẳng thức AM – GM ta có

$$\sqrt{\frac{a(b+c)}{a^2+bc}}=\frac{a(b+c)}{\sqrt{\left(a^2+bc\right)a(b+c)}}\ge\frac{a(b+c)}{\frac{a^2+bc+a(b+c)}{2}}=\frac{2a(b+c)}{(a+b)(a+c)}.$$

Tương tự ta có $\sqrt{\frac{b(c+a)}{b^2+ca}}\ge\frac{2b(c+a)}{(b+a)(b+c)};\sqrt{\frac{c(a+b)}{c^2+ab}}\ge\frac{2c(a+b)}{(c+a)(c+b)}$.

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên ta được:

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{a(b+c)}{a^2+bc}}+\sqrt{\frac{b(c+a)}{b^2+ca}}+\sqrt{\frac{c(a+b)}{c^2+ab}}&\ge\frac{2a(b+c)}{(a+b)(a+c)}+\frac{2b(c+a)}{(b+a)(b+c)}+\frac{2c(a+b)}{(c+a)(c+b)}\\&=\frac{2a(b+c)^2+2b(c+a)^2+2c(a+b)^2}{(a+b)(b+c)(c+a)}\\&=\frac{2(a+b)(a+c)(b+c)+8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}\\&=2+\frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}>2\end{aligned}$$

So sánh hai trường hợp ta có giá trị nhỏ nhất của P bằng 2 đạt tại $a=b,c=0$ hoặc các hoán vị.

7. Kỹ thuật sử dụng bất đẳng thức AM – GM dạng luỹ thừa

$$\frac{a_1^m+a_2^m+...+a_n^m}{n}\ge\left(\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}\right)^m.$$

Trong đó $a_k,k=\overline{1,n}$ là các số không âm và m,n là các số nguyên dương.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1=a_2=...=a_n$.

Chú ý. Xem chứng minh trong chủ đề Bất đẳng thức Bernoulli.

Các bất đẳng thức dạng này hay được sử dụng

$$a^3+b^3\ge\frac{1}{4}(a+b)^3;a^4+b^4\ge\frac{1}{8}(a+b)^4.$$

Ví dụ 1. Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh

$$\frac{a^3}{(b+3c)^3}+\frac{b^3}{(c+3a)^3}+\frac{c^3}{(a+3b)^3}\ge\frac{3}{64}.$$

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức AM – GM dạng luỹ thừa ta có

$$\frac{a^3}{(b+3c)^3}+\frac{b^3}{(c+3a)^3}+\frac{c^3}{(a+3b)^3}\ge 3\left(\frac{\frac{a}{b+3c}+\frac{b}{c+3a}+\frac{c}{a+3b}}{3}\right)^3.$$

Chú ý sử dụng bất đẳng thức C–S ta có

$$\begin{aligned}\frac{a}{b+3c}+\frac{b}{c+3a}+\frac{c}{a+3b}&\ge\frac{(a+b+c)^2}{a(b+3c)+b(c+3a)+c(a+3b)}\\&=\frac{(a+b+c)^2}{4(ab+bc+ca)}\ge\frac{3(ab+bc+ca)}{4(ab+bc+ca)}=\frac{3}{4}\end{aligned}.$$

Suy ra $\dfrac{a^3}{(b+3c)^3}+\dfrac{b^3}{(c+3a)^3}+\dfrac{c^3}{(a+3b)^3}\ge\dfrac{3}{64}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bài tập tương tự

Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh

$$\left(\frac{a}{a+2b}\right)^3+\left(\frac{b}{b+2c}\right)^3+\left(\frac{c}{c+2a}\right)^3\ge\frac{1}{9}.$$

Ví dụ 2. Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh

$$a^4+b^4+\frac{1}{8}c^4\ge\frac{1}{64}(a+b+c)^4.$$

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức AM – GM dạng luỹ thừa ta có

$$a^4+b^4+\frac{1}{8}c^4=a^4+b^4+\frac{1}{16}c^4+\frac{1}{16}c^4\ge 4\left(\frac{a+b+\frac{c}{2}+\frac{c}{2}}{4}\right)^4=\frac{1}{64}(a+b+c)^4.$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=\dfrac{c}{2}$.

Ngoài ra bất đẳng thức có dạng đẳng cấp ta có thể chuẩn hoá đưa về xét hàm số(xem chương 3).

Ví dụ 3. Cho a,b,c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh

$$\sqrt[3]{a+b-c}+\sqrt[3]{b+c-a}+\sqrt[3]{c+a-b}\le\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}.$$

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức AM – GM dạng luỹ thừa ta có

$$\sqrt[3]{a+b-c}+\sqrt[3]{b+c-a}\le\sqrt[3]{4\left(a+b-c+b+c-a\right)}=2\sqrt[3]{b}$$

$$\sqrt[3]{b+c-a}+\sqrt[3]{c+a-b}\le\sqrt[3]{4\left(b+c-a+c+a-b\right)}=2\sqrt[3]{c}$$

$$\sqrt[3]{c+a-b}+\sqrt[3]{a+b-c}\le\sqrt[3]{4\left(c+a-b+a+b-c\right)}=2\sqrt[3]{a}$$

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên ta có điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bài tập tương tự

Cho a,b,c là độ dài ba cạnh một tam giác. Chứng minh

$$\sqrt{a+b-c}+\sqrt{b+c-a}+\sqrt{c+a-b}\le\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\ .$$

Ví dụ 4. Cho x,y,z là các số thực dương. Chứng minh

$$\sqrt[4]{\frac{x+y}{z}}+\sqrt[4]{\frac{x+y}{z}}+\sqrt[4]{\frac{x+y}{z}}\ge\sqrt{2}\left(\sqrt[4]{\frac{x}{y+z}}+\sqrt[4]{\frac{y}{z+x}}+\sqrt[4]{\frac{z}{x+y}}\right).$$

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức: $8(A^4+B^4)\ge(A+B)^4$ ta có:

$$\sqrt[4]{\frac{x}{y+z}}\le\frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{\frac{(\sqrt[4]{y}+\sqrt[4]{z})^4}{8}}}=\frac{\sqrt[4]{8x}}{\sqrt[4]{y}+\sqrt[4]{z}}\ .$$

Mặt khác: $\dfrac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{y}+\sqrt[4]{z}}\le\dfrac{\sqrt[4]{x}}{4}\left(\dfrac{1}{\sqrt[4]{y}}+\dfrac{1}{\sqrt[4]{z}}\right).$

Xây dựng các BĐT còn lại rồi cộng vế theo vế, ta được:

$$VT\le\frac{\sqrt[4]{2}}{2}.\left(\sum\frac{\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{z}}{\sqrt[4]{y}}\right).$$

Lại có: $\dfrac{\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{z}}{\sqrt[4]{y}}\le\sqrt[4]{\dfrac{8(z+x)}{y}}\ .$

Suy ra: $VT\le\sqrt[4]{\dfrac{z+x}{y}}+\sqrt[4]{\dfrac{x+y}{z}}+\sqrt[4]{\dfrac{y+z}{x}}=VP\ .$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z$.

8. Kỹ thuật biến đổi tương đương kết hợp AM – GM

Đôi khi đánh giá bất đẳng thức trực tiếp bằng AM – GM không hiệu quả khi đó cần kết hợp biến đổi giữa điều kiện bài toán và bất đẳng thức cần chứng minh. Đưa về các bất đẳng thức đơn giản hơn để áp dụng AM – GM.

Ví dụ 1. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện

$$\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}=2.$$

Chứng minh rằng $\frac{1}{4a+1}+\frac{1}{4b+1}+\frac{1}{4c+1}\ge 1$.

Lời giải

Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$\sum(4a+1)(4b+1)\ge(4a+1)(4b+1)(4c+1)\Leftrightarrow 2(a+b+c)+1\ge 32abc$.

Chú ý điều kiện bài toán trở thành

$\sum(a+1)(b+1)=2(a+1)(b+1)(c+1)\Leftrightarrow ab+bc+ca+2abc=1$.

Sử dụng bất đẳng thức AM – GM ta có

$a+b+c\ge\sqrt{3(ab+bc+ca)}=\sqrt{3(1-2abc)}$.

Vậy ta chỉ cần chứng minh $2\sqrt{3(1-2abc)}+1\ge 32abc$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{3(1-2abc)}\ge 32abc-1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}abc\le\frac{1}{32}\\ \begin{cases}abc\ge\frac{1}{32}\\ 12(1-2abc)\ge(32abc-1)^2\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow abc\le\frac{1}{8}.$$

Bất đẳng thức cuối đúng bởi sử dụng AM – GM cho 3 số dương ta có

$1=2abc+ab+bc+ca\ge 2abc+3\sqrt[3]{a^2b^2c^2};t=\sqrt[3]{abc}$

$\Rightarrow 2t^3+3t^2-1\le 0\Leftrightarrow(2t-1)(t+1)^2\le 0\Leftrightarrow t\le\frac{1}{2}\Leftrightarrow abc\le\frac{1}{8}$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{2}$.

Ví dụ 2. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện

$$\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}=2.$$

Chứng minh rằng $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge 4(a+b+c)$.

Lời giải

<u>Cách 1:</u> Thực hiện tương tự bài toán trên.

<u>Cách 2:</u> Chú ý tồn tại các số dương x,y,z sao cho $a=\frac{x}{y+z},b=\frac{y}{z+x},c=\frac{z}{x+y}$.

Bài toán đưa về chứng minh

$$\frac{y+z}{x}+\frac{z+x}{y}+\frac{x+y}{z}\ge 4\left(\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}\right).$$

Bất đẳng thức trên là tổng của ba bất đẳng thức sau

$$y\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\right)\ge\frac{4y}{z+x};z\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{x}\right)\ge\frac{4z}{x+y};x\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{y}\right)\ge\frac{4x}{y+z}.$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{2}$.

Ví dụ 3. Cho a,b,c là các số thực dương có tích bằng 1. Chứng minh

$$\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+1}\ge\frac{2}{a+b+c+1}+1.$$

Lời giải

Bất đẳng thức đã cho tương đương với:

$$\frac{2(a+b+c)+ab+bc+ca+3}{a+b+c+ab+bc+ca+2}\ge\frac{3+a+b+c}{a+b+c+1}$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c+1)\left[2(a+b+c)+ab+bc+ca+3\right]$$

$$\ge (a+b+c+3)(a+b+c+ab+bc+ca+2)$$

$$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2\ge 3$$

Bất đẳng thức cuối luôn đúng bởi theo AM – GM ta có

$$a^2+b^2+c^2\ge 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}=3.$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

9. Kỹ thuật sắp thứ tự

Áp dụng với các bất đẳng thức hoán vị ta có thể giả sử $a=\min\{a,b,c\}$ hoặc $a=\max\{a,b,c\}$ hoặc a là số nằm giữa b và c.

Dưới đây là một bất đẳng thức được sử dụng khá nhiều tôi xin trình bày

$$a^2b+b^2c+c^2a+abc\le\frac{4}{27}(a+b+c)^3.$$

Chứng minh.

Không mất tính tổng quát giả sử b là số nằm giữa a và c ta có:

$$(b-a)(b-c)\le 0\Leftrightarrow b^2+ac\le ab+bc\Rightarrow b^2c+c^2a\le abc+bc^2$$

$$\Rightarrow a^2b+b^2c+c^2a+abc\le a^2b+bc^2+2abc=b\left(a^2+c^2+2ac\right)=b(a+c)^2$$

Khi đó $VT \le b\left(a+c\right)^2 = 4.b.\frac{a+c}{2}.\frac{a+c}{2} \le 4\left(\frac{b+\frac{a+c}{2}+\frac{a+c}{2}}{3}\right)^3 = \frac{4}{27}\left(a+b+c\right)^3$.

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khí $a=b=c$.

Ví dụ 1. Cho a,b,c là các số thực dương có tổng bằng 3. Chứng minh

$$\left(ab^2+bc^2+ca^2\right)\left(ab+bc+ca\right) \le 9 .$$

Lời giải

Không mất tính tổng quát giả sử b là số nằm giữa a và c

Ta có: $a^2b+b^2c+c^2a = b(c+a)^2 - abc - c(a-b)(b-c)$

$$\le b(c+a)^2 - abc = b(c^2+ac+a^2)$$

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta được:

$$\begin{aligned}\left(ab^2+bc^2+ca^2\right)\left(ab+bc+ca\right) &\le b(c^2+ac+a^2)(ab+bc+ca)\\ &\le b\left[\frac{(c^2+ac+a^2)+(ab+bc+ca)}{2}\right]^2\\ &= \frac{b(c+a)^2(a+b+c)^2}{4} = \frac{9b(a+c)^2}{4}\\ &= 9b.\frac{a+c}{2}.\frac{a+c}{2} \le 9\left[\frac{b+\frac{a+c}{2}+\frac{a+c}{2}}{3}\right]^3 = 9\end{aligned}.$$

Ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 2. Cho *a,b,c* là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $a+b+c=3$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = a\sqrt{b^3+1}+b\sqrt{c^3+1}+c\sqrt{a^3+1}$.

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$a\sqrt{b^3+1} = a\sqrt{\left(b+1\right)\left(b^2-b+1\right)} \le a.\frac{b+1+b^2-b+1}{2} = a+\frac{ab^2}{2}.$$

Tương tự: $b\sqrt{c^3+1} \le b+\frac{bc^2}{2}; c\sqrt{a^3+1} \le c+\frac{ca^2}{2}$.

Cộng theo vế 3 bất đẳng thức trên ta được:

$$P \le a+b+c+\frac{ab^2}{2}+\frac{bc^2}{2}+\frac{ca^2}{2} = 3+\frac{ab^2+bc^2+ca^2}{2}.$$

Không mất tính tổng quát giả sử b là số nằm giữa a và c ta có:

$$\left(b-a\right)\left(b-c\right)\le 0 \Leftrightarrow b^2+ac\le ab+bc \Rightarrow ab^2+a^2c\le a^2b+abc$$

$$\Rightarrow ab^2+bc^2+ca^2\le a^2b+abc+bc^2=b\left(a^2+ac+c^2\right)\le b\left(a+c\right)^2$$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$b\left(a+c\right)^2=4.b.\frac{a+c}{2}.\frac{a+c}{2}\le 4\left(\frac{b+\frac{a+c}{2}+\frac{a+c}{2}}{3}\right)^3=4.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=0,b=1,c=2$ hoặc các hoán vị.

Suy ra $P\le 3+\dfrac{ab^2+bc^2+ca^2}{2}\le 3+\dfrac{b\left(a+c\right)^2}{2}\le 5$.

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng 5 đạt tại $a=0,b=1,c=2$ hoặc các hoán vị.

Ví dụ 3. Cho *a,b,c* là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $a+b+c=5$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=a^4b+b^4c+c^4a$.

Lời giải

Không mất tính tổng quát giả sử $a=max\left\{a,b,c\right\}$, khi đó

$$P=a^4b+b^4c+c^4a\le a^4b+a^3bc+\frac{a^4c}{2}+\frac{a^3c^2}{2}=a^3\left(ab+bc+\frac{ac}{2}+\frac{c^2}{2}\right)$$

$$=a^3\left(a+c\right)\left(b+\frac{c}{2}\right)=256.\frac{a}{4}.\frac{a}{4}.\frac{a}{4}.\left(\frac{a+c}{4}\right).\left(b+\frac{c}{2}\right)$$

$$\le 256\left(\frac{3.\frac{a}{4}+\frac{a+c}{4}+b+\frac{c}{2}}{5}\right)^5=256\left(\frac{a+b+\frac{3c}{4}}{5}\right)^5\le 256\left(\frac{a+b+c}{5}\right)^5=256$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=4,b=1,c=0$ hoặc các hoán vị.

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng 256 đạt tại $a=4,b=1,c=0$ hoặc các hoán vị.

Nhận xét. Tổng quát với a,b,c không âm thỏa mãn $a+b+c=k$ ta luôn có

$$a^nb+b^nc+c^na\le \frac{n^nk^{n+1}}{\left(n+1\right)^{n+1}}.$$

Chứng minh.

Không mất tính tổng quát giả sử $a=max\left\{a,b,c\right\}$ khi đó

$$P=a^nb+b^nc+c^na\le a^nb+a^{n-1}bc+\frac{a^nc}{2}+\frac{a^{n-1}c^2}{2}$$

$$=a^{n-1}\left(ab+bc+\frac{ac}{2}+\frac{c^2}{2}\right)=a^{n-1}(a+c)\left(b+\frac{c}{2}\right)$$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$$a^{n-1}(a+c)\left(b+\frac{c}{2}\right)=n^n.\underbrace{\frac{a}{n}.\frac{a}{n}...\frac{a}{n}}_{n-1}.\frac{a+c}{n}.\left(b+\frac{c}{2}\right)$$

$$\le n^n\left[\frac{(n-1).\frac{a}{n}+\frac{a+c}{n}+b+\frac{c}{2}}{n+1}\right]^{n+1}=n^n\left(\frac{a+b+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)c}{n+1}\right)^{n+1}$$

$$\le n^n\left(\frac{a+b+c}{n+1}\right)^{n+1}=\frac{n^nk^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=\frac{kn}{n+1},b=\frac{k}{n+1},c=0$ hoặc các hoán vị.

Ví dụ 4. Cho *a,b,c* là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $a+b+c=3$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\left(a^2-ab+b^2\right)\left(b^2-bc+c^2\right)\left(c^2-ca+a^2\right).$$

Lời giải

Không mất tính tổng quát giả sử $a\ge b\ge c$ khi đó

$$b^2-bc+c^2=b^2+c(c-b)\le b^2$$

$$c^2-ca+a^2=c(c-a)+a^2\le a^2$$

Suy ra:

$$P\le a^2b^2\left(a^2-ab+b^2\right)=\frac{4}{9}.\frac{3ab}{2}.\frac{3ab}{2}\left(a^2-ab+b^2\right)$$

$$\le\frac{4}{9}\left[\frac{\frac{3ab}{2}+\frac{3ab}{2}+a^2-ab+b^2}{3}\right]^3=\frac{4}{9.27}(a+b)^6\le\frac{4}{9.27}(a+b+c)^6=12$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=2,b=1,c=0$.

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng 12 đạt tại $a=2,b=1,c=0$ hoặc các hoán vị.

10.Kỹ thuật cô si ngược dấu

Việc áp dụng bất đẳng thức AM – GM cho mẫu số đôi khi làm ngược chiều bất đẳng thức do vậy trước khi áp dụng ta biến đổi phân thức để có thể áp dụng trực tiếp bất đẳng thức AM – GM.

Ví dụ 1. Cho a,b,c là các số thực dương có tổng bằng 3. Chứng minh

$$\frac{a}{1+b^2}+\frac{b}{1+c^2}+\frac{c}{1+a^2}\ge\frac{3}{2}.$$

Lời giải

Ta có

$$\frac{a}{1+b^2}=\frac{a\left(1+b^2\right)-ab^2}{1+b^2}=a-\frac{ab^2}{1+b^2}\ge a-\frac{ab^2}{2b}=a-\frac{ab}{2}$$

$$\frac{b}{1+c^2}=b-\frac{bc^2}{1+c^2}\ge b-\frac{bc}{2};\frac{c}{1+a^2}=c-\frac{ca^2}{1+a^2}\ge c-\frac{ca}{2}$$

Cộng theo vế 3 bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{a}{1+b^2}+\frac{b}{1+c^2}+\frac{c}{1+a^2}\ge a+b+c-\frac{ab+bc+ca}{2}=3-\frac{ab+bc+ca}{2}\ge\frac{3}{2}.$$

Vì $ab+bc+ca\le\frac{1}{3}\left(a+b+c\right)^2=3$.

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Ví dụ 2. Cho x, y, z là các số thực dương. Chứng minh

$$\frac{\sqrt{yz}}{x+2\sqrt{yz}}+\frac{\sqrt{zx}}{y+2\sqrt{zx}}+\frac{\sqrt{xy}}{z+2\sqrt{xy}}.$$

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức AM – GM ta có

$$\frac{\sqrt{yz}}{x+2\sqrt{yz}}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{x}{x+2\sqrt{yz}}\right)\le\frac{1}{2}\left(1-\frac{x}{x+y+z}\right)$$

$$\frac{\sqrt{zx}}{y+2\sqrt{zx}}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{y}{y+2\sqrt{zx}}\right)\le\frac{1}{2}\left(1-\frac{y}{x+y+z}\right)$$

$$\frac{\sqrt{xy}}{z+2\sqrt{xy}}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{z}{z+2\sqrt{xy}}\right)\le\frac{1}{2}\left(1-\frac{z}{x+y+z}\right)$$

Cộng theo vế 3 bất đẳng thức trên ta có điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z$.

Ví dụ 3. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện $a+b+c=3$.

Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{a+2b^2}+\frac{b^2}{b+2c^2}+\frac{c^2}{c+2a^2}\ge 1.$$

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức AM – GM ta có

$$\frac{a^2}{a+2b^2}=\frac{a\left(a+2b^2\right)-2ab^2}{a+2b^2}=a-\frac{2ab^2}{a+2b^2}\ge a-\frac{2ab^2}{3\sqrt[3]{ab^4}}=a-\frac{2}{3}(ab)^{\frac{2}{3}}$$

$$\frac{b^2}{b+2c^2}\ge b-\frac{2}{3}(bc)^{\frac{2}{3}};\frac{c^2}{c+2a^2}\ge c-\frac{2}{3}(ca)^{\frac{2}{3}}$$

Cộng theo vế 3 bất đẳng thức trên ta chỉ cần chứng minh

$$(ab)^{\frac{2}{3}}+(bc)^{\frac{2}{3}}+(ca)^{\frac{2}{3}}\le 3.$$

Bất đẳng thức trên đúng theo AM – GM vì

$$a+ab+b\ge 3(ab)^{\frac{2}{3}}$$

$$b+bc+c\ge 3(bc)^{\frac{2}{3}}$$

$$c+ca+a\ge 3(ca)^{\frac{2}{3}}$$

$$\left(a+ab+b\right)+\left(b+bc+c\right)+\left(c+ca+a\right)\le 2\left(a+b+c\right)+\frac{1}{3}\left(a+b+c\right)^2=9$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Ví dụ 4. Cho a,b,c là các số thực không âm có tổng bằng 3. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{a}{b^3+16}+\frac{b}{c^3+16}+\frac{c}{a^3+16}.$$

Lời giải

Ta có:

$$16P=a-\frac{ab^3}{b^3+16}+b-\frac{bc^3}{c^3+16}+c-\frac{ca^3}{a^3+16}=3-\left(\frac{ab^3}{b^3+16}+\frac{bc^3}{c^3+16}+\frac{ca^3}{a^3+16}\right).$$

Để tìm giá trị lớn nhất của P ta tìm giá trị nhỏ nhất của $\frac{ab^3}{b^3+16}+\frac{bc^3}{c^3+16}+\frac{ca^3}{a^3+16}$.

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta được:

$$\frac{ab^3}{b^3+16}=\frac{ab^3}{b^3+8+8}\le\frac{ab^3}{12b}=\frac{ab^2}{12}.$$

Tương tự: $\frac{bc^3}{c^3+16}\le\frac{bc^2}{12};\frac{ca^3}{a^3+16}\le\frac{ca^2}{12}$.

Cộng lại theo vế 3 bất đẳng thức trên ta được:

$$\frac{ab^3}{b^3+16}+\frac{bc^3}{c^3+16}+\frac{ca^3}{a^3+16}\le\frac{ab^2+bc^2+ca^2}{12}.$$

Bài toán đưa về tìm giá trị lớn nhất của $ab^2+bc^2+ca^2$ đây là một bài toán quen thuộc.

Không mất tính tổng quát giả sử b là số nằm giữa a và c ta có:

$$(b-a)(b-c)\le 0\Leftrightarrow b^2+ac\le ab+bc\Rightarrow ab^2+ca^2\le a^2b+abc$$

$$\Rightarrow ab^2+bc^2+ca^2\le a^2b+abc+bc^2=b\left(a^2+ac+c^2\right)$$

$$\le b(a+c)^2=4.b.\frac{a+c}{2}.\frac{a+c}{2}\le 4\left(\frac{b+\frac{a+c}{2}+\frac{a+c}{2}}{3}\right)^3=4$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=0,b=1,c=2$ và các hoán vị.

Suy ra $16P\ge 1\Leftrightarrow P\ge\frac{1}{16}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\frac{1}{16}$ đạt tại $a=0,b=1,c=2$ hoặc các hoán vị.

Ví dụ 5. Cho a,b,c là các số thực dương có tổng bằng 3.

Chứng minh rằng $\frac{1}{2+a^2b}+\frac{1}{2+b^2c}+\frac{1}{2+c^2a}\ge 1$.

Lời giải

Ta có: $\frac{2}{2+a^2b}=1-\frac{a^2b}{2+a^2b}\ge 1-\frac{1}{3}a^{\frac{4}{3}}b^{\frac{2}{3}}\ge 1-\frac{1}{9}\left(a^2+ab+ab\right)$.

Tương tự ta có: $\frac{2}{2+b^2c}\ge 1-\frac{1}{9}\left(b^2+bc+ab\right);\frac{2}{2+c^2a}\ge 1-\frac{1}{9}\left(c^2+ca+bc\right)$.

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên ta được:

$$2\left(\frac{1}{2+a^2b}+\frac{1}{2+b^2c}+\frac{1}{2+c^2a}\right)\ge 3-\frac{(a+b+c)^2}{9}=2$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{2+a^2b}+\frac{1}{2+b^2c}+\frac{1}{2+c^2a}\ge 1$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

11.Sử dụng bất đẳng thức $(a+b)(b+c)(c+a) \geq \frac{8}{9}(a+b+c)(ab+bc+ca)$.

Chứng minh.

Đây là một bất đẳng thức được sử dụng khá thường xuyên với bất đẳng thức đối xứng 3 biến dựa trên đẳng thức

$(a+b)(b+c)(c+a) = (a+b+c)(ab+bc+ca) - abc$.

Ta có $(a+b+c)(ab+bc+ca) - abc = (a+b)(b+c)(c+a)$.

Mặt khác: $abc = \sqrt{ab}.\sqrt{bc}.\sqrt{ca} \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{b+c}{2}\right)\left(\frac{c+a}{2}\right) = \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{8}$.

Suy ra:

$$\begin{aligned}(a+b)(b+c)(c+a) &= (a+b+c)(ab+bc+ca) - abc \\ &\geq (a+b+c)(ab+bc+ca) - \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{8}\cdot\end{aligned}$$

Do đó: $(a+b)(b+c)(c+a) \geq \frac{8}{9}(a+b+c)(ab+bc+ca)$.

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Ví dụ 1. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện $(a+b)(b+c)(c+a)=1$.

Chứng minh rằng $ab+bc+ca \leq \frac{3}{4}$.

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức quen thuộc:

$(a+b)(b+c)(c+a) \geq \frac{8}{9}(a+b+c)(ab+bc+ca)$.

Theo giả thiết bài toán kết hợp với bất đẳng thức AM – GM ta có:

$$\begin{aligned}(a+b)(b+c)(c+a) &\geq \frac{8}{9}(a+b+c)(ab+bc+ca) \\ &\geq \frac{8}{9}\sqrt{3(ab+bc+ca)}.(ab+bc+ca). \\ &\Rightarrow ab+bc+ca \leq \frac{3}{4}\end{aligned}$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{2}$.

Ví dụ 2. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện $a+b+c \geq \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$.

Chứng minh rằng $\frac{1}{(2a+b+c)^2}+\frac{1}{(2b+c+a)^2}+\frac{1}{(2c+a+b)^2} \leq \frac{3}{16}$.

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức AM – GM ta có

$$(2a+b+c)^2=\left[(a+b)+(a+c)\right]^2\ge 4(a+b)(a+c)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(2a+b+c)^2}\le \frac{1}{4}.\frac{1}{(a+b)(a+c)}$$

Tương tự cho 2 phân thức còn lại đưa về chứng minh

$$\frac{1}{(a+b)(a+c)}+\frac{1}{(b+c)(b+a)}+\frac{1}{(c+a)(c+b)}\le\frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(a+b+c)}{(a+b)(b+c)(c+a)}\le\frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow (a+b)(b+c)(c+a)\ge\frac{8}{3}(a+b+c)$$

Chú ý ta có $(a+b)(b+c)(c+a)\ge\frac{8}{9}(a+b+c)(ab+bc+ca)$

Vậy ta chỉ cần chứng minh $ab+bc+ca\ge 3$.

Theo giả thiết ta có $abc(a+b+c)\ge ab+bc+ca$.

Sử dụng bất đẳng thức AM – GM ta có

$$(ab+bc+ca)^2\ge 3abc(a+b+c)\ge 3(ab+bc+ca).$$

$$\Leftrightarrow ab+bc+ca\ge 3$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Ví dụ 3. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện $ab+bc+ca\le 1$.

Chứng minh rằng $a+b+c+\sqrt{3}\ge 8abc\left(\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}+\frac{1}{c^2+1}\right)$.

Lời giải

Chú ý điều kiện bài toán $ab+bc+ca\le 1$ta có đánh giá

$$\sum\frac{1}{a^2+1}\le\sum\frac{1}{a^2+ab+bc+ca}=\sum\frac{1}{(a+b)(a+c)}=\frac{2(a+b+c)}{(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

Sử dụng bất đẳng thức $(a+b)(b+c)(c+a)\ge\frac{8}{9}(a+b+c)(ab+bc+ca)$.

Ta có $\sum\frac{1}{a^2+1}\le\frac{2(a+b+c)}{\frac{8}{9}(a+b+c)(ab+bc+ca)}=\frac{9}{4(ab+bc+ca)}$.

Vậy ta chứng minh

$$a+b+c+\sqrt{3}\geq 8abc.\frac{9}{4\left(ab+bc+ca\right)}$$

$$\Leftrightarrow\left(a+b+c\right)\left(ab+bc+ca\right)+\sqrt{3}\left(ab+bc+ca\right)\geq 18abc$$

Chú ý $abc\leq\left(\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}}\right)^3=\frac{1}{3\sqrt{3}}$.

Do đó bất đẳng thức cuối là tổng của 2 bất đẳng thức.

$$\left(a+b+c\right)\left(ab+bc+ca\right)\geq 9abc$$

$$\sqrt{3}\left(ab+bc+ca\right)\geq 3\sqrt{3}.\sqrt[3]{a^2b^2c^2}=\frac{3\sqrt{3}abc}{\sqrt[3]{abc}}\geq\frac{3\sqrt{3}abc}{\sqrt[3]{\frac{1}{3\sqrt{3}}}}=9abc\cdot$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

12.Kỹ thuật chuẩn hoá

Bất đẳng thức có dạng thuần nhất bậc k có dạng

$P(x_1,x_2,...,x_n)\geq 0$ trong đó $P(tx_1,tx_2,...,tx_n)=t^kP(x_1,x_2,...,x_n)$.

Khi đó ta có thể thực hiện

+ Chuẩn hoá cho $x^m+y^m+z^m=const$ (chuyển bài toán không có điều kiện về có điều kiện).
+ Hoặc nhân(chia) với đại lượng chứa biến để đưa bất đẳng thức về dạng thuần nhất giúp chứng minh đơn giản hơn.

Ví dụ 1. Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh

$$\sqrt[3]{\frac{\left(a+b\right)^2\left(b+c\right)^2\left(c+a\right)^2}{abc}}\geq\frac{4}{3}\left(a+b+c\right).$$

Lời giải

Bất đẳng thức có dạng thuần nhất bậc 1 ta chuẩn hoá $a+b+c=3$.

Ta cần chứng minh $\sqrt[3]{\frac{\left(a+b\right)^2\left(b+c\right)^2\left(c+a\right)^2}{abc}}\geq 4$.

$$\Leftrightarrow\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)\geq 8\sqrt{abc}$$

Chú ý

$$\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)=\left(3-a\right)\left(3-b\right)\left(3-c\right)=3\left(ab+bc+ca\right)-abc$$

$$ab+bc+ca\geq\sqrt{3abc\left(a+b+c\right)}=3\sqrt{abc}$$

Vậy ta chứng minh $9\sqrt{abc}-abc\geq 8\sqrt{abc}\Leftrightarrow abc\leq 1$.

Bất đẳng thức cuối đúng bởi vì $abc \le \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 = 1$.

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bài tập tương tự

Cho a,b,c là các số thực không âm. Chứng minh

$$\sqrt[3]{\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{8}} \ge \sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}}.$$

Ví dụ 2. Cho a,b,c là các số thực dương có tổng bằng 1. Chứng minh

$$a^2+b^2+c^2 \ge 3\left(a^2b+b^2c+c^2a\right).$$

Lời giải

Ta chuyển bất đẳng thức về dạng thuần nhất bậc ba bằng cách thay

$$a^2+b^2+c^2 = \left(a^2+b^2+c^2\right)(a+b+c).$$

Ta cần chứng minh

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)(a+b+c) \ge 3\left(a^2b+b^2c+c^2a\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(a^3+ab^2\right)+\left(b^3+bc^2\right)+\left(c^3+ca^2\right) \ge 2\left(a^2b+b^2c+c^2a\right)$$

Bất đẳng thức này là tổng của 3 bất đẳng thức

$a^3+ab^2 \ge 2a^2b; b^3+bc^2 \ge 2b^2c; c^3+ca^2 \ge 2c^2a$.

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Ví dụ 3. Cho a,b,c là các số thực dương có tổng bằng 1. Chứng minh

$$a^2+b^2+c^2+2\sqrt{3abc} \le 1.$$

Lời giải

Chú ý ta đưa bất đẳng thức về dạng thuần nhất bậc 2 bằng cách thay

$2\sqrt{3abc} = 2\sqrt{3abc(a+b+c)}$

$1 = (a+b+c)^2$

Bất đẳng thức tương đương với

$a^2+b^2+c^2+2\sqrt{3abc(a+b+c)} \le (a+b+c)^2$

$\Leftrightarrow ab+bc+ca \ge \sqrt{3abc(a+b+c)}$

$\Leftrightarrow (ab+bc+ca)^2 \ge 3abc(a+b+c)$

Bất đẳng thức cuối luôn đúng. Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Ví dụ 4. Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\ge\frac{\sqrt{3\left(a^2+b^2+c^2\right)}}{\sqrt[3]{abc}}.$$

Lời giải

Chuẩn hoá $abc=1$ ta cần chứng minh

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\ge\sqrt{3\left(a^2+b^2+c^2\right)}$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)^2\ge3\left(a^2+b^2+c^2\right)$$

$$\Leftrightarrow\frac{a^2}{b^2}+2\frac{a}{c}+\frac{b^2}{c^2}+2\frac{b}{a}+\frac{c^2}{a^2}+2\frac{c}{b}\ge3\left(a^2+b^2+c^2\right)$$

Bất đẳng thức cuối là tổng của 3 bất đẳng thức

$$\frac{a^2}{b^2}+\frac{a}{c}+\frac{a}{c}\ge3\sqrt[3]{\frac{a^4}{b^2c^2}}=3a^2$$

$$\frac{b^2}{c^2}+\frac{b}{a}+\frac{b}{a}\ge3\sqrt[3]{\frac{b^4}{a^2c^2}}=3b^2$$

$$\frac{c^2}{a^2}+\frac{c}{b}+\frac{c}{b}\ge3\sqrt[3]{\frac{c^4}{a^2b^2}}=3c^2$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Ví dụ 5. Cho a,b,c là các số thực dương chứng minh

$$\sqrt{\frac{a+b}{c}}+\sqrt{\frac{b+c}{a}}+\sqrt{\frac{c+a}{b}}\ge\sqrt{\frac{6\left(a+b+c\right)}{\sqrt[3]{abc}}}.$$

Lời giải

Bất đẳng thức có dạng thuần nhất bậc 0 chuẩn hoá $abc=1$.

Ta cần chứng minh $\sqrt{\frac{a+b}{c}}+\sqrt{\frac{b+c}{a}}+\sqrt{\frac{c+a}{b}}\ge\sqrt{6\left(a+b+c\right)}$.

Sử dụng bất đẳng thức Mincopski ta có

$$\sqrt{\frac{a+b}{c}}+\sqrt{\frac{b+c}{a}}+\sqrt{\frac{c+a}{b}}=$$

$$=\sqrt{\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{c}{b}}\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{\frac{b}{c}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{a}{c}}\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{\frac{c}{a}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2}$$

$$\geq\sqrt{\left(\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{c}}+\sqrt{\frac{c}{a}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{c}{b}}+\sqrt{\frac{a}{c}}+\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2}$$

Sử dụng bất đẳng thức trình bày trong ví dụ 4 ta có

$$\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{c}}+\sqrt{\frac{c}{a}}\geq\frac{\sqrt{3(a+b+c)}}{\sqrt[3]{\sqrt{b}.\sqrt{c}.\sqrt{a}}}=\sqrt{3(a+b+c)}$$

$$\sqrt{\frac{c}{b}}+\sqrt{\frac{a}{c}}+\sqrt{\frac{b}{a}}\geq\frac{\sqrt{3(c+a+b)}}{\sqrt[3]{\sqrt{b}.\sqrt{c}.\sqrt{a}}}=\sqrt{3(a+b+c)}$$

Suy ra điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

13.Kỹ thuật đặt ẩn phụ

Đôi khi đặt ẩn phụ đưa về biến mới giúp đánh giá AM – GM đơn giản hơn.

Ví dụ 1. Cho a, b, c là các số thực dương.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{b(a-c)}{c(a+b)}+\frac{c(3b+a)}{a(b+c)}+\frac{2c(a-b)}{b(a+c)}$.

Lời giải

Đặt $x=ab>0$; $y=bc>0$; $z=ca>0$, khi đó

$$P=\frac{x-y}{z+y}+\frac{3y+z}{x+z}+\frac{2z-2y}{x+y}.$$

Đặt $m=z+y>0$; $n=x+z>0$; $p=x+y>0$.

Suy ra $2x=n+p-m$; $2y=m+p-n$; $2z=-p+n+m$.

Khi đó $P=\left(\frac{n}{m}+\frac{2m}{n}\right)+\left(\frac{p}{n}+\frac{2n}{p}\right)-4$.

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$$P=\left(\frac{n}{m}+\frac{2m}{n}\right)+\left(\frac{p}{n}+\frac{2n}{p}\right)-4\geq 2\sqrt{\frac{n}{m}.\frac{2m}{n}}+2\sqrt{\frac{p}{n}.\frac{2n}{p}}-4=4\sqrt{2}-4.$$

Với $(a,b,c)=\left(1,1+2\sqrt{2},-5+4\sqrt{2}\right)\Rightarrow P=-4+4\sqrt{2}$.

Vì vậy $P_{\min}=-4+4\sqrt{2}$.

Ví dụ 2. Cho x,y,z là các số thực lớn hơn 1 và thoả mãn điều kiện

$$xy+yz+zx+xyz=20.$$

Chứng minh rằng $\frac{3}{x+y+z-3} \ge (x-1)(y-1)(z-1)$.

Lời giải

Đặt $a = x-1, b = y-1, c = z-1; a,b,c > 0$ ta cần chứng minh $abc(a+b+c) \le 3$.

Chú ý giả thiết bài toán trở thành:

$(a+1)(b+1)+(b+1)(c+1)+(c+1)(a+1)+(a+1)(b+1)(c+1) = 20$

$\Leftrightarrow ab+bc+ca+2(a+b+c)+3+abc+a+b+c+ab+bc+ca+abc = 20$

$\Leftrightarrow 3(a+b+c)+2(ab+bc+ca)+2abc = 17$

Sử dụng bất đẳng thức AM – GM ta có $2(ab+bc+ca) \ge 2\sqrt{3abc(a+b+c)}$

$\frac{2}{3}\left(\frac{a+b+c}{3}+abc\right) \ge \frac{4}{3}\sqrt{\frac{abc(a+b+c)}{3}}$

$\frac{7(a+b+c)}{3} = \frac{7}{3}\sqrt[4]{(a+b+c)^3.(a+b+c)} \ge \frac{7}{3}\sqrt[4]{27abc.(a+b+c)}$

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên suy ra

$2\sqrt{3abc(a+b+c)}+\frac{4}{3}\sqrt{\frac{abc(a+b+c)}{3}}+\frac{7}{3}\sqrt[4]{27abc.(a+b+c)} \le 17$

Vế trái là hàm đồng biến với $abc(a+b+c)$ từ đó suy ra $abc(a+b+c) \le 3$.

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 2$.

14.Kỹ thuật lựa chọn điểm rơi

Đánh giá bất đẳng thức điều kiện tiên quyết là đảm bảo dấu bằng. Do vậy với bất đẳng thức đối xứng các biến thường bằng nhau đây là cơ sở cho việc ta áp dụng bất đẳng thức AM – GM cho các số dương hợp lý.

Trong trường hợp khó đoán biến dấu bằng xảy ra tại đây ta có thể sử dụng tham số hoá hoặc giải phương trình đạo hàm riêng.

Chi tiết hơn về về phương pháp này xem chủ đề tham số hoá.

Ví dụ 1. Cho a,b,c là các số thực dương có tổng bằng 1. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \sqrt[3]{a+b}+\sqrt[3]{b+c}+\sqrt[3]{c+a}$.

Lời giải

<u>Phân tích tìm lời giải:</u>

Biểu thức đối xứng 3 biến dấu bằng đạt tại $a = b = c = \frac{a+b+c}{3} = \frac{1}{3} \Rightarrow \begin{cases} a+b = \frac{2}{3} \\ b+c = \frac{2}{3} \\ c+a = \frac{2}{3} \end{cases}$.

Do đó lựa chọn các số $\frac{2}{3}$ ghép cặp với từng tổng $(a+b),(b+c),(c+a)$.

<u>Lời giải chi tiết:</u>

Sử dụng bất đẳng thức AM – GM cho 3 số dương ta có

$$\sqrt[3]{a+b}=\sqrt[3]{\frac{9}{4}}.\sqrt[3]{(a+b).\frac{2}{3}.\frac{2}{3}}\le\sqrt[3]{\frac{9}{4}}.\frac{a+b+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}}{3};$$

$$\sqrt[3]{b+c}=\sqrt[3]{\frac{9}{4}}.\sqrt[3]{(b+c).\frac{2}{3}.\frac{2}{3}}\le\sqrt[3]{\frac{9}{4}}.\frac{b+c+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}}{3};$$

$$\sqrt[3]{c+a}=\sqrt[3]{\frac{9}{4}}.\sqrt[3]{(c+a).\frac{2}{3}.\frac{2}{3}}\le\sqrt[3]{\frac{9}{4}}.\frac{c+a+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}}{3}.$$

Cộng theo vế 3 bất đẳng thức trên ta được $\sqrt[3]{a+b}+\sqrt[3]{b+c}+\sqrt[3]{c+a}\le\sqrt[3]{18}$.

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng $\sqrt[3]{18}$ dấu bằng đạt tại $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Bài tập tương tự

Cho a,b,c là các số thực dương có tổng bằng 1. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\sqrt[3]{2a+3b}+\sqrt[3]{2b+3c}+\sqrt[3]{2c+3a}$.

Ví dụ 2. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện $a^2+b^2+c^2=1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=a+b+c+\frac{1}{abc}$.

Lời giải

<u>Phân tích tìm lời giải:</u>

Dấu bằng đạt tại $a=b=c=\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow\frac{1}{abc}=3\sqrt{3}$.

Vậy tách ghép cặp như sau: $a+b+c+\frac{1}{abc}=\left(a+b+c+\frac{1}{9abc}\right)+\frac{8}{9abc}$.

<u>Lời giải chi tiết:</u>

Sử dụng bất đẳng thức AM – GM ta có

$$P=\left(a+b+c+\frac{1}{9abc}\right)+\frac{8}{9abc}\ge4\sqrt[4]{a.b.c.\frac{1}{9abc}}+\frac{8}{9\left(\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}\right)^3}=4\sqrt{3}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $4\sqrt{3}$ đạt tại $a=b=c=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Ví dụ 3. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện $a+b+c\le\frac{3}{2}$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=a^2+b^2+c^2+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$.

Lời giải

Phân tích tìm lời giải:

Dấu bằng đạt tại $a=b=c=\frac{1}{2}\Rightarrow\begin{cases}a^2=b^2=c^2=\frac{1}{4}\\ \frac{1}{a}=\frac{1}{b}=\frac{1}{c}=2\end{cases}$.

Vậy cần tách ghép như sau: $a^2+b^2+c^2+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$

$$=\left(a^2+\frac{1}{8a}+\frac{1}{8a}\right)+\left(b^2+\frac{1}{8b}+\frac{1}{8b}\right)+\left(c^2+\frac{1}{8c}+\frac{1}{8c}\right)+\frac{3}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

Lời giải chi tiết:

Sử dụng bất đẳng thức AM – GM cho 3 số dương ta có

$$\begin{aligned}P&=\left(a^2+\frac{1}{8a}+\frac{1}{8a}\right)+\left(b^2+\frac{1}{8b}+\frac{1}{8b}\right)+\left(c^2+\frac{1}{8c}+\frac{1}{8c}\right)+\frac{3}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\\&\ge3\sqrt[3]{a^2.\frac{1}{8a}.\frac{1}{8a}}+3\sqrt[3]{b^2.\frac{1}{8b}.\frac{1}{8b}}+3\sqrt[3]{c^2.\frac{1}{8c}.\frac{1}{8c}}+\frac{9}{4\sqrt[3]{abc}}\\&\ge\frac{9}{4}+\frac{9}{4.\frac{a+b+c}{3}}\ge\frac{27}{4}\end{aligned}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\frac{27}{4}$ đạt tại $a=b=c=\frac{1}{2}$.

Cách 2: Ta có

$$\begin{aligned}P&\ge\frac{1}{3}(a+b+c)^2+\frac{9}{a+b+c}\\&=\frac{\left(2(a+b+c)-3\right)\left(2(a+b+c)^2+3(a+b+c)-36\right)}{12(a+b+c)}+\frac{27}{4}\ge\frac{27}{4}\end{aligned}.$$

Ví dụ 4. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện $a^2+b^2+c^2=12$.

Chứng minh rằng $a\sqrt[3]{b^2+c^2}+b\sqrt[3]{c^2+a^2}+c\sqrt[3]{a^2+b^2}\le24$.

Lời giải

Dấu bằng đạt tại $a=b=c=2$. Khi đó $4a=2a^2=b^2+c^2$ ta sử dụng bất đẳng thức AM – GM như sau:

$$a\sqrt[3]{b^2+c^2}=\frac{\sqrt[3]{4a.2a^2.\left(b^2+c^2\right)}}{2}\le\frac{4a+2a^2+b^2+c^2}{6}$$

$$b\sqrt[3]{c^2+a^2}=\frac{\sqrt[3]{4b.2b^2.\left(c^2+a^2\right)}}{2}\le\frac{4b+2b^2+c^2+a^2}{6}.$$

$$c\sqrt[3]{a^2+b^2}=\frac{\sqrt[3]{4c.2c^2.\left(a^2+b^2\right)}}{2}\le\frac{4c+2c^2+a^2+b^2}{6}$$

Cộng theo vế 3 bất đẳng thức trên chú ý $a+b+c\le\sqrt{3\left(a^2+b^2+c^2\right)}=6$ ta có điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=2$.

Ví dụ 5. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện $\begin{cases}a+b+c=9\\ a\ge 5, a+b\ge 8\end{cases}$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=abc$.

Lời giải

Từ điều kiện ta dự đoán dấu bằng đạt tại $a=5,b=3,c=1$. Vì vậy viết lại P và sử dụng AM – GM cho ba số dương từ trung bình nhân sang trung bình cộng.

Ta có $a\ge 5\Rightarrow b+c\le 4; a+b\ge 8\Rightarrow c\le 1$.

Sử dụng bất đẳng thức AM – GM cho ba số dương ta được:

$$P=\frac{1}{15}.\left(3a.5b.15c\right)\le\frac{1}{15}\left(\frac{3a+5b+15c}{3}\right)^3$$

$$=\frac{1}{15}\left[\frac{3\left(a+b+c\right)+2\left(b+c\right)+10c}{3}\right]^3\le\frac{1}{15}\left(\frac{3.9+2.4+10.1}{3}\right)^3=15$$

Với $a=5,b=3,c=1$ thì P bằng 15. Vậy giá trị lớn nhất của P bằng 15.

Ví dụ 6. Cho a,b,c là các số thực dương có tổng bằng 1. Chứng minh

$$\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{abc}\ge 30.$$

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức AM - GM ta có

$$VT=\left(\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{9abc}+\frac{1}{9abc}\right)+\frac{7}{9abc}\ge 3\sqrt[3]{\frac{1}{\left(a^2+b^2+c^2\right).9abc.9abc}}+\frac{7}{9abc}.$$

Ta có $\left(a^2+b^2+c^2\right).3ab.3bc.3ca\le\left[\frac{a^2+b^2+c^2+3\left(ab+bc+ca\right)}{4}\right]^4$

$$=\left[\frac{(a+b+c)^2+ab+bc+ca}{4}\right]^4 \le \left(\frac{1+\frac{1}{3}}{4}\right)^4=\frac{1}{81}.$$

Chú ý $abc \le \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3=\frac{1}{27}$.

Từ đó suy ra đpcm.

<u>Cách 2:</u> Ta có: $3(ab+bc+ca)\le (a+b+c)^2 \Rightarrow \frac{1}{ab+bc+ca}\ge \frac{3}{(a+b+c)^2}$

Mặt khác: $(ab+bc+ca)(a+b+c)\ge 9abc \Rightarrow \frac{1}{abc}\ge \frac{9}{ab+bc+ca}$

Do đó:

$$\begin{aligned} P &\ge \frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{ab+bc+ca}+\frac{1}{ab+bc+ca}+\frac{7}{ab+bc+ca}\\ &\ge \frac{9}{(a+b+c)^2}+\frac{21}{(a+b+c)^2}=30 \end{aligned}$$

Ta có đpcm.

B. BÀI TOÁN CHỌN LỌC

Bài 1. Cho *a,b,c* là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $b\ge a>c>0$.

Chứng minh rằng $\sqrt{ab}+\frac{c(a-b)}{\sqrt{ab}}+\frac{1}{c(a-c)}\ge 3$.

Lời giải

Nhận xét. Ta chứng minh bất đẳng thức quen thuộc sau đây:

$$\sqrt{ab}\ge \sqrt{c(a-c)}+\sqrt{b(b-c)}.$$

Thật vậy bất đẳng thức tương đương với: $\sqrt{\frac{c(a-c)}{ab}}+\sqrt{\frac{c(b-c)}{ab}}\le 1$.

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM cho 2 số dương ta có

$$\sqrt{\frac{c(a-c)}{ab}}+\sqrt{\frac{c(b-c)}{ab}}\le \frac{1}{2}\left(\frac{c}{b}+\frac{a-c}{a}+\frac{c}{a}+\frac{b-c}{b}\right)=1.$$

Ta có điều phải chứng minh.

Giờ ta áp dụng vào bài

$$\sqrt{ab}+\frac{c\left(a-b\right)}{\sqrt{ab}}+\frac{1}{c\left(a-c\right)}=\sqrt{ab}+\frac{c\left(a-c\right)-c\left(b-c\right)}{\sqrt{ab}}+\frac{1}{c\left(a-c\right)}$$

$$\geq\sqrt{c\left(a-c\right)}+\sqrt{c\left(b-c\right)}+\frac{c\left(a-c\right)-c\left(b-c\right)}{\sqrt{c\left(a-c\right)}+\sqrt{c\left(b-c\right)}}+\frac{1}{c\left(a-c\right)}$$

$$=\sqrt{c\left(a-c\right)}+\sqrt{c\left(b-c\right)}+\sqrt{c\left(a-c\right)}-\sqrt{c\left(b-c\right)}+\frac{1}{c\left(a-c\right)}$$

$$=2\sqrt{c\left(c-a\right)}+\frac{1}{c\left(a-c\right)}=\sqrt{c\left(a-c\right)}+\sqrt{c\left(a-c\right)}+\frac{1}{c\left(a-c\right)}$$

$$\geq 3\sqrt[3]{\sqrt{c\left(a-c\right)}.\sqrt{c\left(a-c\right)}.\frac{1}{c\left(a-c\right)}}=3$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}a=b=2\\c=1\end{cases}$.

Bài 2. Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c=3$.

Chứng minh rằng $\sqrt{\frac{a+b}{c+ab}}+\sqrt{\frac{b+c}{a+bc}}+\sqrt{\frac{c+a}{b+ac}}\geq 3$.

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$$\sqrt{\frac{a+b}{c+ab}}+\sqrt{\frac{b+c}{a+bc}}+\sqrt{\frac{c+a}{b+ac}}\geq 3\sqrt[6]{\frac{a+b}{c+ab}.\frac{b+c}{a+bc}.\frac{c+a}{b+ca}}.$$

Ta chỉ cần chứng minh $\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)\geq\left(a+bc\right)\left(b+ca\right)\left(c+ab\right)$.

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$$\left(a+bc\right)\left(b+ca\right)\leq\left(\frac{a+bc+b+ca}{2}\right)^2=\frac{\left(a+b\right)^2\left(c+1\right)^2}{4}.$$

Tương tự ta có:

$$\left(b+ca\right)\left(c+ab\right)\leq\frac{\left(b+c\right)^2\left(a+1\right)^2}{4};\left(c+ab\right)\left(a+bc\right)\leq\frac{\left(a+c\right)^2\left(b+1\right)^2}{4}.$$

Nhân theo vế 3 bất đẳng thức trên ta được

$$\left[\left(a+bc\right)\left(b+ca\right)\left(c+ab\right)\right]^2\leq\left[\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)\right]^2.\frac{\left(a+1\right)^2\left(b+1\right)^2\left(c+1\right)^2}{64}.$$

Để kết thúc bài toán ta chỉ cần chứng minh $\frac{\left(a+1\right)^2\left(b+1\right)^2\left(c+1\right)^2}{64}\leq 1$ (luôn đúng).

Vì $\left(a+1\right)\left(b+1\right)\left(c+1\right)\leq\left(\frac{a+1+b+1+c+1}{3}\right)^3=8$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

<u>Bài tập tương tự</u>

Cho a,b,c là các số thực dương có tổng bằng 1. Chứng minh

$$\sqrt{\frac{a+b}{c+ab}}+\sqrt{\frac{b+c}{a+bc}}+\sqrt{\frac{c+a}{b+ac}}\ge 3\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Bài 3. Cho a,b,c là các số thực không âm thoả mãn điều kiện $ab+bc+ca>0$.

Chứng minh rằng $\sqrt{\frac{1+a^2}{b+c}}+\sqrt{\frac{1+b^2}{c+a}}+\sqrt{\frac{1+c^2}{a+b}}\ge 3$.

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức AM – GM cho 3 số dương ta được

$$\sqrt{\frac{1+a^2}{b+c}}+\sqrt{\frac{1+b^2}{c+a}}+\sqrt{\frac{1+c^2}{a+b}}\ge 3\sqrt[6]{\frac{\left(1+a^2\right)\left(1+b^2\right)\left(1+c^2\right)}{(a+b)(b+c)(c+a)}}.$$

Vậy ta chứng minh $\frac{\left(1+a^2\right)\left(1+b^2\right)\left(1+c^2\right)}{(a+b)(b+c)(c+a)}\ge 1$

$$\Leftrightarrow \left(1+a^2\right)\left(1+b^2\right)\left(1+c^2\right)\ge (a+b)(b+c)(c+a).$$

Sử dụng bất đẳng thức C –S ta có $\left(1+a^2\right)\left(1+b^2\right)\ge (a+b)^2$;

$$\left(1+b^2\right)\left(1+c^2\right)\ge (b+c)^2;$$

$$\left(1+c^2\right)\left(1+a^2\right)\ge (a+c)^2.$$

Nhân theo vế 3 bất đẳng thức trên ta có điều phải chứng minh.

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bài 4. Cho a,b,c là các số thực không âm thoả mãn điều kiện $ab+bc+ca>0$.

Chứng minh rằng $\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}}\ge 2$.

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức AM –GM ta có $(a+b+c)^2\ge 4a(b+c)$

$$\Rightarrow \frac{a}{b+c}\ge \frac{4a^2}{(a+b+c)^2}\Rightarrow \sqrt{\frac{a}{b+c}}\ge \frac{2a}{a+b+c}.$$

Tương tự ta có $\sqrt{\frac{b}{c+a}}\ge \frac{2b}{a+b+c}$

$$\sqrt{\frac{c}{a+b}}\ge \frac{2c}{a+b+c}$$

Cộng theo vế 3 bất đẳng thức trên ta được

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}}\ge 2\left(\frac{a}{a+b+c}+\frac{b}{a+b+c}+\frac{c}{a+b+c}\right)=2.$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi có 1 số bằng 0 và 2 số còn lại bằng nhau.

Nhận xét. Ngoài lời giải trên ta có thể chứng minh bất đẳng này bằng biến đổi tương đương, bất đẳng thức Holder hoặc Bernuoli.

Bài 5. Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh

$$\sqrt[3]{\left(\frac{2a}{b+c}\right)^2}+\sqrt[3]{\left(\frac{2b}{c+a}\right)^2}+\sqrt[3]{\left(\frac{2c}{a+b}\right)^2}\ge 3.$$

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức AM – GM cho 3 số dương ta có

$$\sqrt[3]{\left(\frac{2a}{b+c}\right)^2}=\frac{a}{\sqrt[3]{a.\frac{b+c}{2}.\frac{b+c}{2}}}\ge\frac{a}{\frac{a+\frac{b+c}{2}+\frac{b+c}{2}}{3}}=\frac{3a}{a+b+c}$$

$$\sqrt[3]{\left(\frac{2b}{c+a}\right)^2}=\frac{b}{\sqrt[3]{b.\frac{c+a}{2}.\frac{c+a}{2}}}\ge\frac{b}{\frac{b+\frac{c+a}{2}+\frac{c+a}{2}}{3}}=\frac{3b}{a+b+c}$$

$$\sqrt[3]{\left(\frac{2c}{a+b}\right)^2}=\frac{c}{\sqrt[3]{c.\frac{a+b}{2}.\frac{a+b}{2}}}\ge\frac{c}{\frac{c+\frac{a+b}{2}+\frac{a+b}{2}}{3}}=\frac{3c}{a+b+c}$$

Cộng theo vế 3 bất đẳng thức trên ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bài 6. Chứng minh rằng với mọi a,b,c dương ta có

$$\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}\right)\left(\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)\left(\frac{c}{a+b}+\frac{a}{b+c}\right)\ge 1.$$

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức AM –GM cho 2 số dương ta có

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}=\frac{a}{b+c}+1+\frac{b}{c+a}+1-2$$
$$=(a+b+c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)-2$$

$$\geq \frac{2(a+b+c)}{\sqrt{(b+c)(c+a)}}-2=\frac{(a+b)+(a+c)+(b+c)}{\sqrt{(b+c)(c+a)}}-2$$

$$\geq \frac{a+b+2\sqrt{(a+c)(b+c)}}{\sqrt{(a+c)(b+c)}}-2=\frac{a+b}{\sqrt{(a+c)(b+c)}}$$

Tương tự ta có $\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq \frac{b+c}{\sqrt{(c+a)(a+b)}}$.

$$\frac{c}{a+b}+\frac{a}{b+c}\geq \frac{c+a}{\sqrt{(a+b)(b+c)}}$$

Nhân theo vế 3 bất đẳng thức trên ta có điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bài 7. Cho a,b,c,x,y,z là các số thực dương thoả mãn điều kiện

$$(a+b+c)(x+y+z)=\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)=4.$$

Chứng minh rằng $abcxyz<\frac{1}{36}$.

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức AM – GM ta có

$$4(ab+bc+ca)(xy+yz+zx)$$

$$=\left[(a+b+c)^2-\left(a^2+b^2+c^2\right)\right]\left[(x+y+z)^2-\left(x^2+y^2+z^2\right)\right]$$

$$=20-\left[(a+b+c)^2\left(x^2+y^2+z^2\right)+\left(a^2+b^2+c^2\right)(x+y+z)^2\right]$$

$$\leq 20-2(a+b+c)(c+y+z)\sqrt{\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)}=4$$

Do đó $(ab+bc+ca)(xy+yz+zx)\leq 1$.

Mặt khác $(ab+bc+ca)^2\geq 3abc(a+b+c)$.

$$(xy+yz+zx)^2\geq 3xyz(x+y+z)$$

Nhận theo vế 2 bất đẳng thức trên ta được

$$9abcxyz(a+b+c)(x+y+z)\leq 1\Leftrightarrow abcxyz\leq \frac{1}{36}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c;x=y=z$ khi đó trái với giả thiết

$$(a+b+c)(x+y+z)=\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)=4.$$

Vậy $abcxyz<\frac{1}{36}$.

Bài 8. Cho $a,b,c>-1.$ Chứng minh $\frac{1+a^2}{1+b+c^2}+\frac{1+b^2}{1+c+a^2}+\frac{1+c^2}{1+a+b^2}\ge 2$.

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức AM – GM ta có $1+b+c^2>0, 1+b+c^2\le 1+\frac{1+b^2}{2}+c^2$.

Suy ra $\frac{1+a^2}{1+b+c^2}\ge \frac{2\left(1+a^2\right)}{1+b^2+2\left(1+c^2\right)}$.

Tương tự ta có $\frac{1+b^2}{1+c+a^2}\ge \frac{2\left(1+b^2\right)}{1+c^2+2\left(1+a^2\right)}$

$$\frac{1+c^2}{1+a+b^2}\ge \frac{2\left(1+c^2\right)}{1+a^2+2\left(1+b^2\right)}$$

Cộng theo vế 3 bất đẳng thức trên và đặt $x=a^2+1, y=b^2+1, z=c^2+1$ ta được

$$\frac{1+a^2}{1+b+c^2}+\frac{1+b^2}{1+c+a^2}+\frac{1+c^2}{1+a+b^2}\ge \frac{2x}{y+2z}+\frac{2y}{z+2x}+\frac{2z}{x+2y}.$$

Sử dụng bất đẳng thức C – S ta có

$$\frac{x}{y+2z}+\frac{y}{z+2x}+\frac{z}{x+2y}\ge \frac{(x+y+z)^2}{x(y+2z)+y(z+2x)+z(x+2y)}$$

$$=\frac{(x+y+z)^2}{3(xy+yz+zx)}\ge \frac{3(xy+yz+zx)}{3(xy+yz+zx)}=1$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài 9. Cho a,b,c là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $ab+2bc+3ca=6$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=(a+b)(b+c)(c+a)+4a+b+c$.

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$P\ge 2\sqrt{(a+b)(b+c)(c+a).(4a+b+c)}$.

Mặt khác sử dụng bất đẳng thức C-S ta có

$$(a+b)(b+c)(c+a).(4a+b+c)=\left[a(b+c)^2+b(c-a)^2+c(a+b)^2\right].(4a+b+c)$$

$$\ge\left[2a(b+c)+b(c-a)+c(a+b)\right]^2$$

$$=(ab+2bc+3ca)^2=36$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=1, b=0, c=2$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 12 đạt tại $a=1, b=0, c=2$.

Bài 10. Cho các số thực *a,b,c* thuộc đoạn $[0;1]$.

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P=a^5b^5c^5\left(3(ab+bc+ca)-8abc\right)$.

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$3(ab+bc+ca)\ge 3.3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}=9\sqrt[3]{a^2b^2c^2}\ge 9abc\ge 8abc.$$

Suy ra $P\ge 0$. Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 0 xảy ra khi có ít nhất một số bằng 0.

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta được:

$$P=abc.abc.abc.abc.abc\left[3(ab+bc+ca)-8abc\right]$$

$$\le\left[\frac{3(ab+bc+ca)-8abc+5abc}{6}\right]^6=\frac{(ab+bc+ca-abc)^6}{2^6}.$$

Mặt khác:

$$\begin{aligned}ab+bc+ca-abc&=a(b+c-bc)+bc=a\left[b+c(1-b)\right]+bc\\&\le b+c-bc+bc=b+c\le 2\end{aligned}.$$

Do đó $P\le 1$. Vậy giá trị lớn nhất của P bằng 1 xảy ra khi $a=b=c=1$.

Bài 11. Cho *a,b,c* là các số thực dương có tích bằng 1. Chứng minh

$$(a+b)(b+c)(c+a)\ge\frac{7}{3}(a+b+c)+1.$$

Lời giải

Sử dụng bổ đề. $(a+b)(b+c)(c+a)\ge\frac{8}{9}(a+b+c)(ab+bc+ca), \forall a,\mathrm{b},\mathrm{c}\ge 0$ ta được:

$$\begin{aligned}(a+b)(b+c)(c+a)&\ge\frac{8}{9}(a+b+c)(ab+bc+ca)\ge\frac{8}{9}(a+b+c).3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}\\&=\frac{8}{3}(a+b+c)=\frac{7}{3}(a+b+c)+\frac{1}{3}(a+b+c)\\&\ge\frac{7}{3}(a+b+c)+\sqrt[3]{abc}=\frac{7}{3}(a+b+c)+1\end{aligned}$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Nhận xét. Ngoài ra ta có bất đẳng thức mạnh hơn như sau. Với giả thiết cùng điều kiện bài toán ta có $(a+b)(b+c)(c+a)\ge 4(a+b+c-1)$.

Chứng minh.

Ta có:

$$\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)=\left(a+b+c\right)\left(ab+bc+ca\right)-abc=\left(a+b+c\right)\left(ab+bc+ca\right)-1$$

Mặt khác:

$$\left(ab+bc+ca\right)^2\geq 3abc\left(a+b+c\right)=3\left(a+b+c\right)\Rightarrow ab+bc+ca\geq\sqrt{3\left(a+b+c\right)}.$$

Vậy bài toán được chứng minh nếu bất đẳng thức sau đúng:

$$\left(a+b+c\right)\sqrt{3\left(a+b+c\right)}-1\geq 4\left(a+b+c-1\right).$$

Thật vậy, đặt $t=\sqrt{a+b+c},\left(t\geq\sqrt{3}\right)$. Xét hàm số $f(t)=\sqrt{3}t^3-4t^2+3$ với $t\geq\sqrt{3}$.

Ta có $f'(t)=3\sqrt{3}t^2-8t>0,\forall t\geq\sqrt{3}$ nên $f(t)$ đồng biến trên $\left[\sqrt{3};+\infty\right)$ hay $f(t)\geq f(\sqrt{3})=0$.

Do đó $\left(a+b+c\right)\sqrt{3\left(a+b+c\right)}-1\geq 4\left(a+b+c-1\right)$.

Bất đẳng thức được chứng minh. Ngoài ra bài toán trên có thể thực hiện bằng phương pháp dồn biến(xem chương 4).

Bài 15. Cho *x,y,z* là các số thực dương thỏa mãn điều kiện

$$\left(x+y\right)\left(y+z\right)\left(z+x\right)=8.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{2}{\sqrt[3]{xyz}}+\dfrac{1}{x+2y}+\dfrac{1}{y+2z}+\dfrac{1}{z+2x}$.

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$\frac{1}{x+2y}+\frac{1}{y+2z}+\frac{1}{z+2x}\geq\frac{9}{x+2y+y+2z+z+2x}=\frac{3}{x+y+z}.$$

Mặt khác:

$$\left(x+y\right)\left(y+z\right)\left(z+x\right)\geq\frac{8}{9}\left(x+y+z\right)\left(xy+yz+zx\right)\Rightarrow x+y+z\leq\frac{9}{xy+yz+zx}.$$

Suy ra

$$P\geq\frac{2}{\sqrt[3]{xyz}}+\frac{xy+yz+zx}{3}\geq\frac{2}{\sqrt[3]{xyz}}+\sqrt[3]{x^2y^2z^2}=\frac{1}{\sqrt[3]{xyz}}+\frac{1}{\sqrt[3]{xyz}}+\sqrt[3]{x^2y^2z^2}\geq 3.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 3 đạt tại $x=y=z=1$.

Bài 16. Cho *a,b,c* là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $a+b+c=3$.

Chứng minh rằng $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\geq ab+bc+ca$.

Lời giải

Ta có: $2\left(ab+bc+ca\right)=\left(a+b+c\right)^2-\left(a^2+b^2+c^2\right)=9-\left(a^2+b^2+c^2\right)$.

Vậy ta chứng minh bất đẳng thức: $a^2+b^2+c^2+2\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)\ge 9$.

Theo bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$a^2+\sqrt{a}+\sqrt{a}\ge 3a, b^2+\sqrt{b}+\sqrt{b}\ge 3b, c^2+\sqrt{c}+\sqrt{c}\ge 3c.$$

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên ta được:

$$a^2+b^2+c^2+2\sqrt{a}+2\sqrt{b}+2\sqrt{c}\ge 3(a+b+c)=9.$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bài 17. Cho *x,y,z,t* là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $x+y+z+t=4$.

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=x\sqrt{3+yz}+y\sqrt{3+zt}+z\sqrt{3+tx}+t\sqrt{3+xy}.$$

Lời giải

Do x,y,z,t không âm nên

$$P\ge x\sqrt{3}+y\sqrt{3}+z\sqrt{3}+t\sqrt{3}=(x+y+z+t)\sqrt{3}=4\sqrt{3}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $4\sqrt{3}$ đạt tại $x=4, y=z=t=0$ hoặc các hoán vị.

Để tìm giá trị lớn nhất của P ta sử dụng bất đẳng thức AM-GM cho hai số dương:

$$P=\frac{1}{2}\left(2\sqrt{x}\sqrt{3x+xyz}+2\sqrt{y}\sqrt{3y+yzt}+2\sqrt{z}\sqrt{3z+ztx}+2\sqrt{t}\sqrt{3t+txy}\right)$$

$$\le\frac{1}{4}\left(4x+3x+xyz+4y+3y+yzt+4z+3z+ztx+4t+3t+txy\right)$$

$$=\frac{7}{4}(x+y+z+t)+\frac{1}{4}(xyz+yzt+ztx+txy)=7+\frac{1}{4}(xyz+yzt+ztx+txy)$$

Mặt khác:

$$xyz+yzt+ztx+txy=xy(z+t)+zt(x+y)\le\left(\frac{x+y}{2}\right)^2(z+t)+\left(\frac{z+t}{2}\right)^2(x+y)$$

$$=\frac{1}{4}(x+y)(z+t)(x+y+z+t)=(x+y)(z+t)\le\left(\frac{x+y+z+t}{2}\right)^2=4$$

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng 8 đạt tại $x=y=z=t=1$.

Bài 18. Cho các số thực *a,b,c* thay đổi thỏa mãn điều kiện $a^2+b^2+c^2=1$.

Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=a^3+b^3+c^3-3abc.$$

Lời giải

Ta có: $P=(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\right)=(a+b+c)(1-ab-bc-ca)$.

Suy ra: $P^2=(a+b+c)^2(1-ab-bc-ca)^2$

$$=(1+2ab+2bc+2ca)(1-ab-bc-ca)(1-ab-bc-ca)$$

Do $ab+bc+ca \le a^2+b^2+c^2=1$ nên các số trong tích của P^2 không âm ta sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta được:

$$P^2 \le \left(\frac{1+2ab+2bc+2ca+2(1-ab-bc-ca)}{3}\right)^3 = 1.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng -1 đạt tại $a=-1, b=c=0$ hoặc các hoán vị.

Giá trị lớn nhất của P bằng 1 đạt tại $a=1, b=c=0$ hoặc các hoán vị.

Bài 19. Cho *a,b,c* là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $a+b+c=1$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\left(a^3+b^3\right)\left(b^3+c^3\right)\left(c^3+a^3\right)$.

Lời giải

Không mất tính tổng quát ta giả sử $c=\min\{a,b,c\}$.

Khi đó :

$$P \le \left(a^3+b^3\right)\left(b^3+b^2c\right)\left(a^3+a^2c\right) = (a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)(a+c)(b+c)a^2b^2$$

$$=(a+b)(b+c)(c+a)\left(a^2-ab+b^2\right)a^2b^2$$

Mặt khác:

$$(a+b)(b+c)(c+a)=(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc \le (a+b+c)(ab+bc+ca)$$

Suy ra:

$$P \le (a+b+c)(ab+bc+ca)\left(a^2-ab+b^2\right)a^2b^2$$

$$\le (a+b+c).\left(\frac{ab+bc+ca+a^2-ab+b^2+ab+ab}{4}\right)^4$$

$$=\frac{(a+b+c)\left[(a+b)^2+c(a+b)\right]}{256}=\frac{(a+b)^4(a+b+c)^5}{256} \le \frac{(a+b+c)^9}{256}=\frac{1}{256}$$

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng $\frac{1}{256}$ đạt tại $a=b=\frac{1}{2}, c=0$ hoặc các hoán vị.

Bài 20. Cho *a,b,c,d,e,f* là các số thực không âm có tổng bằng 1 và $ace+bdf \ge \frac{1}{108}$.

Chứng minh rằng $abc+bcd+cde+def+efa+fba \le \frac{1}{36}$.

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM cho ba số dương ta được:

$$abc+bcd+cde+def+efa+fba+ace+bdf=(a+d)(b+e)(c+f)$$

$$\le \left(\frac{a+d+b+e+c+f}{3}\right)^3=\frac{1}{27}$$

Suy ra $abc+bcd+cde+def+efa+fba\le\frac{1}{27}-\left(ace+bdf\right)\le\frac{1}{27}-\frac{1}{108}=\frac{1}{36}$.

Bất đẳng thức được chứng.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=d=e=f=\frac{1}{6}$.

Bài 21. Cho các số thực không âm *a,b,c* thỏa mãn điều kiện $ab+bc+ca>0$ và $a+2b+3c=4$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{1}{\sqrt{ab+bc+ca}}+\frac{1}{\sqrt{ab+bc+c^2}}$.

Lời giải

Nhận xét. Để P nhỏ nhất từ $a+2b+3c=4$ ta sẽ suy ra a lớn nhất và c nhỏ nhất.

Dự đoán với $c=0\Rightarrow P=\frac{1}{\sqrt{ab}}+\frac{1}{\sqrt{ab}}=\frac{2}{\sqrt{ab}}, a+2b=4$. P lúc này đạt giá trị nhỏ nhất tại $a=2,b=1$.

Ta có:

$$P=\frac{1}{\sqrt{ab+bc+ca}}+\frac{1}{\sqrt{ab+bc+c^2}}\ge\frac{2}{\sqrt[4]{\left(ab+bc+ca\right)\left(ab+bc+c^2\right)}}$$

$$\ge\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2ab+2bc+ca+c^2}}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\left(a+c\right)\left(2b+c\right)}}\ge\frac{4\sqrt{2}}{a+2b+2c}\ge\frac{4\sqrt{2}}{a+2b+3c}=\sqrt{2}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\sqrt{2}$ xảy ra khi

$$\begin{cases}c=0\\2b+c=a+c\\ab+bc+ca=ab+bc+c^2\\a+2b+3c=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\b=1\\c=0\end{cases}.$$

Bài 22. Cho *a,b,c* là các số thực thỏa mãn $0<a\le b\le c$ và

$$\frac{a^2-1}{a}+\frac{b^2-1}{b}+\frac{c^2-1}{c}=0.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=a+b^{2014}+c^{2015}$.

Lời giải

Từ $0<a\le b\le c$ suy ra $0=\frac{a^2-1}{a}+\frac{b^2-1}{b}+\frac{c^2-1}{c}\ge 3.\frac{a^2-1}{a}$

$\Rightarrow a\le 1$ và $0\le 3.\frac{c^2-1}{c}\Rightarrow c\ge 1$.

Ta có:

$$\frac{b^2-1}{b}+\frac{c^2-1}{c}=\frac{1-a^2}{a}\ge 0\Rightarrow b+c-\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\ge 0\Leftrightarrow (b+c)\left(1-\frac{1}{bc}\right)\ge 0\Leftrightarrow bc\ge 1.$$

Mặt khác:

$$\frac{c^2-1}{c}=\frac{1-a^2}{a}+\frac{1-b^2}{b}=(a+b)\left(\frac{1}{ab}-1\right)\ge 2\sqrt{ab}\left(\frac{1}{ab}-1\right)$$

$$=2\left(\frac{1}{\sqrt{ab}}-\sqrt{ab}\right)\ge\frac{1}{\sqrt{ab}}-\sqrt{ab}$$

Suy ra $c-\frac{1}{c}\ge\frac{1}{\sqrt{ab}}-\sqrt{ab}\Leftrightarrow\left(c-\frac{1}{\sqrt{ab}}\right)\left(1+\frac{\sqrt{ab}}{c}\right)\ge 0\Leftrightarrow c\ge\frac{1}{\sqrt{ab}}\Leftrightarrow abc^2\ge 1$.

Khi đó sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta được:

$$P=a+b^{2014}+c^{2015}\ge 3\sqrt[3]{ab^{2014}c^{2015}}=3\sqrt[3]{abc^2(bc)^{2013}}\ge 3.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 3 đạt tại $a=b=c=1$.

Bài 23. Cho *a,b,c,d* là các số thực dương.

Chứng minh rằng $\frac{b(a+c)}{c(a+b)}+\frac{c(b+d)}{d(b+c)}+\frac{d(c+a)}{a(c+d)}+\frac{a(d+b)}{b(d+a)}\ge 4$.

Lời giải

Đặt P là vế trái của bất đẳng thức.

Viết lại P dưới dạng:

$$P=(a+c)\left[\frac{b}{c(a+b)}+\frac{d}{a(c+d)}\right]+(b+d)\left[\frac{c}{d(b+c)}+\frac{a}{b(d+a)}\right]$$

$$=(abc+bcd+cda+dab)\left[\frac{a+c}{ac(a+b)(c+d)}+\frac{b+d}{bd(b+c)(a+d)}\right]$$

$$=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)\left[\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{c}}{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)}+\frac{\frac{1}{b}+\frac{1}{d}}{\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{d}\right)}\right].$$

$$\ge\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right).\left[\frac{4\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right)}{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)^2}+\frac{4\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{d}\right)}{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)^2}\right]=4$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=d$.

Bài 24. Cho *a,b,c* là các số thực không âm. Chứng minh

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{3} \geq abc + \frac{3}{4}\left|(a-b)(b-c)(c-a)\right|.$$

Lời giải

Bất đẳng thức tương đương với:

$$\frac{a^3+b^3+c^3-3abc}{3} \geq \frac{3}{4}\left|(a-b)(b-c)(c-a)\right|.$$

$$\Leftrightarrow \frac{(a+b+c)\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]}{6} \geq \frac{3}{4}\left|(a-b)(b-c)(c-a)\right|.$$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM cho vế trái ta được:

$$\frac{(a+b+c)\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]}{6} \geq \frac{(a+b+c)\sqrt[3]{(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2}}{2}$$

Vậy ta chứng minh

$$\frac{(a+b+c)\sqrt[3]{(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2}}{2} \geq \frac{3}{4}\left|(a-b)(b-c)(c-a)\right|.$$

$$\Leftrightarrow 2(a+b+c) \geq 3\sqrt[3]{\left|(a-b)(b-c)(c-a)\right|}.$$

Không mất tính tổng quát giả sử $a \geq b \geq c$ ta cần chứng minh

$$2(a+b+c) \geq 3\sqrt[3]{(a-b)(b-c)(a-c)}.$$

Sủ dụng bất đẳng thức AM-GM cho vế phải ta được:

$$3\sqrt[3]{(a-b)(b-c)(a-c)} \leq a-b+b-c+a-c = 2a-2c \leq 2(a+b+c).$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Một số kết quả tương tự:

Bài 1. Cho a,b,c là các số thực không âm. Chứng minh

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{3} \geq abc + \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\left|(a-b)(b-c)(c-a)\right|.$$

Bài 2. Cho a,b,c là các số thực không âm thỏa mãn $2\min\{a,b,c\} \geq max\{a,b,c\}$.

Chứng minh $\dfrac{a^3+b^3+c^3}{3} \geq abc + \dfrac{3}{\sqrt[3]{2}}\left|(a-b)(b-c)(c-a)\right|$.

Bài 25. Cho *a,b,c* là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $a+b+c=1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{\sqrt{a^2+\frac{(b-c)^2}{4}}} + \frac{1}{\sqrt{b^2+\frac{(c-a)^2}{4}}} + \frac{1}{\sqrt{c^2+\frac{(a-b)^2}{4}}}.$$

Lời giải

Không mất tính tổng quát giả sử $c = max\{a,b,c\}$.

Ta có: $\sqrt{a^2 + \frac{(b-c)^2}{4}} \le a + \frac{c}{2}, \sqrt{b^2 + \frac{(c-a)^2}{4}} \le b + \frac{c}{2}$.

$\sqrt{c^2 + \frac{(a-b)^2}{4}} \le \sqrt{c^2 + 2a^2 + 2b^2} \le \sqrt{2\left(a + \frac{c}{2}\right)^2 + 2\left(b + \frac{c}{2}\right)^2}$.

Đặt $x = a + \frac{c}{2}, y = b + \frac{c}{2}, (x, y > 0)$ và $x + y = 1$.

Ta chứng minh được: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{\sqrt{2(x^2 + y^2)}} \ge \frac{5}{x+y}$.

Do đó $P \ge 5$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 5 đạt tại $a = b = 0, c = 1$ hoặc các hoán vị.

C. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

BÀI TẬP TRUNG BÌNH

Bài 1. Cho *x,y* là hai số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{x^3 + y^3 + 7xy(x+y)}{xy\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Bài 2. Cho *x,y* là hai số thực dương.

Chứng minh rằng $\left(x^2 + y + \frac{3}{4}\right)\left(y^2 + x + \frac{3}{4}\right) \ge \left(2x + \frac{1}{2}\right)\left(2y + \frac{1}{2}\right)$.

Bài 3. Cho a,b là các số thực dương. Chứng minh

$$(1+a)^8 + (1+b)^8 \ge 128ab(a+b)^2.$$

Bài 4. Chứng minh rằng với mọi số thực x,y,z ta có

$$x^2 + y^2 + z^2 \ge \sqrt{2}x(y+z).$$

Bài 5. Cho *a,b,c* là các số thực thỏa mãn điều kiện $(a+c)(a+b+c) \le 0$.

Chứng minh rằng $(b-c)^2 \ge 4a(a+b+c)$.

Bài 6. Cho *a,b,c* là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện

$$ab + bc + ca + abc = 4.$$

Chứng minh rằng $3(a^2 + b^2 + c^2) + abc \ge 10$.

Bài 7. Cho a,b là các số thực thoả mãn điều kiện $-2 < a < 2, -3 < b < 3; ab = -1$.

Chứng minh rằng $\dfrac{4}{4-a^2} + \dfrac{9}{9-b^2} \geq \dfrac{12}{5}$.

Bài 8. Cho x,y là hai số thực dương có tổng bằng 2. Chứng minh

$$\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} + \sqrt{\frac{2}{x^2+xy+y^2}} \geq 2 + \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Bài 9. Cho *a,b,c* là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $\dfrac{a}{a+1} + \dfrac{b}{b+1} + \dfrac{c}{c+1} = 2$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = ab + bc + ca$.

Bài 10. Cho *a,b,c* là các số thực dương thỏa mãn điều kiện

$$\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1} = 1.$$

Chứng minh rằng $abc \geq 8$.

Bài 11. Chứng minh rằng $\sqrt{x\left(25-y^2\right)} + y\sqrt{25-x} \leq 25$.

Bài 12. Chứng minh rằng $\sqrt{x\left(108-y^2\right)} + y\sqrt{108-x} \leq 108$.

Bài 13. Cho x,y là hai số thực thoả mãn điều kiện

$$x\sqrt{2014-y^2} + y\sqrt{2014-x^2} = 2014.$$

Chứng minh rằng : $x^2 + y^2 = 2014$.

Bài 14. Cho hai số thực $x > y > 0$. Chứng minh $x + \dfrac{4}{(x-y)(y+1)^2} \geq 3$.

Bài 15. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện $a+b+c \leq 3$.

Chứng minh rằng $\dfrac{1}{a^2+b^2+c^2} + \dfrac{2014}{ab+bc+ca} \geq \dfrac{2015}{3}$.

Bài 16. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện $a^3+b^3+c^3 \leq 3$.

Chứng minh rằng $\dfrac{1}{a^3+b^3+c^3} + \dfrac{8}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq \dfrac{4}{3}$.

Bài 17. Cho a,b là hai số thực dương thoả mãn điều kiện $\dfrac{1}{a+1} + \dfrac{2}{b+1} = 2$.

Chứng minh rằng $ab^2 \leq \dfrac{1}{8}$.

Bài 18. Cho n số thực dương thoả mãn điều kiện $\frac{1}{1+a_1}+\frac{1}{1+a_2}+...+\frac{1}{1+a_n}=1$.

Chứng minh rằng $a_1a_2...a_n \ge (n-1)^n$.

Bài 19. Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh

$$\frac{a+b+c}{3} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}} \le \frac{1}{3}\left(\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}\right).$$

Bài 20. Cho *a,b,c* là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a^2+b^2+c^2=1$.

Chứng minh $a+b+c+\frac{1}{abc} \ge 4\sqrt{3}$.

Bài 21. Cho *a,b,c* là độ dài ba cạnh một tam giác có chu vi bằng 1.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{(a+b-c)^3}{3c}+\frac{(b+c-a)^3}{3a}+\frac{(c+a-b)^3}{3b}.$$

Bài 22. Cho *a,b,c* là các số thực không âm thỏa mãn $a+b+c=3$.

Chứng minh rằng $a^2b+b^2c+c^2a+abc \le 4$.

Bài 23. Cho *a,b,c* là các số thực không âm thỏa mãn $a+b+c=3$.

Chứng minh rằng $a^2b+b^2c+c^2a+2abc+4 \ge 3(ab+bc+ca)$.

Bài 24. Cho *a,b,c* là các số thực không âm. Chứng minh rằng

$$(a^2b+b^2c+c^2a)(ab+bc+ca) \le \frac{1}{27}(a+b+c)^5.$$

Bài 25. Cho *a,b,c* là các số thực dương. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{abc\left(a+b+c+\sqrt{a^2+b^2+c^2}\right)}{(a^2+b^2+c^2)(ab+bc+ca)}.$$

Bài 26. Cho a,b,c là các số thực thỏa mãn điều kiện abc=1 .

Chứng minh rằng: $\frac{b+c}{\sqrt{a}}+\frac{c+a}{\sqrt{b}}+\frac{a+b}{\sqrt{c}} \ge \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+3$.

Bài 27. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện $a^2+b^2+c^2 \le \frac{3}{4}$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=(a+b)(b+c)(c+a)+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}.$$

Bài 28. Cho a,b,c là các số nguyên dương có tổng bằng 100.

Tìm giá trị lớn nhất của tích ba số đó.

Bài 29. Cho a,b,c là các số nguyên dương có tổng bằng 2014.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = abc$.

Bài 30. Cho *x,y,z* là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{x^2+xy}+\frac{1}{y^2+yz}+\frac{1}{z^2+zx}\ge \frac{27}{2\left(x+y+z\right)^2}.$$

Bài 31. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện $ab+bc+ca=3$.

Chứng minh rằng $\sqrt{a^6+b^6+1}+\sqrt{b^6+c^6+1}+\sqrt{c^6+a^6+1}\ge 3\sqrt{3}$.

Bài 32. Cho a,b,c là các số thực dương chứng minh

$$\sqrt{a^2+2b^2}+\sqrt{b^2+2c^2}+\sqrt{c^2+2a^2}\ge \sqrt{3}\left(a+b+c\right).$$

Bài 33. Cho n số thực dương có tổng bằng 1. Chứng minh

$$\left(\frac{1}{a_1}-1\right)\left(\frac{1}{a_2}-1\right)...\left(\frac{1}{a_n}-1\right)\ge \left(n-1\right)^n.$$

Bài 34. Cho a,b là các số thực dương thoả mãn điều kiện $a+b\le 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{1}{1+a^2+b^2}+\dfrac{1}{2ab}$.

Chú ý. Có thể đưa về hàm số(xem chương sau).

Bài tập tương tự

Cho a,b là hai số thực dương thoả mãn điều kiện $a+b\le 2$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{2}{1+a^2+b^2}+\dfrac{1}{ab}$.

Bài 35. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện $a+2b+3c\ge 20$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=a+b+c+\dfrac{3}{a}+\dfrac{9}{2b}+\dfrac{4}{c}$.

Bài 36. Cho x,y,z là các số thực dương. Chứng minh

$$\frac{2xy}{(x+z)(z+y)}+\frac{2yz}{(x+y)(x+z)}+\frac{3xz}{(y+z)(y+x)}\ge \frac{5}{3}.$$

Bài 37. Cho a,b,c là các số thực thoả mãn $a,b,c\ge 1$.

Chứng minh rằng $\dfrac{a\left(b^2+3\right)}{3c^2+1}+\dfrac{b\left(c^2+3\right)}{3a^2+1}+\dfrac{c\left(a^2+3\right)}{3b^2+1}\ge 3$.

Bài 38. Cho x, y, z là các số thực dương có tích bằng 1.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{x^4}{(1+y)(1+z)}+\frac{y^4}{(1+z)(1+x)}+\frac{z^4}{(1+x)(1+y)}.$$

Bài 38. Sử dụng bất đẳng thức AM – GM cho bốn số dương ta có:

$$\begin{cases}\dfrac{x^4}{(1+y)(1+z)}+\dfrac{1+y}{8}+\dfrac{1+z}{8}+\dfrac{1}{4}\ge x\\ \dfrac{y^4}{(1+z)(1+x)}+\dfrac{1+z}{8}+\dfrac{1+x}{8}+\dfrac{1}{4}\ge y\\ \dfrac{z^4}{(1+x)(1+y)}+\dfrac{1+x}{8}+\dfrac{1+y}{8}+\dfrac{1}{4}\ge z\end{cases}$$

Cộng lại theo vế ba bất đẳng thức trên ta được:

Bài 39. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện $a+b+c\ge\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$.

Chứng minh rằng $a+b+c\ge\frac{3}{a+b+c}+\frac{2}{abc}$.

Bài 40. Cho x,y là các số thực dương. Chứng minh

$$\frac{x^4y^4}{(x+y)^2(x+1)^4(y+1)^4}\le\left(\frac{3}{8}\right)^6.$$

Bài 41. Cho x,y,z là các số thực dương thoả mãn điều kiện $z(z-x-y)=x+y+1$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $M=\frac{x^4y^4}{(x+yz)(y+zx)(z+xy)^3}$.

Bài 42. Cho x,y,z là các số thực thoả mãn điều kiện $x^2+y^2+z^2=3$.

Chứng minh rằng $|x|+|y|+|z|-xyz\le 4$.

Bài 43. Cho a,b,c là các số thực dương có tổng bằng 3. Chứng minh

$$\sqrt{\frac{a+1}{ab+1}}+\sqrt{\frac{b+1}{bc+1}}+\sqrt{\frac{c+1}{ca+1}}\ge 3.$$

Bài 44. Cho a,b,c là các số thực dương có tổng bằng 3. Chứng minh

$$\frac{a(a+c-2b)}{ab+1}+\frac{b(b+a-2c)}{bc+1}+\frac{c(c+b-2a)}{ca+1}\ge 0.$$

Bài 45. Cho x,y,z là các số thực lớn hơn 1. Chứng minh

$$\frac{x^4}{(y-1)^2}+\frac{y^4}{(z-1)^2}+\frac{z^4}{(x-1)^2}\ge 48.$$

Bài 46. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện $a+b+c=\frac{3}{4}abc$.

Chứng minh rằng $\frac{a}{a+2}+\frac{b}{b+2}+\frac{c}{c+2}\ge\frac{3}{2}$.

Bài 47. Cho a,b là hai số thực dương thoả mãn điều kiện $a+b\ge 4$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{3a^2+4}{4a}+\frac{2+b^3}{b^2}$.

Bài 48. Cho a,b,c là các số thực dương tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{a}{3a+b+c}+\frac{b}{3b+a+c}+\frac{c}{3c+b+a}$$

Bài 49. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn điều kiện

$$a^2+b^2+c^2+(a+b+c)^2\le 4.$$

Chứng minh rằng $\frac{ab+1}{(a+b)^2}+\frac{bc+1}{(b+c)^2}+\frac{ca+1}{(c+a)^2}\ge 3.$

Bài 50. Cho x,y là hai số thực dương. Chứng minh rằng

$$\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x+3y}}+\frac{1}{\sqrt{y+3x}}\right)\le 2.$$

Bài 51. Cho $x\ge 2, y\ge 3, z\ge 4$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{xy\sqrt{z-4}+yz\sqrt{x-2}+zx\sqrt{y-3}}{xyz}.$$

Bài 52. Cho a,b,c là các số thực dương có tổng bằng $\frac{3}{4}$. Chứng minh

$$\sqrt[3]{x+3y}+\sqrt[3]{y+3z}+\sqrt[3]{z+3x}\le 3.$$

Bài 53. (TSĐH Khối B 2007) Cho x,y,z là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{yz}\right)+y\left(\frac{y}{2}+\frac{1}{zx}\right)+z\left(\frac{z}{2}+\frac{1}{xy}\right)$.

Bài 54. Cho a,b,c là các số thực không âm thoả mãn điều kiện $ab+bc+ca>0$.

Chứng minh rằng $\frac{a^2}{3a^2+(b+c)^2}+\frac{b^2}{3b^2+(c+a)^2}+\frac{c^2}{3c^2+(a+b)^2}\le\frac{1}{2}$.

Bài 55. Cho a,b,c là các số thực không âm có tổng bằng 3. Chứng minh

$$a+ab+2abc\le\frac{9}{2}.$$

Bài 56. Cho a,b,c là các số thực dương có tổng bằng 3. Chứng minh

$$\frac{ab}{\sqrt{c^2+3}}+\frac{bc}{\sqrt{a^2+3}}+\frac{ca}{\sqrt{b^2+3}}\le\frac{3}{2}.$$

Bài 57. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện $a^2+b^2+c^2=1$.

Chứng minh rằng $\frac{ab}{c^2+1}+\frac{bc}{a^2+1}+\frac{ca}{b^2+1}\le\frac{3}{4}$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN NÂNG CAO

Bài 58. Cho *x,y,z* là các số thực dương thỏa mãn $x>y$ và $xy+(x+y)z+z^2=1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{1}{4(x-y)^2}+\frac{1}{(x+z)^2}+\frac{1}{(y+z)^2}$.

Bài 59. Cho *a,b,c* là các số thực dương thỏa mãn $a>b$ và $(a+c)(b+c)=1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{6}{(b+c)^2}+\frac{12}{(a+c)^2}$.

Bài 60. Cho a,b,c,x,y,z là các số thực dương thoả mãn điều kiện

$$a+x=b+y=c+z=1.$$

Chứng minh rằng $(abc+xyz)\left(\frac{1}{ay}+\frac{1}{bz}+\frac{1}{cx}\right)\ge 3$.

Bài 61. Cho x,y,z là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\ge\frac{z(x+y)}{y(y+z)}+\frac{x(z+y)}{z(x+z)}+\frac{y(x+z)}{x(x+y)}.$$

Bài 62. Cho a,b,c là các số thực không âm thoả mãn điều kiện $c^2\ge ab$.

Chứng minh rằng $3(a^3+b^3+c^3)\ge 2c(ab+bc+ca)$.

Bài 63. Cho a,b,c là các số thực không âm thoả mãn điều kiện $ab+bc+ca>0$.

Chứng minh rằng $3+\frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}\ge\frac{12(ab+bc+ca)}{(a+b+c)^2}$.

Bài 64. Cho số nguyên dương n và các số thực dương $x_1,x_2,...,x_n$.

Chứng minh rằng

$$(1+x_1)(1+x_1+x_2)...(1+x_1+...+x_n)\ge\sqrt{(n+1)^{n+1}}\sqrt{x_1x_2...x_n}.$$

Bài 65. Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh

$$\frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}\le\frac{(a+b)(a+b+2c)}{(3a+3b+2c)^2}.$$

Bài 66. Cho *a,b,c* là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $ab+bc+ca>0$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=(a+2b+2014c)\left[\frac{1}{\sqrt{a(b+c)+2c^2}}+\frac{1}{\sqrt{b(a+4c)}}\right].$$

Bài 67. Cho *a,b,c* là các số thực đôi một phân biệt thỏa mãn $ab+bc+ca>0$ và $a+b+c=1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{2}{|a-b|}+\frac{2}{|b-c|}+\frac{2}{|c-a|}+\frac{5}{\sqrt{ab+bc+ca}}.$$

Bài 68. Cho x,y,z là các số thực không âm thoả mãn điều kiện

$$x^2+y^2+z^2=2(xy+yz+zx).$$

Chứng minh rằng $\frac{x+y+z}{3}\ge\sqrt[3]{2xyz}$.

Bài 69. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện

$$(a+b)(b+c)(c+a)=8.$$

Chứng minh rằng $\frac{a+b+c}{3}\ge\sqrt[27]{\frac{a^3+b^3+c^3}{3}}$.

Bài 70. Cho a,b,c là độ dài 3 cạnh một tam giác thoả mãn điều kiện

$$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)=1.$$

Chứng minh rằng $\frac{a+b+c}{3}\ge\sqrt[5]{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}$.

Bài 71. Cho a,b,c là các số thực không âm. Chứng minh

$$a^3+b^3+c^3-3abc\ge\frac{3}{\sqrt[3]{4}}(ab^2+bc^2+ca^2-3abc).$$

Bài 72. Cho x,y,z là các số thực dương thoả mãn điều kiện $xy+yz+zx=3xyz$.

Chứng minh rằng $\frac{yz\sqrt{1+3x^2}}{y+3zx}+\frac{zx\sqrt{1+3y^2}}{z+3xy}+\frac{xy\sqrt{1+3z^2}}{x+3yz}\ge\frac{3}{2}$.

Bài 73. Cho a,b,c là độ dài 3 cạnh một tam giác có chu vi bằng 3.

Chứng minh rằng $\frac{1}{\sqrt{a+b-c}}+\frac{1}{\sqrt{b+c-a}}+\frac{1}{\sqrt{c+a-b}}\ge\frac{9}{ab+bc+ca}$.

Bài 74. Cho x,y,z là các số thực không âm thoả mãn điều kiện

$$(x+y+z)^2+xy+yz+zx>0.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\sqrt{\frac{y+z}{2x+y+z}}+\sqrt{\frac{z+x}{2y+z+x}}+\sqrt{\frac{x+y}{2z+x+y}}.$$

Bài 75. Cho a,b,c là các số thực không âm thoả mãn điều kiện $a+2b+3c=4$.

Chứng minh rằng $(2a^2+bc)(2b^2+ca)(2c^2+ab)\le 32$.

Bài 76. Cho a,b,c là các số thực không âm thoả mãn điều kiện $a^2+b^2+c^2=3$.

Chứng minh rằng $8(2-a)(2-b)(2-c)\ge(a+bc)(b+ca)(c+ab)$.

Bài 79. Cho a,b,c là các số thực dương có tổng bằng 3.

Chứng minh rằng $\sqrt{\frac{a^2}{a^2+b+c}}+\sqrt{\frac{b^2}{b^2+c+a}}+\sqrt{\frac{c^2}{c^2+a+b}}\le\sqrt{3}$.

Bài 80. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện

$$a\le b\le c; a+b+c=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}.$$

Chứng minh rằng $b\ge\frac{1}{a+c-1}$.

Bài 81. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện

$$a\le b\le c; a+b+c=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=b+\frac{1}{a+c-1}$.

Bài 82. Cho a,b,c là các số thực không âm có tổng bằng 2 chứng minh

$$\frac{1}{\sqrt{(a^2-ab+b^2)(b^2-bc+c^2)}}+\frac{1}{\sqrt{(b^2-bc+c^2)(c^2-ca+a^2)}}+\frac{1}{\sqrt{(c^2-ca+a^2)(a^2-ab+b^2)}}\ge 3\cdot$$

Bài 83. Cho x,y,z là các số thực không âm thoả mãn điều kiện $xy+yz+zx=1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{1}{\sqrt{x^2+xy+y^2}}+\frac{1}{\sqrt{y^2+yz+z^2}}+\frac{1}{\sqrt{z^2+zx+x^2}}.$$

Bài 84.(Việt Nam TST 2010) Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\le 16(a+b+c).$$

Chứng minh rằng

$$\frac{1}{\left(a+b+\sqrt{2(a+c)}\right)^3}+\frac{1}{\left(b+c+\sqrt{2(a+b)}\right)^3}+\frac{1}{\left(c+a+\sqrt{2(b+c)}\right)^3}\le\frac{8}{9}.$$

Bài 85. Cho a,b,c là các số thực dương có tổng bằng 1. Chứng minh

$$\frac{a-bc}{a+bc}+\frac{b-ca}{b+ca}+\frac{c-ab}{c+ab}\le\frac{3}{2}.$$

Bài 86. Cho a,b,c là các số thực dương có tổng bằng 1. Chứng minh

$$\frac{1}{ab+2c^2+2c}+\frac{1}{bc+2a^2+2a}+\frac{1}{ca+2b^2+2b}\ge\frac{1}{ab+bc+ca}.$$

Bài 87. Cho a,b,c là các số thực dương có tổng bằng 3. Chứng minh

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\ge a^2+b^2+c^2.$$

Bài 88. Cho a,b,c là các số thực dương có tổng bằng 1. Chứng minh

$$\frac{ab+1}{ab+c}+\frac{bc+1}{bc+a}+\frac{ca+1}{ca+b}\ge\frac{15}{2}.$$

Bài 89. Cho a,b,c là các số thực không âm thoả mãn điều kiện $ab+bc+ca=1$.

Chứng minh rằng $\dfrac{3ab+1}{a+b}+\dfrac{3bc+1}{b+c}+\dfrac{3ca+1}{c+a}\ge 4$.

Bài 90. Cho a,b,c là các số thực không âm có tổng bằng 3. Chứng minh

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\ge ab+bc+ca.$$

Bài 91. Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{(a+b)b}+\frac{1}{(b+c)c}+\frac{1}{(c+a)a}\ge\frac{9}{2(ab+bc+ca)}.$$

Bài 92. Cho a,b,c là độ dài ba cạnh một tam giác có chu vi bằng 3. Chứng minh

$$\frac{1}{\sqrt{a+b-c}}+\frac{1}{\sqrt{b+c-a}}+\frac{1}{\sqrt{c+a-b}}\ge\frac{9}{ab+bc+ca}.$$

Bài 93. Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh

$$\sqrt{\frac{(a^2+bc)(b+c)}{a(b^2+c^2)}}+\sqrt{\frac{(b^2+ca)(c+a)}{b(c^2+a^2)}}+\sqrt{\frac{(c^2+ab)(a+b)}{c(a^2+b^2)}}\ge 3\sqrt{2}.$$

Bài 94. Cho a,b,c là các số thực không âm thoả mãn điều kiện $ab+bc+ca>0$.

Chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{a(b^2+c^2)}{(a^2+bc)(b+c)}}+\sqrt{\frac{b(c^2+a^2)}{(b^2+ca)(c+a)}}+\sqrt{\frac{c(a^2+b^2)}{(c^2+ab)(a+b)}}\ge 2.$$

Bài 95. Cho a,b,c là các số thực thoả mãn điều kiện

$$a^2+b^2+c^2=2(ab+bc+ca)>0.$$

Chứng minh rằng $\dfrac{|a-b|}{\sqrt{c^2+2ab}}+\dfrac{|b-c|}{\sqrt{a^2+2bc}}+\dfrac{|c-a|}{\sqrt{b^2+2ca}}\ge 2.$

Bài 96. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện $a+b+c\ge \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$.

Chứng minh rằng $\dfrac{a}{a+1}+\dfrac{b}{b+1}+\dfrac{c}{c+1}\ge \dfrac{3}{2}.$

Bài 97. Cho x,y,z là các số thực dương có tích bằng 1. Chứng minh

$$\frac{x^3+1}{\sqrt{x^4+y+z}}+\frac{y^3+1}{\sqrt{y^4+z+x}}+\frac{z^3+1}{\sqrt{z^4+x+y}}\ge 2\sqrt{xy+yz+zx}.$$

Bài 98. Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh

$$\sqrt[3]{\left(\frac{2a}{b+c}\right)^2}+\sqrt[3]{\left(\frac{2b}{c+a}\right)^2}+\sqrt[3]{\left(\frac{2c}{a+b}\right)^2}\ge 3.$$

Bài 99. Cho x,y,z là các số thực dương có tích bằng 1. Chứng minh

$$\frac{xy}{x^5+y^5+xy}+\frac{yz}{y^5+z^5+yz}+\frac{zx}{z^5+x^5+zx}\le 1.$$

Bài 100. Cho a,b,c là các số thực dương có tổng bằng 3. Chứng minh

$$\frac{1}{1+ab}+\frac{1}{1+bc}+\frac{1}{1+ca}\ge \frac{9}{2\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)}$$

D. HƯỚNG DẪN GIẢI – ĐÁP SỐ

Bài 1. Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta được:

$$x^3+y^3+7xy\left(x+y\right)=\left(x+y\right)^3+4xy\left(x+y\right)\ge 4\sqrt{xy}\left(x+y\right)^2.$$

$$xy\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{\frac{xy}{2}}.\sqrt{2xy\left(x^2+y^2\right)}\le\sqrt{\frac{xy}{2}}.\frac{2xy+x^2+y^2}{2}=\frac{\sqrt{xy}\left(x+y\right)^2}{2\sqrt{2}}.$$

Do đó $P\ge 8\sqrt{2}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y$.

Nhận xét. Ngoài ra ta có thể đặt $x=t.y,\left(t>0\right)$ đưa về khảo sát hàm một biến với t.

Bài 2. Ta có:

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=x^2-x+\frac{1}{4}=\left(x^2+y+\frac{3}{4}\right)-\left(x+y+\frac{1}{2}\right)\Rightarrow x^2+y+\frac{3}{4}\ge x+y+\frac{1}{2}$$

Tượng tự $y^2+x+\frac{3}{4}\ge x+y+\frac{1}{2}$.

Suy ra:

$$\left(x^2+y+\frac{3}{4}\right)\left(y^2+x+\frac{3}{4}\right)\ge\left(x+y+\frac{1}{2}\right)^2=\left(x+\frac{1}{4}+y+\frac{1}{4}\right)^2$$

$$\ge4\left(x+\frac{1}{4}\right)\left(y+\frac{1}{4}\right)=\left(2x+\frac{1}{2}\right)\left(2y+\frac{1}{2}\right)$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=\frac{1}{2}$.

Bài 3. Sử dụng bất đẳng thức AM – GM cho hai số dương ta có

$$(1+a)^8+(1+b)^8\ge2(1+a)^4(1+b)^4$$

$$=2\left[(ab+1)+(a+b)\right]^4\ge2\left[2\sqrt{(ab+1)(a+b)}\right]^4.$$

$$=32(ab+1)^2(a+b)^2\ge128ab(a+b)^2$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=1$.

Bài 4. Sử dụng bất đẳng thức AM – GM ta có

$$x^2+y^2+z^2\ge x^2+\frac{1}{2}(y+z)^2\ge2\sqrt{x^2.\frac{(y+z)^2}{2}}=\sqrt{2}\left|x(y+z)\right|\ge\sqrt{2}x(y+z).$$

Bài 5. Ta có: $(b-c)^2=(a+b+c-a-2c)^2\ge4(a+b+c)(-a-2c)$.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh nếu ta chứng minh được:

$(a+b+c)(-a-2c)\ge a(a+b+c)\Leftrightarrow(a+c)(a+b+c)\le0$ (luôn đúng theo giả thiết).

Bài 6. Ta có:

$$4=ab+bc+ca+abc\le\frac{1}{3}(a+b+c)^2+\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3\Rightarrow a+b+c\ge3.$$

Khi đó

$$3\left(a^2+b^2+c^2\right)+abc=3\left(a^2+b^2+c^2\right)+4-(ab+bc+ca)$$

$$\ge(a+b+c)^2+4-\frac{1}{3}(a+b+c)^2$$

$$=\frac{2}{3}(a+b+c)^2+4\ge\frac{2}{3}.3^2+4=10$$

Bất đẳng thức được chứng minh đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài 7. Sử dụng bất đẳng thức AM – GM ta có

$$\frac{4}{4-a^2}+\frac{9}{9-b^2}\ge\frac{12}{\sqrt{\left(4-a^2\right)\left(9-b^2\right)}}$$
$$=\frac{12}{\sqrt{a^2b^2-9a^2-4b^2+36}}=\frac{12}{\sqrt{37-\left(9a^2+4b^2\right)}}$$
$$\ge\frac{12}{\sqrt{37-2\sqrt{9a^2.4b^2}}}=\frac{12}{5}$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$a=\frac{\sqrt{6}}{3},b=-\frac{\sqrt{6}}{2}$ hoặc $a=-\frac{\sqrt{6}}{2},b=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Bài 8. Sử dụng bất đẳng thức AM – GM ta có

$$\sqrt{\frac{2}{3x}}+\sqrt{\frac{2}{3y}}+\sqrt{\frac{2}{x^2+xy+y^2}}\ge3\sqrt[3]{\sqrt{\frac{2}{3x}}.\sqrt{\frac{2}{3y}}.\sqrt{\frac{2}{x^2+xy+y^2}}}$$
$$=3\sqrt[6]{\frac{8}{3.3xy\left(x^2+xy+y^2\right)}}\ge\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt[6]{3.\left(\frac{x^2+xy+y^2+3xy}{2}\right)^2}}$$
$$=\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt[6]{3.\left(\frac{\left(x+y\right)^2+2xy}{2}\right)^2}}\ge\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt[6]{3.\left(\frac{\left(x+y\right)^2+\frac{1}{2}\left(x+y\right)^2}{2}\right)^2}}=3\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\left(1-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}}\right)\ge\left(1-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)\frac{2}{\sqrt{\sqrt{x}.\sqrt{y}}}\ge\left(1-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)\frac{2}{\sqrt{\frac{x+y}{2}}}=2-2\sqrt{\frac{2}{3}}$$

Cộng theo vế hai bất đẳng thức trên ta có đpcm.

Bài 9. Theo giả thiết ta có

$$\frac{a}{a+1}=1-\frac{b}{b+1}+1-\frac{c}{c+1}=\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}\ge\frac{2}{\sqrt{\left(b+1\right)\left(c+1\right)}}.$$

Tương tự ta có: $\frac{b}{b+1}\ge\frac{2}{\sqrt{\left(a+1\right)\left(c+1\right)}}$.

Nhân theo vế hai bất đẳng thức trên ta được:

$$\frac{ab}{(a+1)(b+1)} \ge \frac{4}{(c+1)\sqrt{(a+1)(b+1)}} \Leftrightarrow ab \ge \frac{4\sqrt{(a+1)(b+1)}}{c+1}.$$

Tương tự ta có: $bc \ge \frac{4\sqrt{(b+1)(c+1)}}{a+1}; ca \ge \frac{4\sqrt{(c+1)(a+1)}}{b+1}$.

Cộng lại theo vế 3 bất đẳng thức trên và sử dụng AM-GM ta được:

$$P = ab + bc + ca \ge 12.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 2$.

Bài 10. Theo giả thiết ta có $\frac{a}{a+1} = 1 - \frac{1}{a+1} = \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1}$.

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta có: $\frac{a}{a+1} \ge \frac{2}{\sqrt{(b+1)(c+1)}}$.

Tương tự ta có: $\frac{b}{b+1} \ge \frac{2}{\sqrt{(a+1)(c+1)}}; \frac{c}{c+1} \ge \frac{2}{\sqrt{(a+1)(b+1)}}$.

Nhân theo vế 3 bất đẳng thức trên ta có ngay điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 2$.

Nhận xét. Với cách làm tương tự trên ta xử lý được bài toán tổng quát cho n số dương.

Bài toán. Với $x_1, x_2, ..., x_n > 0$ thỏa mãn $\frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + ... + \frac{1}{1+x_n} = 1$ ta luôn có $x_1 x_2 ... x_n \ge (n-1)^n$.

Bài 11. Sử dụng bất đẳng thức AM – GM cho hai số ta có

$$\sqrt{x(25-y^2)} \le \frac{x+25-y^2}{2};$$

$$y\sqrt{25-x} \le \frac{y^2+25-x}{2}$$

Cộng lại theo vế hai bất đẳng thức trên ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 25 - y^2; y \ge 0$.

Bài 14. Sử dụng bất đẳng thức AM – GM ta có

$$x + \frac{4}{(x-y)(y+1)^2} = x - y + \frac{y+1}{2} + \frac{y+1}{2} + \frac{4}{(x-y)(y+1)^2} - 1$$

$$\ge 4\sqrt[4]{(x-y).\frac{y+1}{2}.\frac{y+1}{2}.\frac{4}{(x-y)(y+1)^2}} - 1 = 3$$

Bất đẳng thức được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x-y=\frac{y+1}{2}=\frac{4}{(x-y)(y+1)^2}\Leftrightarrow x=2;y=1.$

Bài 15. Dấu bằng đạt tại $a=b=c=1\Rightarrow\begin{cases}a^2+b^2+c^2=3\\ab+bc+ca=3\end{cases}.$

Sử dụng bất đẳng thức AM – GM ta có

$$\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{2014}{ab+bc+ca}=\left(\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{2}{ab+bc+ca}\right)+\frac{2012}{ab+bc+ca}$$

$$\geq\frac{3}{\sqrt[3]{\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(ab+bc+ca\right)^2}}+\frac{2012}{\frac{1}{3}(a+b+c)^2}$$

$$\geq\frac{9}{(a+b+c)^2}+\frac{2012}{\frac{1}{3}(a+b+c)^2}\geq\frac{2015}{3}$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài 17. Theo giả thiết ta có

$$\frac{1}{a+1}=2-\frac{2}{b+1}=\frac{2b}{b+1}$$

$$\frac{1}{b+1}=2-\frac{1}{a+1}-\frac{1}{b+1}=\frac{a}{a+1}+\frac{b}{b+1}\geq2\sqrt{\frac{ab}{(a+1)(b+1)}}$$

Nhân theo vế hai bất đẳng thức trên ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=\frac{1}{2}.$

Bài 18. Ta có $\frac{x_k}{1+x_k}=\sum_{1\leq i\neq k}^{n}\frac{1}{1+x_i}\geq\frac{n-1}{\sqrt[n-1]{\prod_{1\leq i\neq k}^{n}x_i}},k=\overline{1,n}.$

Nhân theo vế n bất đẳng thức trên ta có điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1=x_2=...=x_n=n-1.$

Bài 19. Bất đẳng thức vế trái là hiển nhiên theo C – S.

Bất đẳng thức vế phải tương đương với

$$\left(\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}\right)^2 \ge 3\left(a^2+b^2+c^2\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2b^2}{c^2}+\frac{b^2c^2}{a^2}+\frac{c^2a^2}{b^2} \ge a^2+b^2+c^2$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{ab}{c}-\frac{bc}{a}\right)^2+\left(\frac{bc}{a}-\frac{ca}{b}\right)^2+\left(\frac{ca}{b}-\frac{ab}{c}\right)^2 \ge 0$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bài 20. Sử dụng bất đẳng thức AM-GM cho ba số dương ta được:

$$1=a^2+b^2+c^2 \ge 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \Rightarrow abc \le \frac{1}{3\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{1}{abc} \ge 3\sqrt{3}$$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM cho bốn số dương ta được:

$$a+b+c+\frac{1}{9abc} \ge 4\sqrt[4]{abc.\frac{1}{9abc}}=\frac{4}{\sqrt{3}}.$$

Suy ra $a+b+c+\dfrac{1}{abc}=\left(a+b+c+\dfrac{1}{9abc}\right)+\dfrac{8}{9abc} \ge \dfrac{4}{\sqrt{3}}+\dfrac{8}{9}.3\sqrt{3}=4\sqrt{3}$.

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Bài 21. Sử dụng bất đẳng thức AM-GM cho ba số dương ta được:

$$\frac{(a+b-c)^3}{3c}+\frac{c}{3}+\frac{1}{3} \ge a+b-c \Rightarrow \frac{(a+b-c)^3}{3c} \ge a+b+\frac{4}{c}c-\frac{1}{3}.$$

Tương tự: $\dfrac{(b+c-a)^3}{3a} \ge b+c+\dfrac{4}{3}a-1; \dfrac{(c+a-b)^3}{3b} \ge a+c+\dfrac{4}{3}b-1$.

Cộng theo vế 3 bất đẳng thức trên kết hợp với điều kiện $a+b+c=3$ ta có ngay $P \ge 1$.Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 1 đạt tại $a=b=c=1$.

Bài 22. Không mất tính tổng quát giả sử b là số nằm giữa a và c.

Ta có:

$$(b-a)(b-c) \le 0 \Leftrightarrow b^2+ac \le ab+bc \Rightarrow b^2c+c^2a \le abc+bc^2$$

$$\Rightarrow a^2b+b^2c+c^2a+abc \le a^2b+bc^2+2abc=b(a+c)^2$$

$$=4.b.\frac{a+c}{2}.\frac{a+c}{2} \le 4\left(\frac{b+\frac{a+c}{2}+\frac{a+c}{2}}{3}\right)^3=\frac{4}{27}(a+b+c)^3=4$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài 23. Ta có

$$3\left(ab+bc+ca\right)=\left(a+b+c\right)\left(ab+bc+ca\right)=\left(a^2b+b^2c+c^2a\right)+\left(ab^2+bc^2+ca^2\right)+3abc.$$

Do vậy ta chỉ cần chứng minh $ab^2+bc^2+ca^2+abc\le 4$.

Đây là một bài toán quen thuộc đã được chứng minh ở bài toán trên.

Bài toán được chứng minh đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài 24. Không mất tính tổng quát giả sử b là số nằm giữa a và c.

Ta có:

$$\left(b-a\right)\left(b-c\right)\le 0\Leftrightarrow b^2+ac\le ab+bc\Rightarrow b^2c+c^2a\le abc+bc^2$$

$$\Rightarrow a^2b+b^2c+c^2a\le a^2b+bc^2+abc=b\left(a^2+ac+c^2\right).$$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$b\left(a^2+ac+c^2\right)\left(ab+bc+ca\right)\le b\left(\frac{a^2+ac+c^2+ab+bc+ca}{2}\right)^2$$

$$=\frac{b\left[\left(a+c\right)^2+b\left(a+c\right)\right]^2}{4}=\frac{b\left(a+c\right)^2\left(a+b+c\right)^2}{4}=b.\frac{a+c}{2}.\frac{a+c}{2}.\left(a+b+c\right)^2$$

$$\le\left(a+b+c\right)^2\left(\frac{b+\frac{a+c}{2}+\frac{a+c}{2}}{3}\right)^3=\frac{1}{27}\left(a+b+c\right)^5$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bài 25. Sử dụng bất đẳng thức C-S ta có:

$$3\left(a^2+b^2+c^2\right)\ge\left(a+b+c\right)^2\Rightarrow a+b+c\le\sqrt{3\left(a^2+b^2+c^2\right)}.$$

Suy ra

$$P\le\frac{abc\left[\sqrt{3\left(a^2+b^2+c^2\right)}+\sqrt{a^2+b^2+c^2}\right]}{\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(ab+bc+ca\right)}=\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)abc}{\left(ab+bc+ca\right)\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Mặt khác: $\left(ab+bc+ca\right)\sqrt{a^2+b^2+c^2}\ge 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}.\sqrt{3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}}=3\sqrt{3}abc$.

Suy ra $P\le\dfrac{\sqrt{3}+1}{3\sqrt{3}}=\dfrac{3+\sqrt{3}}{9}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng $\dfrac{3+\sqrt{3}}{9}$ đạt tại $a=b=c$.

Bài 26. Sử dụng AM –GM cho 2 số dương ta được

$$\frac{b}{\sqrt{a}}+\sqrt{a}\ge 2\sqrt{b}$$

$$\frac{c}{\sqrt{a}}+\sqrt{a}\ge 2\sqrt{c} \qquad .$$

$$\Rightarrow \frac{b+c}{\sqrt{a}}\ge 2\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{a}\right)$$

Xây dựng tương tự cho 2 bất đẳng thức còn lại rồi cộng lại theo vế 3 bất đẳng thức ta được

$$\frac{b+c}{\sqrt{a}}+\frac{c+a}{\sqrt{b}}+\frac{a+b}{\sqrt{c}}\ge 2\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)\ge \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+3.$$

Bài 27. Theo giả thiết và bất đẳng thức AM – GM ta có:

$$\frac{3}{4}\ge a^2+b^2+c^2\ge 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}.$$

Suy ra $abc\le \frac{1}{8}$.

Sử dụng bất đẳng thức AM - GM ta có

$$(a+b)(b+c)(c+a)\ge 8abc$$

$$8abc+\frac{1}{4a^2}+\frac{1}{4b^2}+\frac{1}{4c^2}\ge 4\sqrt[4]{\frac{1}{8abc}}\ge 4.$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz ta có

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\ge \frac{9}{a^2+b^2+c^2}\ge 12.$$

Suy ra $P\ge 8abc+\frac{1}{4a^2}+\frac{1}{4b^2}+\frac{1}{4c^2}+\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\ge 13.$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{2}$. Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 13.

Bài 28. Nếu không có điều kiện ràng buộc a,b,c nguyên dương ta có ngay

$$abc\le\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3=\left(\frac{100}{3}\right)^3.$$

Đẳng thức xảy ra tại $a=b=c=\frac{100}{3}$.

Vì vậy ta dự đoán dấu bằng đạt tại $a=34, b=c=33$

Không mất tính tổng quát giả sử $a\ge b\ge c\Rightarrow a\ge 34, c\le 33$ ta có

$$\frac{a}{34}.\frac{b}{33}.\frac{c}{33}\le\left(\frac{\frac{a}{34}+\frac{b}{33}+\frac{c}{33}}{3}\right)^3=\left(\frac{34(a+b+c)-a}{3.33.34}\right)^3\le\left(\frac{34.100-34}{3.33.34}\right)^3=1$$

$\Rightarrow abc\le 34.33^2$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=34, b=c=33$hoặc các hoán vị.

Bài 29. Giả sử $a\ge b\ge c\Rightarrow a\ge\left[\frac{2014}{3}\right]+1=672, c\le 671$.

Sử dụng bất đẳng thức AM – GM ta có

$$\frac{a}{672}.\frac{b}{671}.\frac{c}{671}\le\left(\frac{\frac{a}{672}+\frac{b}{671}+\frac{c}{671}}{3}\right)^3=\left[\frac{672(a+b+c)-a}{671.672.3}\right]^3\le 1$$

$\Rightarrow P=abc\le 671^2.672$

Bài 30. Sử dụng bất đẳng thức AM-GM cho ba số dương ta được:

$$\frac{1}{x^2+xy}+\frac{1}{y^2+yz}+\frac{1}{z^2+zx}\ge\frac{3}{\sqrt[3]{(x^2+xy)(y^2+yz)(z^2+zx)}}$$

$$=\frac{3}{\sqrt[3]{xyz(x+y)(y+z)(z+x)}}=\frac{3}{\sqrt[3]{(xz+yz)(xy+zx)(yz+xy)}}$$

$$\ge\frac{3}{\frac{2(xy+yz+zx)}{3}}\ge\frac{27}{2(x+y+z)^2}$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z$.

Bài 31. Sử dụng bất đẳng thức AM – GM cho 3 số dương ta được

$$a^6+b^6+1\ge 3a^2b^2\Rightarrow\sqrt{a^6+b^6+1}\ge\sqrt{3}ab.$$

Tương tự cho hai căn thức còn lại rồi cộng lại theo vế ta có đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài 32. Sử dụng bất đẳng thức AM – GM dạng luỹ thừa ta được

$$a^2+2b^2=a^2+b^2+b^2\ge 3\left(\frac{a+b+b}{3}\right)^2=\frac{(a+2b)^2}{3}$$

$$\Rightarrow\sqrt{a^2+2b^2}\ge\frac{a+2b}{\sqrt{3}}$$

Tương tự ta có

$$\sqrt{b^2+2c^2} \ge \frac{b+2c}{\sqrt{3}}; \sqrt{c^2+2a^2} \ge \frac{c+2a}{\sqrt{3}}.$$

Cộng lại theo vế ba bất đẳng thức trên ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c.$

Bài tập tương tự

Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh

$$\sqrt[3]{a^3+7b^3}+\sqrt[3]{b^3+7c^3}+\sqrt[3]{c^3+7a^3} \ge 2(a+b+c).$$

Bài 33. Sử dụng bất đẳng thức AM – GM cho (n-1) số dương ta được

$$\frac{1}{a_k}-1=\frac{1-a_k}{a_k}=\frac{\sum\limits_{1\le i\ne k}^{n} a_i}{a_k} \ge \frac{(n-1)\sqrt[n-1]{\prod\limits_{1\le i\ne k}^{n} a_i}}{a_k}, k=\overline{1,n}.$$

Nhân theo vế n bất đẳng thức trên ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1=a_2=...=a_n=\frac{1}{n}.$

Bài 34. Dấu bằng đạt tại $a=b=\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} 1+a^2+b^2=\frac{3}{2} \\ 6ab=\frac{3}{2} \end{cases}.$

Ta viết lại P và sử dụng bất đẳng thức AM – GM cho hai số

$$P=\left(\frac{1}{1+a^2+b^2}+\frac{1}{6ab}\right)+\frac{1}{3ab} \ge \frac{4}{1+a^2+b^2+6ab}+\frac{1}{3\left(\frac{a+b}{2}\right)^2}$$

$$=\frac{4}{1+(a+b)^2+4ab}+\frac{4}{3(a+b)^2} \ge \frac{4}{1+(a+b)^2+(a+b)^2}+\frac{4}{3(a+b)^2} \ge \frac{8}{3}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\frac{8}{3}$ đạt tại $a=b=\frac{1}{2}.$

Bài 35. Viết lại P và sử dụng bất đẳng thức AM – GM ta có

$$P=\left(\frac{3}{4}a+\frac{3}{a}\right)+\left(\frac{b}{2}+\frac{9}{2b}\right)+\left(\frac{c}{4}+\frac{4}{c}\right)+\frac{a+2b+3c}{4} \ge 13.$$

Dấu bằng đạt tại $a=2, b=3, c=4.$

Bài 36. Bất đẳng thức đã cho tương đương với:

$$\frac{2xy(x+y)+2yz(y+z)+3xz(x+z)}{(x+y)(y+z)(z+x)}\geq\frac{5}{3}$$

$$\Leftrightarrow 2xy(x+y)+2yz(y+z)+3xz(x+z)\geq\frac{5}{3}(x+y)(y+z)(z+x)$$

$$\Leftrightarrow xy(x+y)+yz(y+z)+4xz(z+x)\geq 10xyz$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+y}{z}+\frac{y+z}{x}+\frac{4(x+z)}{y}\geq 10$$

Đến đây chỉ cần áp dụng AM-GM ta có: $\frac{4x}{y}+\frac{y}{x}\geq 4;\frac{y}{z}+\frac{4z}{y}\geq 4;\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\geq 2.$

Cộng lại theo vế ba bất đẳng thức trên ta có đpcm.

Bài 37. Sử dụng bất đẳng thức AM – GM cho ba số dương ta được

$$\frac{a\left(b^2+3\right)}{3c^2+1}+\frac{b\left(c^2+3\right)}{3a^2+1}+\frac{c\left(a^2+3\right)}{3b^2+1}\geq 3\sqrt[3]{\frac{a\left(b^2+3\right)}{3c^2+1}.\frac{b\left(c^2+3\right)}{3a^2+1}.\frac{c\left(a^2+3\right)}{3b^2+1}}.$$

Chú ý $\frac{a\left(b^2+3\right)}{3c^2+1}.\frac{b\left(c^2+3\right)}{3a^2+1}.\frac{c\left(a^2+3\right)}{3b^2+1}=\prod\frac{a\left(a^2+3\right)}{3a^2+1}\geq 1$ bởi vì

$$\frac{a\left(a^2+3\right)}{3a^2+1}-1=\frac{\left(a-1\right)^3}{3a^2+1}\geq 0.$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

$$P\geq\frac{3(x+y+z)}{4}-\frac{3}{2}\geq\frac{3}{4}.$$

Bài tập tương tự

Cho x, y, z là các số thực dương có tích bằng 1.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{x^3}{\left(1+y\right)\left(1+z\right)}+\frac{y^3}{\left(1+z\right)\left(1+x\right)}+\frac{z^3}{\left(1+x\right)\left(1+y\right)}.$$

Bài 39. Theo giả thiết ta có

$$\begin{cases}abc\left(a+b+c\right)\geq ab+bc+ca\\ a+b+c\geq\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}abc\left(a+b+c\right)\geq\sqrt{3abc\left(a+b+c\right)}\\ a+b+c\geq\frac{9}{a+b+c}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a+b+c\geq\frac{3}{abc}\\ a+b+c\geq 3\end{cases}$$

Do đó $\Rightarrow \dfrac{a+b+c}{3} \ge \dfrac{3}{a+b+c}; \dfrac{2}{3}(a+b+c) \ge \dfrac{2}{3}.\dfrac{3}{abc} = \dfrac{2}{abc}.$

Cộng lại theo vế hai bất đẳng thức trên ta có điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài 40. Sử dụng bất đẳng thức AM – GM cho bốn số dương ta được

$$x+1=\frac{x}{3}+\frac{x}{3}+\frac{x}{3}+1\ge 4\sqrt[4]{\frac{x^3}{27}} \Rightarrow (x+1)^4 \ge \frac{4^4}{27}x^3.$$

Tương tự ta có $(y+1)^4 \ge \dfrac{4^4}{27}y^3.$

Do đó

$$\frac{x^4y^4}{(x+y)^2(x+1)^4(y+1)^4} \le \frac{x^4y^4}{(x+y)^2.\dfrac{4^4}{27}x^3.\dfrac{4^4}{27}y^3} = \frac{3^6}{4^8}.\frac{xy}{(x+y)^2} \le \left(\frac{3}{8}\right)^6.$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=3$.

Bài 42. Bất đẳng thức đã cho là tổng của hai bất đẳng thức

$$|x|+|y|+|z| \le \sqrt{3(x^2+y^2+z^2)} = 3$$

$$x^2y^2z^2 \le \left(\frac{x^2+y^2+z^2}{3}\right)^3 = 1 \Rightarrow -xyz \le 1.$$

Bất đẳng thức được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra chẳng hạn tại $x=y=1, z=-1$.

Chú ý. Nếu cần tìm Max của $x+y+z-xyz$ ta sử dụng bất đẳng thức C –S (xem chủ đề bất đẳng thức C –S).

Bài 43. Sử dụng bất đẳng thức AM – GM cho ba số dương ta được

$$\sqrt{\frac{a+1}{ab+1}}+\sqrt{\frac{b+1}{bc+1}}+\sqrt{\frac{c+1}{ca+1}} \ge 3\sqrt[6]{\frac{a+1}{ab+1}.\frac{b+1}{bc+1}.\frac{c+1}{ca+1}}.$$

Ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{a+1}{ab+1}.\frac{b+1}{bc+1}.\frac{c+1}{ca+1} \ge 1$$

$$\Leftrightarrow a^2b^2c^2+2abc-3 \le 0 \Leftrightarrow (abc-1)(abc+3) \le 0$$

Bất đẳng thức cuối đúng vì $abc \le \left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)^3 = 1.$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài 45. Dự đoán dấu bằng đạt tại $x=y=z\Rightarrow \dfrac{3x^4}{(x-1)^2}=48\Rightarrow x=2$.

Vậy ta sử dụng bất đẳng thức AM – GM như sau

$$\frac{x^4}{(y-1)^2}+16(y-1)+16(y-1)+16\ge 32\Rightarrow \frac{x^4}{(y-1)^2}\ge 32(x-y)+16$$

$$\frac{y^4}{(z-1)^2}\ge 32(y-z)+16 .$$

$$\frac{z^4}{(x-1)^2}\ge 32(y-z)+16$$

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên ta có đpcm.

Bài 46. Bất đẳng thức đã cho tương đương với: $ab+bc+ca\ge 12$.

Bất đẳng thức đúng vì $\dfrac{1}{ab}+\dfrac{1}{bc}+\dfrac{1}{ca}\ge \dfrac{9}{ab+bc+ca}\Rightarrow ab+bc+ca\ge 12$.

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=2$.

Bài 47. Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có

$$\frac{3a^2+4}{4a}+\frac{2+b^3}{b^2}=\frac{3a^2+4}{4a}+\frac{2}{b^2}+b$$

$$=\frac{3a}{4}+\frac{1}{a}+\left(\frac{2}{b^2}+\frac{b}{4}+\frac{b}{4}\right)+\frac{b}{2}$$

$$\ge \frac{3a}{4}+\frac{1}{a}+3\sqrt[3]{\frac{2}{b^2}.\frac{b}{4}.\frac{b}{4}}+\frac{b}{2}=\frac{a+b}{2}+\frac{a}{4}+\frac{1}{a}+\frac{3}{2}$$

$$\ge \frac{a+b}{2}+\sqrt{\frac{a}{4}.\frac{1}{a}}+\frac{3}{2}\ge \frac{9}{2}$$

Vì vậy $P_{min}=\dfrac{9}{2}$ khi $a=b=2$.

Bài 48. Đặt $x=3a+b+c, y=3b+a+c, z=3c+b+a$.

$$\Rightarrow a=\frac{4x-y-z}{10}, b=\frac{4y-z-x}{10}, c=\frac{4z-x-y}{10}$$

$$\Rightarrow P=\frac{1}{10}\left[12-\left(\frac{y}{x}+\frac{x}{y}+\frac{x}{z}+\frac{z}{x}+\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)\right]\le \frac{3}{5}.$$

Chú ý $\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}+\dfrac{x}{z}+\dfrac{z}{x}+\dfrac{y}{z}+\dfrac{z}{y}\ge 6\sqrt[6]{\dfrac{y}{x}.\dfrac{x}{y}.\dfrac{x}{z}.\dfrac{z}{x}.\dfrac{y}{z}.\dfrac{z}{y}}=6$.

Vậy $MaxP = \frac{3}{5}$ đạt tại $a = b = c$.

Chú ý. Ta có thể chứng minh bằng bất đẳng thức C –S.

Bài 49. Theo giả thiết ta có: $2 \ge a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca$.

Chú ý

$$\frac{ab+1}{(a+b)^2} = \frac{2ab+2}{2(a+b)^2} \ge \frac{2ab+a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca}{2(a+b)^2}$$

$$= \frac{(a+b)^2+(b+c)(c+a)}{2(a+b)^2} = \frac{1}{2} + \frac{(b+c)(c+a)}{2(a+b)^2}$$

Tương tự cho hai biểu thức còn lại suy ra

$$P \ge \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{(b+c)(c+a)}{(a+b)^2} + \frac{(c+a)(a+b)}{(b+c)^2} + \frac{(a+b)(b+c)}{(c+a)^2}\right]$$

$$\ge \frac{3}{2} + \frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{(b+c)(c+a)}{(a+b)^2}.\frac{(c+a)(a+b)}{(b+c)^2}.\frac{(a+b)(b+c)}{(c+a)^2}} = 3$$

Bất đẳng thức được chứng minh.

Bài 50. Sử dụng bất đẳng thức AM – GM ta có

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+3y}} = \sqrt{\frac{x}{x+y}.\frac{x+y}{x+3y}} \le \frac{1}{2}\left(\frac{x}{x+y} + \frac{x+y}{x+3y}\right);$$

$$\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x+3y}} = \sqrt{\frac{1}{2}.\frac{2y}{x+3y}} \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{2y}{x+3y}\right);$$

Cộng theo vế hai bất đẳng thức trên ta được $\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x+3y}} \le \frac{1}{2}\left(\frac{x}{x+y} + \frac{3}{2}\right)$.

Tương tự ta có $\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{y+3x}} \le \frac{1}{2}\left(\frac{y}{x+y} + \frac{3}{2}\right)$.

Cộng theo vế hai bất đẳng thức trên có đcpm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y$.

Bài 51. Ta có $P = \frac{\sqrt{x-2}}{x} + \frac{\sqrt{y-3}}{y} + \frac{\sqrt{z-4}}{z}$.

$$= \frac{\sqrt{2(x-2)}}{x\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3(y-3)}}{y\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{4(z-4)}}{2z}$$

$$\le \frac{2+x-2}{2\sqrt{2}x} + \frac{3+y-3}{2\sqrt{3}y} + \frac{4+z-4}{4z} = \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{4}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=4, y=6, z=8$.

Bài 52. Sử dụng bất đẳng thức AM – GM ta có

$$\sqrt[3]{x+3y}=\sqrt[3]{1.1.(x+3y)}\le\frac{1+1+x+3y}{3}$$

$$\sqrt[3]{y+3z}=\sqrt[3]{1.1.(y+3z)}\le\frac{1+1+y+3z}{3}$$

$$\sqrt[3]{z+3x}=\sqrt[3]{1.1.(z+3x)}\le\frac{1+1+z+3x}{3}$$

Cộng theo vế 3 bất đẳng thức trên ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=\frac{1}{4}$.

Bài 53. Ta có $P=\frac{x^2+y^2+z^2}{2}+\frac{xy+yz+zx}{xyz}$.

Dự đoán dấu bằng đạt tại khi ba biến bằng nhau, khi đó

$$P=\frac{3x^2}{2}+\frac{3}{x}=\frac{3x^2}{2}+\frac{3}{2x}+\frac{3}{2x}\ge 3\sqrt[3]{\frac{3x^2}{2}.\frac{3}{2x}.\frac{3}{2x}}=\frac{9}{2}.$$

Tức dấu bằng đạt tại $x=y=z=1$.

Vậy ta sử dụng bất đẳng thức AM – GM như sau

$$P=\frac{x^2+y^2+z^2}{2}+\frac{xy+yz+zx}{2xyz}+\frac{xy+yz+zx}{2xyz}$$

$$\ge\frac{3\sqrt[3]{x^2y^2z^2}}{2}+\frac{3\sqrt[3]{x^2y^2z^2}}{2xyz}+\frac{3\sqrt[3]{x^2y^2z^2}}{2xyz}$$

$$\ge 3\sqrt[3]{\frac{3\sqrt[3]{x^2y^2z^2}}{2}.\frac{3\sqrt[3]{x^2y^2z^2}}{2xyz}.\frac{3\sqrt[3]{x^2y^2z^2}}{2xyz}}=\frac{9}{2}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$.

Bài 54. Sử dụng bất đẳng thức AM – GM ta có

$$\frac{a^2}{3a^2+(b+c)^2}=\frac{a^2}{2a^2+\left[a^2+(b+c)^2\right]}\le\frac{a^2}{2a^2+2a(b+c)}=\frac{a}{2(a+b+c)}.$$

Tương tự ta có $\frac{b^2}{3b^2+(c+a)^2}\le\frac{b}{2(a+b+c)}$

$$\frac{c^2}{3c^2+(a+b)^2}\le\frac{c}{2(a+b+c)}$$

Cộng lại theo vế 3 bất đẳng thức trên ta có điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b,c=0$ hoặc các hoán vị.

Bài 55. Sử dụng bất đẳng thức AM – GM ta có

$$ab+2abc=2ab\left(c+\frac{1}{2}\right)\le 2a\left(\frac{b+c+\frac{1}{2}}{2}\right)^2=\frac{a(7-2a)^2}{8}.$$

Ta chỉ cần chứng minh $a+\frac{a(7-2a)^2}{8}\le\frac{9}{2}\Leftrightarrow(4-a)(2a-3)^2\ge 0$.

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=\frac{3}{2},b=1,c=\frac{1}{2}$.

Bài 56. Chú ý $(a+b+c)^2\ge 3(ab+bc+ca)\Rightarrow ab+bc+ca\le 3$.

Ta có $\frac{ab}{\sqrt{c^2+3}}\le\frac{ab}{\sqrt{c^2+ab+bc+ca}}=\frac{ab}{\sqrt{(c+a)(c+b)}}\le\frac{1}{4}\left(\frac{ab}{c+a}+\frac{ab}{c+b}\right)$.

Tương tự cho 2 căn thức còn lại cộng theo vế 3 bất đẳng thức ta có điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài 57. Sử dụng bất đẳng thức AM – GM ta có

$$\frac{ab}{c^2+1}=\frac{1}{4}.\frac{(a+b)^2}{(c^2+a^2)+(c^2+b^2)}\le\frac{1}{4}\left(\frac{a^2}{c^2+a^2}+\frac{b^2}{c^2+b^2}\right)$$

$$\frac{bc}{a^2+1}\le\frac{1}{4}\left(\frac{b^2}{a^2+b^2}+\frac{c^2}{a^2+c^2}\right);\frac{ca}{b^2+1}\le\frac{1}{4}\left(\frac{c^2}{b^2+c^2}+\frac{a^2}{b^2+a^2}\right)$$

Cộng theo vế 3 bất đẳng thức trên ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Bài 58. Ta có:

$$\frac{1}{(x+z)^2}+\frac{1}{(y+z)^2}=\frac{x^2+y^2+2z(x+y)+2z^2}{(xy+xz+yz+z^2)^2}=x^2+y^2+2(1-xy)=(x-y)^2+2$$

Suy ra $P=\frac{1}{4(x-y)^2}+(x-y)^2+2\ge 2\sqrt{\frac{1}{4(x-y)^2}.(x-y)^2}+2=3$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{1}{4(x-y)^2}=(x-y)^2\Leftrightarrow x-y=\frac{1}{\sqrt{2}}$ do $x>y$.

Khi đó z là nghiệm dương của phương trình: $z^2+z(x+y)+xy-1=0$.

$$\Leftrightarrow z=\frac{-x-y+\sqrt{(x+y)^2-4(xy-1)}}{2}=\frac{-x-y+\sqrt{(x-y)^2+4}}{2}=\frac{\frac{3}{\sqrt{2}}-x-y}{2}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 3 đạt tại

$$x-y=\frac{1}{\sqrt{2}},z=\frac{\frac{3}{\sqrt{2}}-x-y}{2},\left(x+y<\frac{3}{\sqrt{2}}\right).$$

Nhận xét. Đây là một bài toán khá đơn giản dựa vào biến đổi chú ý điều kiện $(z+x)(z+y)=1$ ngoài ra ta có thể đặt $a=x+z,b=z+y\Rightarrow ab=1$ và khi đó

$$P=\frac{1}{4(a-b)^2}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}.$$

Đây là dạng toán quen thuộc được đề cập đến trong chủ đề tính đẳng cấp hoặc sử dụng hàm số ta có 2 cách xử lý như sau:

Cách 1: $P=\frac{ab}{4(a-b)^2}+\frac{ab}{a^2}+\frac{ab}{b^2}=\frac{1}{4\left(\frac{a}{b}-2+\frac{b}{a}\right)}+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$.

Đặt $t=\frac{a}{b}+\frac{b}{a},(t>2)$ đưa về khảo sát hàm số $f(t)=\frac{1}{4(t-2)}+t$ hoặc đánh giá dựa vào bất đẳng thức AM-GM như sau:

$$P=\frac{1}{4(t-2)}+t=\frac{1}{4(t-2)}+(t-2)+2\geq 2\sqrt{\frac{1}{4(t-2)}.(t-2)}+2=3.$$

Cách 2: Thế $b=\frac{1}{a}$ đưa về khảo sát hàm số $f(a)=\frac{1}{4\left(a-\frac{1}{a}\right)^2}+\frac{1}{a^2}+a^2$ ta tìm được Min của f(a) bằng 3 và có kết quả tương tự hai cách đề cập trên.

Bài 59. Nhận xét. Hình thức bài toán này tương tự bài toán trước đó tuy nhiên hai nhân tử sau không có dạng đối xứng ta cần khéo léo khai thác giả thiết tích $(b+c)(a+c)=1$.

Ta có: $\frac{6}{(b+c)^2}+\frac{12}{(a+c)^2}=\frac{6\left[(a+c)^2+2(b+c)^2\right]}{\left[(a+c)(b+c)\right]^2}=6\left[(a+c)^2+2(b+c)^2\right]$.

Theo giả thiết ta có:

$$(a-b)^2=\left[(a+c)-(b+c)\right]^2=(a+c)^2+(b+c)^2-2.$$

Đặt $x=a+c, y=b+c \Rightarrow xy=1$

và $P=\dfrac{1}{x^2+y^2-2}+\dfrac{6}{y^2}+\dfrac{12}{x^2}=\dfrac{1}{x^2+\dfrac{1}{x^2}-2}+\dfrac{12}{x^2}+6x^2=\dfrac{x^2}{\left(x^2-1\right)^2}+\dfrac{6x^4+12}{x^2}$.

Đến đây ta có thể khảo sát hàm số $f(t)=\dfrac{t}{(t-1)^2}+\dfrac{6t^2+12}{t}$ với $t=x^2,(t>1)$ do

$a>b \Rightarrow t=a+c>\sqrt{(a+b)(a+c)}=1$.

Hoặc biến đổi tương đương như sau:

$$P=\left[\frac{t}{(t-1)^2}+\frac{6t^2+12}{t}-20\right]+20=\frac{(t-2)^2\left(6t^2-8t+3\right)}{t(t-1)^2}+20\geq 20 \text{ (với } t>1).$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 20 đạt tại $t=2 \Leftrightarrow a+c=\sqrt{2}, b+c=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Bài 60. Vế trái bất đẳng thức được viết lại dưới dạng

$$\frac{bc}{y}+\frac{ca}{z}+\frac{ab}{x}+\frac{zx}{a}+\frac{xy}{b}+\frac{yz}{c}$$

$$=\left(\frac{bc}{y}+c\right)+\left(\frac{ca}{z}+a\right)+\left(\frac{ab}{x}+b\right)+\left(\frac{zx}{a}+z\right)+\left(\frac{xy}{b}+x\right)+\left(\frac{yz}{c}+y\right)-3$$

$$=\frac{c}{y}+\frac{a}{z}+\frac{b}{x}+\frac{z}{a}+\frac{x}{b}+\frac{y}{c}-3=\left(\frac{a}{z}+\frac{z}{a}\right)+\left(\frac{b}{x}+\frac{x}{b}\right)+\left(\frac{c}{y}+\frac{y}{c}\right)\geq 3$$

Bài 61. Bất đẳng thức đã cho tương đương với:

$$\sum\frac{1}{y}(x-\frac{z(x+y)}{y+z})\geq 0$$

$$\Leftrightarrow\sum\frac{x-z}{y+z}\geq 0\Leftrightarrow\sum(\frac{x-z}{y+z}+1)\geq 3\Leftrightarrow\sum\frac{x+y}{y+z}\geq 3.$$

Đúng theo AM – GM.

Bài 62. Ta có $a^3+b^3\geq\dfrac{1}{4}(a+b)^3$.

Do đó sử dụng bất đẳng thức AM – GM ta có

$$3\left(a^3+b^3+c^3\right)\geq 3\left(\frac{1}{4}(a+b)^3+\frac{c^3}{2}+\frac{c^3}{2}\right)\geq\frac{9}{2\sqrt[3]{2}}c^2(a+b).$$

Vậy ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{9}{2\sqrt[3]{2}}c^2(a+b)\geq 2c(ab+bc+ca)\Leftrightarrow\left(\frac{9}{2\sqrt[3]{2}}-2\right)c^2(a+b)\geq 2abc.$$

Bất đẳng thức cuối luôn đúng do $\frac{9}{2\sqrt[3]{2}}-2>1; c\geq\sqrt{ab}$.

Bất đẳng thức được chứng minh.

Bài 63. Sử dụng bất đẳng thức AM – GM ta có

$$(a+b)(b+c)(c+a)\leq\left(\frac{a+b+b+c+c+a}{3}\right)^3=\frac{8}{27}(a+b+c)^3.$$

Do vậy ta chỉ cần chứng minh

$$3+\frac{9abc}{(a+b+c)^3}\geq\frac{12(ab+bc+ca)}{(a+b+c)^2}$$

$$\Leftrightarrow(a+b+c)^3+3abc\geq4(a+b+c)(ab+bc+ca)$$

$$\Leftrightarrow a^3+b^3+c^3+3abc\geq ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)$$

Bất đẳng thức cuối đúng theo BĐT Schur bậc 3.

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bài 64. Ta đặt

$$a_1=\frac{x_1}{1+x_1}$$

$$a_2=\frac{x_2}{(1+x_1)(1+x_1+x_2)}$$

$$\ldots$$

$$a_n=\frac{x_n}{(1+x_1+x_2+\cdots+x_{n-1})(1+x_1+x_2+\cdots+x_n)}$$

$$a_{n+1}=\frac{1}{1+x_1+x_2+\cdots+x_n}$$

Khi đó ta có $a_1+a_2+\cdots+a_n+a_{n+1}=1$.

Ta cần chứng minh: $a_1a_2\cdots a_{n+1}\leq\frac{1}{(n+1)^{n+1}}$.

Bất đẳng thức cuối đúng theo AM – GM nên có đpcm.

Bài 65. Sử dụng bất đẳng thức AM – GM kết hợp vế trái là hàm đồng biến với tích ab ta có

$$\frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}=\frac{c.ab}{(a+b)\left(c^2+c(a+b)+ab\right)}$$

$$\le \frac{c\left(\frac{a+b}{2}\right)^2}{(a+b)\left[c^2+c(a+b)+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right]}.$$

$$=\frac{c(a+b)}{(a+b+2c)^2}$$

Vậy ta chứng minh $\frac{c(a+b)}{(a+b+2c)^2}\le\frac{(a+b)(a+b+2c)}{(3a+3b+2c)^2}$.

$$\Leftrightarrow c(3a+3b+2c)^2\le(a+b+2c)^3$$

Sử dụng bất đẳng thức AM – GM ta có

$$c(3a+3b+2c)^2=\frac{1}{8}.8c.(3a+3b+2c)(3a+3b+2c)$$

$$\le\frac{1}{8}\left(\frac{8c+3a+3b+2c+3a+3b+2c}{3}\right)^3=(a+b+2c)^3$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bài 66. Ta có:

$$\frac{1}{\sqrt{a(b+c)+2c^2}}+\frac{1}{\sqrt{b(a+4c)}}\ge\frac{2}{\sqrt[4]{\left(ab+ac+2c^2\right)(ab+4bc)}}\ge\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2ab+ac+4bc+2c^2}}$$

$$=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{(a+2c)(2b+c)}}\ge\frac{4\sqrt{2}}{a+2b+3c}\ge\frac{4\sqrt{2}}{a+2b+2014c}$$

Suy ra $P\ge(a+2b+2014c).\frac{4\sqrt{2}}{a+2b+2014c}=4\sqrt{2}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $4\sqrt{2}$ xảy ra khi $c=0,a=2b>0$.

Bài 67. Không mất tính tổng quát ta giả sử $a>b>c$ ta có:

$$P=\frac{2}{a-b}+\frac{2}{b-c}+\frac{2}{a-c}+\frac{5}{\sqrt{ab+bc+ca}}.$$

Sử dụng bất đẳng thức: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\ge\frac{4}{x+y},\forall x,y>0$ ta được:

$$P \geq 2.\frac{4}{a-b+b-c}+\frac{2}{a-c}+\frac{5}{\sqrt{ab+bc+ca}}=5\left(\frac{2}{a-c}+\frac{1}{\sqrt{ab+bc+ca}}\right)$$

$$\geq \frac{5.2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{(a-c)^2(ab+bc+ca)}}=\frac{20}{\sqrt[4]{(a-c)^2(4ab+4bc+4ca)}}$$

$$\geq \frac{20}{\sqrt{\frac{(a-c)^2+4ab+4bc+4ca}{2}}}=\frac{20\sqrt{2}}{\sqrt{(a+c)^2+4b(a+c)}}=\frac{20\sqrt{2}}{\sqrt{(a+c)(a+c+4b)}}$$

$$=\frac{20\sqrt{2}}{\sqrt{(1-b)(1+3b)}}=\frac{20\sqrt{6}}{\sqrt{(3-3b)(1+3b)}}\geq \frac{40\sqrt{6}}{3-3b+1+3b}=10\sqrt{6}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} a-b=b-c \\ \dfrac{2}{a-c}=\dfrac{1}{\sqrt{ab+bc+ca}} \\ 3-3b=1+3b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{2+\sqrt{6}}{6} \\ b=\dfrac{1}{3} \\ c=\dfrac{2-\sqrt{6}}{6} \end{cases}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $10\sqrt{6}$ đạt tại $a=\frac{1}{3}+\frac{1}{\sqrt{6}}, b=\frac{1}{3}, c=\frac{1}{3}-\frac{1}{\sqrt{6}}$ hoặc các hoán vị.

Nhận xét. Ta có thể xử lý bài toán trên bằng phương pháp hàm số xem chương 3.

Bài 68. Không mất tính tổng quát giả sử $z=\min\{x,y,z\}$ ta có

$$x^2+y^2+z^2=2(xy+yz+zx)$$

$$\Leftrightarrow (x+y)^2+z^2-2z(x+y)=4xy \Leftrightarrow (x+y-z)^2=4xy$$

Sử dụng bất đẳng thức AM – GM ta có

$$\frac{x+y+z}{3}=\frac{\frac{x+y-z}{2}+\frac{x+y-z}{2}+2z}{3}\geq \sqrt[3]{\frac{z(x+y-z)^2}{2}}=\sqrt[3]{2xyz}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} x+y-z=4z \\ x+y-z=2\sqrt{xy} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=5z \\ xy=4z^2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4z, y=z \\ x=z, y=4z \end{array}\right.$.

<u>**Cách 2:**</u> Theo giả thiết ta có $\dfrac{xy+yz+zx}{(x+y+z)^2}=\dfrac{1}{4}$.

Ta cần chứng minh $\dfrac{xyz}{(x+y+z)^3}\leq \dfrac{1}{54}$.

Đặt $a=\frac{x}{x+y+z},b=\frac{y}{x+y+z},c=\frac{z}{x+y+z}\Rightarrow\begin{cases}a+b+c=1\\ab+bc+ca=\frac{1}{4}\end{cases}$.

Ta cần chứng minh $P=abc\le\frac{1}{54}$ (xem chủ đề kỹ thuật sử dụng tính đẳng cấp).

Bài 69. Theo giả thiết kết hợp sử dụng bất đẳng thức AM – GM ta có

$$8=(a+b)(b+c)(c+a)\le\left[\frac{2(a+b+c)}{3}\right]^3$$

$$\Rightarrow a+b+c\ge 3$$

Bất đẳng thức tương đương với:

$$(a+b+c)^{27}\ge 3^{26}\left(a^3+b^3+c^3\right)$$

$$\Leftrightarrow(a+b+c)^{27}\ge 3^{26}\left[(a+b+c)^3-3(a+b)(b+c)(c+a)\right]$$

$$\Leftrightarrow(a+b+c)^{27}\ge 3^{26}\left[(a+b+c)^3-24\right]$$

Đặt $x=(a+b+c)^3\Rightarrow x\ge 27$ ta cần chứng minh $\frac{x^9}{x-24}\ge 3^{26}$.

Xét hàm số $f(x)=\frac{x^9}{x-24}$ với $x\ge 27$ ta có

$$f'(x)=\frac{8x^8(x-27)}{(x-24)^2}\ge 0,\forall x\ge 27.$$

Do đó f(x) là hàm đồng biến trên $[27;+\infty)$. Vì vậy $f(x)\ge f(27)=3^{26}$.

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài 70. Đặt $x=b+c-a,y=c+a-b,z=a+b-c\Rightarrow xyz=1$ và

$$a=\frac{y+z}{2},b=\frac{z+x}{2},c=\frac{x+y}{2}.$$

Bất đẳng thức trở thành

$$\frac{x+y+z}{3}\ge\sqrt[5]{\frac{x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx}{6}}$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^5\ge\frac{(x+y+z)^2-(xy+yz+zx)}{6}$$

Chú ý điều kiện $xyz=1\Rightarrow\begin{cases}xy+yz+zx\ge 3\sqrt[3]{x^2y^2z^2}=3\\x+y+z\ge 3\sqrt[3]{xyz}=3\end{cases}$.

Suy ra $\left(x+y+z\right)^2-xy-yz-zx\le\left(x+y+z\right)^2-3$.

Vậy ta chứng minh $\left(\dfrac{x+y+z}{3}\right)^5\ge\dfrac{\left(x+y+z\right)^2-3}{6}$.

Đặt $t=\dfrac{x+y+z}{3}\ge 1$ ta cần chứng minh

$t^5\ge\dfrac{3t^2}{2}-\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow(t-1)\left[t^4+t\left(t^2-\dfrac{1}{2}\right)+\left(t^2-\dfrac{1}{2}\right)\right]\ge 0$.

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài 71. Giả sử $a=\min\{a,b,c\}$.

Đặt $b=a+u,c=a+v,(u,v\ge 0)$ bất đẳng thức trở thành

$(3-\dfrac{3}{\sqrt[3]{4}})(u^2-uv+v^2)a+u^3-\dfrac{3}{\sqrt[3]{4}}uv^2+v^3\ge 0$.

Bất đẳng thức cuối luôn đúng do

$u^3+v^3=u^3+\dfrac{v^3}{2}+\dfrac{v^3}{2}\ge 3\sqrt[3]{\dfrac{u^3v^6}{4}}=\dfrac{3}{\sqrt[3]{4}}uv^2$.

Bài 72. Đặt $a=1/x;b=1/y;c=1/z$ bất đẳng thức trở thành:

$\dfrac{\sqrt{a^2+3}}{ac+3b}+\dfrac{\sqrt{b^2+3}}{ba+3c}+\dfrac{\sqrt{c^2+3}}{cb+3a}\ge\dfrac{3}{2}$.

Sử dụng bất đẳng thức C –S ta có

$$\frac{\sqrt{a^2+3}}{ac+3b}=\frac{\sqrt{4\left(a^2+3\right)}}{2\left[ac+b\left(a+b+c\right)\right]}=\frac{\sqrt{4\left(a^2+3\right)}}{2\left(b+a\right)\left(b+c\right)}\ge\frac{a+3}{2\left(b+a\right)\left(b+c\right)}$$

$$\frac{\sqrt{b^2+3}}{ba+3c}\ge\frac{b+3}{2\left(c+a\right)\left(c+b\right)};\frac{\sqrt{c^2+3}}{cb+3a}\ge\frac{c+3}{2\left(a+b\right)\left(a+c\right)}$$

Vậy ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{a+3}{2\left(b+a\right)\left(b+c\right)}+\frac{b+3}{2\left(c+a\right)\left(c+b\right)}+\frac{c+3}{2\left(a+b\right)\left(a+c\right)}\ge\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow\left(a+3\right)\left(a+c\right)+\left(b+3\right)\left(a+b\right)+\left(c+3\right)\left(b+c\right)\ge 3\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)$$

$$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca+18\ge 3\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)$$

Theo bất đẳng thức AM – GM ta có

$$a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca+18=(a+b+c)^2-(ab+bc+ca)+18$$
$$\geq (a+b+c)^2-\frac{1}{3}(a+b+c)^2+18=24$$
$$3(a+b)(b+c)(c+a)\leq 3\left(\frac{a+b+b+c+c+a}{3}\right)^3=24$$

Do đó bất đẳng thức cuối đúng và ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$.

Bài 73. Đặt $x=\sqrt{a+b-c},y=\sqrt{b+c-a},z=\sqrt{c+a-b}$.

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2+z^2=a+b+c=3 \\ x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2=\sum(a+b-c)(b+c-a) \\ \qquad =\sum\left(b^2-(a-c)^2\right)=4(ab+bc+ca)-9 \end{cases}$$

Ta cần chứng minh $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq \frac{36}{9+x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2}$

$\Leftrightarrow \left(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+9\right)(xy+yz+zx)\geq 36xyz$.

Sử dụng bất đẳng thức AM – GM ta có

$$x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+9\geq 12\sqrt[3]{xyz}$$
$$xy+yz+zx\geq 3\sqrt[3]{x^2y^2z^2}$$

Nhân theo vế 2 bất đẳng thức trên ta có ngay điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài 74. Đặt $a=x+y,b=y+z,c=z+x\Rightarrow a,b,c\geq 0;ab+bc+ca>0$.

Khi đó $P=\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}}$.

Tìm giá trị nhỏ nhất: $\sqrt{\frac{a}{b+c}}\geq \frac{2a}{a+b+c};\sqrt{\frac{b}{c+a}}\geq \frac{2b}{a+b+c};\sqrt{\frac{c}{a+b}}\geq \frac{2c}{a+b+c}$.

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên ta được $P\geq 2$.

Dấu bằng đạt tại $x>0;y=z=0$ hoặc các hoán vị.

Bài 75. Trước hết ta chứng minh

$$(2a^2+bc)(2b^2+ca)(2c^2+ab)\leq \frac{(a+2b)^2(b+2c)^2(c+2a)^2}{8}.$$

Thật vậy ta có $\frac{3}{2}\left[(2a^2+bc)(2b^2+ca)(2c^2+ab)-9abc\right]=$

$$=(a+2b)\left(2c^2+ab\right)+(b+2c)\left(2a^2+bc\right)+(c+2a)\left(2b^2+ca\right)$$
$$\geq 3\sqrt[3]{(a+2b)\left(2c^2+ab\right)(b+2c)\left(2a^2+bc\right)(c+2a)\left(2b^2+ca\right)}$$

Mặt khác $(2a^2+bc)(2b^2+ca)(2c^2+ab)-9abc\leq(2a^2+bc)(2b^2+ca)(2c^2+ab)$.

Suy ra

$$\sqrt[3]{(a+2b)\left(2c^2+ab\right)(b+2c)\left(2a^2+bc\right)(c+2a)\left(2b^2+ca\right)}\leq$$
$$\sqrt{\leq\frac{(2a^2+bc)(2b^2+ca)(2c^2+ab)}{2}}$$
$$\Rightarrow(2a^2+bc)(2b^2+ca)(2c^2+ab)\leq\frac{(a+2b)^2(b+2c)^2(c+2a)^2}{8}$$

Sử dụng bất đẳng thức AM – GM ta có

$$(a+2b)(b+2c)(c+2a)=\frac{1}{4}.(a+2b)(4b+8c)(c+2a)$$
$$\leq\frac{1}{4}\left[\frac{3(a+2b+3c)}{3}\right]^3=16$$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=2,b=1,c=0$.

Bài 76. Không mất tính tổng quát giả sử $c=\min\{a,b,c\}\Rightarrow c\leq1$.

Sử dụng bất đẳng thức AM – GM ta có

$$c+ab\leq c+\frac{a^2+b^2}{2}=c+\frac{3-c^2}{2}=\frac{-c^2+2c+3}{3};$$
$$(a+bc)(b+ca)\leq\frac{(a+b+bc+ca)^2}{4}=\frac{(a+b)^2(c+1)^2}{4}$$
$$\leq\frac{\left(c^2+1\right)\left(a^2+b^2\right)}{2}=\frac{\left(3-c^2\right)\left(c^2+1\right)}{2}$$
$$2(2-a)(2-b)=8-4(a+b)+2ab$$
$$=4-a^2-b^2+(a+b-2)^2\geq4-a^2-b^2=c^2+1$$

Do vậy ta chỉ cần chứng minh

$$8(2-c)\geq\left(3-c^2\right)\left(3+2c-c^2\right)\Leftrightarrow\left(7-c^2\right)(c-1)^2\geq0.$$

Bất đẳng thức cuối đúng và ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài 79. Sử dụng bất đẳng thức C – S và AM – GM ta có

$$\left(a^2+b+c\right)\left(1+b+c\right)\ge\left(a+b+c\right)^2=9$$

$$\Rightarrow\sqrt{\frac{a^2}{a^2+b+c}}\le\frac{a\sqrt{b+c+1}}{3}=\frac{a\sqrt{3\left(b+c+1\right)}}{3\sqrt{3}}\le\frac{a\left(b+c+1+3\right)}{6\sqrt{3}}$$

Tương tự ta có $\sqrt{\frac{b^2}{b^2+c+a}}\le\frac{b\left(a+c+1+3\right)}{6\sqrt{3}};\sqrt{\frac{c^2}{c^2+a+b}}\le\frac{c\left(b+a+1+3\right)}{6\sqrt{3}}$.

Gọi P là biểu thức vế trái và cộng theo vế 3 bất đẳng thức trên và chú ý

$ab+bc+ca\le\frac{1}{3}\left(a+b+c\right)^2=3$.

Ta có $P\le\frac{4\left(a+b+c\right)+2\left(ab+bc+ca\right)}{6\sqrt{3}}\le\frac{4.3+2.3}{6\sqrt{3}}=\sqrt{3}$.

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài 80. Theo giả thiết ta có $\left(ab+bc+ca\right)^2\ge 3abc\left(a+b+c\right)=3\left(ab+bc+ca\right)$

$$\Rightarrow ab+bc+ca\ge 3; ab\le ac\le bc\Rightarrow bc\ge 1$$

Do đó $\frac{\left(a-1\right)^2}{a}+\frac{\left(c-b\right)\left(bc-1\right)}{bc}\ge 0$

$$\Leftrightarrow a+c+\frac{1}{a}+\frac{1}{c}-2-b-\frac{1}{b}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow a+c+\left(a+b+c-\frac{1}{b}\right)-2-b-\frac{1}{b}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow a+c-1-\frac{1}{b}\ge 0\Leftrightarrow b\ge\frac{1}{a+c-1}$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài 82. Không mất tính tổng quát giả sử $c=\min\left\{a,b,c\right\}\Rightarrow c^2-bc\le 0; c^2-ac\le 0$.

Suy ra $\frac{1}{\sqrt{\left(b^2-bc+c^2\right)\left(c^2-ca+a^2\right)}}\ge\frac{1}{ab}$.

$$\frac{1}{\sqrt{\left(a^2-ab+b^2\right)\left(b^2-bc+c^2\right)}}+\frac{1}{\sqrt{\left(c^2-ca+a^2\right)\left(a^2-ab+b^2\right)}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a^2-ab+b^2}}\left(\frac{1}{\sqrt{b^2-bc+c^2}}+\frac{1}{\sqrt{c^2-ca+a^2}}\right)\ge\frac{1}{\sqrt{a^2-ab+b^2}}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$$

Sử dụng bất đẳng thức AM – GM ta có

$$\frac{1}{\sqrt{a^2-ab+b^2}}=\frac{\sqrt{ab+bc+ca}}{\sqrt{\left(a^2-ab+b^2\right)\left(ab+bc+ca\right)}}\geq\frac{2\sqrt{ab+bc+ca}}{a^2+c\left(a+b\right)+b^2}$$

$$=\frac{2\sqrt{ab+bc+ca}}{\left(a+b\right)\left(a+b+c\right)-2ab}=\frac{2\sqrt{ab+bc+ca}}{2\left(a+b-ab\right)}\geq\frac{\sqrt{ab}}{a+b-ab}$$

Gọi P là biểu thức vế trái ta có

$$P\geq\frac{\sqrt{ab}}{a+b-ab}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+\frac{1}{ab}=\frac{1}{ab}+\frac{1}{\sqrt{ab}}+\frac{\sqrt{ab}}{a+b-ab}$$

$$\geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{ab}.\frac{1}{\sqrt{ab}}.\frac{\sqrt{ab}}{a+b-ab}}=\frac{3}{\sqrt[3]{ab\left(a+b-ab\right)}}\geq\frac{3}{\sqrt[3]{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2}}\geq 3$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=1,c=0$ và các hoán vị.

Bài 83. Không mất tính tổng quát giả sử $x\geq y\geq z$ khi đó ta có

(i) $\dfrac{xy+yz+zx}{y^2+yz+z^2}\geq\dfrac{x+z}{y+z};\dfrac{xy+yz+zx}{x^2+zx+z^2}\geq\dfrac{y+z}{x+z}$.

(ii) $\dfrac{xy+yz+zx}{x^2+xy+y^2}\geq\dfrac{\left(x+z\right)\left(y+z\right)}{\left(x+z\right)^2+\left(x+z\right)\left(y+z\right)+\left(y+z\right)^2}$.

Các bất đẳng thức (i) và (ii) xem chứng minh trong chương 1.

Áp dụng vào bài toán ta có

$$P\geq\sqrt{\frac{x+z}{y+z}}+\sqrt{\frac{y+z}{x+z}}+\sqrt{\frac{\left(x+z\right)\left(y+z\right)}{\left(x+z\right)^2+\left(x+z\right)\left(y+z\right)+\left(y+z\right)^2}}.$$

Đặt $t=\sqrt{\dfrac{x+z}{y+z}}+\sqrt{\dfrac{y+z}{x+z}}\Rightarrow t\geq 2;P\geq f(t)=t+\dfrac{1}{\sqrt{t^2-1}}$.

Xét hàm số $f(t)=t+\dfrac{1}{\sqrt{t^2-1}}$ trên nửa khoảng $\left[2;+\infty\right)$ ta có

$$f'(t)=1-\frac{t}{\sqrt{\left(t^2-1\right)^3}}=\frac{\sqrt{\left(t^2-1\right)^3}-t}{\sqrt{\left(t^2-1\right)^3}}>\frac{\sqrt{t^3}-t}{\sqrt{\left(t^2-1\right)^3}}>0,\forall t\geq 2.$$

Vì vậy f(t) đồng biến trên nửa khoảng $\left[2;+\infty\right)$ suy ra $f(t)\geq f(2)=2+\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Với $x=y=1,z=0$ thì P bằng $2+\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $2+\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Bài 84. Sử dụng bất đẳng thức AM – GM ta có

$$\left(a+b+\sqrt{2(a+c)}\right)^3=\left(a+b+\sqrt{\frac{a+c}{2}}+\sqrt{\frac{a+c}{2}}\right)^3\geq\frac{27}{2}(a+b)(a+c)$$

$$\Rightarrow\frac{1}{\left(a+b+\sqrt{2(a+c)}\right)^3}\leq\frac{2}{27}.\frac{1}{(a+b)(a+c)}$$

Xây dựng tương tự cho hai biểu thức còn lại và đưa về chứng minh

$$\frac{1}{(a+b)(a+c)}+\frac{1}{(b+c)(b+a)}+\frac{1}{(c+a)(c+b)}\leq 12$$

$$\Leftrightarrow\frac{2(a+b+c)}{(a+b)(b+c)(c+a)}\leq 12\Leftrightarrow 6(a+b)(b+c)(c+a)\geq a+b+c$$

Chú ý sử dụng bất đẳng thức quen thuộc

$9(a+b)(b+c)(c+a)\geq 8(a+b+c)(ab+bc+ca)$.

Bài toán đưa về chứng minh $ab+bc+ca\geq\frac{3}{16}\Leftrightarrow 16(ab+bc+ca)\geq 3$.

Bất đẳng thức cuối đúng theo giả thiết vì

$$ab+bc+ca\leq 16abc(a+b+c)\leq\frac{16}{3}(ab+bc+ca)^2\Rightarrow ab+bc+ca\geq\frac{3}{16}.$$

Bài toán được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{4}$.

Bài 85. Ta có $\frac{a-bc}{a+bc}=1-\frac{2bc}{a+bc}=1-\frac{2bc}{a(a+b+c)+bc}=1-\frac{2bc}{(a+b)(a+c)}$.

Bài toán đưa về chứng minh

$$\frac{bc}{(a+b)(a+c)}+\frac{ca}{(b+c)(b+a)}+\frac{ab}{(c+a)(c+b)}\geq\frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow ab+bc+ca\geq 9abc\Leftrightarrow(a+b+c)(ab+bc+ca)\geq 9abc$$

Bất đẳng thức cuối đúng theo AM – GM.

Bài toán được chứng minh đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Bài 86. Chú ý điều kiện bài toán ta có

$$\frac{1}{ab+2c^2+2c}=\frac{1}{ab+2c^2+2c(a+b+c)}=\frac{1}{(2c+a)(2c+b)}$$

$$=\frac{ab}{(2bc+ab)(2ac+ab)}\geq\frac{ab}{\left(\frac{2bc+2ca+2ab}{2}\right)^2}=\frac{ab}{(ab+bc+ca)^2}$$

Tương tự ta có $\frac{1}{bc+2a^2+2a} \ge \frac{bc}{(ab+bc+ca)^2}; \frac{1}{ca+2b^2+2b} \ge \frac{ca}{(ab+bc+ca)^2}$.

Cộng lại theo vế ba bất đẳng thức trên ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{3}$

Bài 87. Sử dụng bất đẳng thức AM – GM ta có

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2} \ge \frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}=\frac{a+b+c}{abc}$$

$$=\frac{9}{abc(a+b+c)} \ge \frac{27}{(ab+bc+ca)^2}$$

Vậy ta chứng minh

$$\frac{27}{(ab+bc+ca)^2} \ge a^2+b^2+c^2 \Leftrightarrow \left(a^2+b^2+c^2\right)(ab+bc+ca)^2 \le 27.$$

Bất đẳng thức cuối đúng theo AM – GM vì

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)(ab+bc+ca)^2 \le \left[\frac{a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)}{3}\right]^3=27.$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài 88. Viết lại bất đẳng thức dưới dạng $\frac{1-c}{ab+c}+\frac{1-a}{bc+a}+\frac{1-b}{ca+b} \ge \frac{9}{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{a+b}{(c+a)(c+b)}+\frac{b+c}{(a+b)(a+c)}+\frac{a+c}{(b+a)(b+c)} \ge \frac{9}{2}.$$

Sử dụng bất đẳng thức AM – GM cho vế trái đưa về chứng minh

$$(a+b)(b+c)(c+a) \le \frac{8}{27}.$$

Bất đẳng thức cuối đúng theo AM – GM.

Bài 89. Thay 1 bởi điều kiện vào bất đẳng thức đã cho và đưa về chứng minh

$$\frac{4ab}{a+b}+\frac{4bc}{b+c}+\frac{4ca}{c+a}+a+b+c \ge 4.$$

Sử dụng bất đẳng thức C –S ta có

$$\frac{ab}{a+b}+\frac{bc}{b+c}+\frac{ca}{c+a} \ge \frac{(ab+bc+ca)^2}{ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)} \ge \frac{1}{a+b+c}.$$

Ta chỉ cần chứng minh $\frac{4}{a+b+c}+a+b+c \ge 4$.

Bất đẳng thức cuối đúng theo AM – GM. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=1,c=0$ hoặc các hoán vị.

Bài 90. Sử dụng $ab+bc+ca=\dfrac{9-a^2-b^2-c^2}{2}$ đưa về chứng minh bất đẳng thức

$$a^2+b^2+c^2+2\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)\ge 9.$$

Bất đẳng thức trên là tổng của các bất đẳng thức

$$a^2+\sqrt{a}+\sqrt{a}\ge 3a$$

$$b^2+\sqrt{b}+\sqrt{b}\ge 3c$$

$$c^2+\sqrt{c}+\sqrt{c}\ge 3c$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài 91. Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$\frac{ab+bc+ca}{(a+b)b}+\frac{ab+bc+ca}{(b+c)c}+\frac{ab+bc+ca}{(c+a)a}\ge\frac{9}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}+\frac{a+b}{a}+\frac{b+c}{b}+\frac{c+a}{c}\ge\frac{15}{2}$$

Bất đẳng thức cuối là tổng của hai bất đẳng thức

$$\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}+\frac{1}{4}\left(\frac{a+b}{a}+\frac{b+c}{b}+\frac{c+a}{c}\right)\ge 3$$

$$\frac{3}{4}\left(\frac{a+b}{a}+\frac{b+c}{b}+\frac{c+a}{c}\right)\ge\frac{9}{2}$$

Bài 92. Đặt $x=\sqrt{b+c-a};y=\sqrt{c+a-b};z=\sqrt{a+b-c}\Rightarrow x^2+y^2+z^2=3$.

Bài toán đưa về chứng minh

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\ge\frac{36}{9+x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2}$$

$$\Leftrightarrow\left(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+9\right)(xy+yz+zx)\ge 36xyz$$

Bất đẳng thức trên là tích của hai bất đẳng thức

$$xy+yz+zx\ge 3\sqrt[3]{x^2y^2z^2};x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+9\ge 12\sqrt[6]{xyz}.$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài 93. Chú ý đẳng thức:

$$\left(a^2+bc\right)(b+c)=b\left(c^2+a^2\right)+c\left(a^2+b^2\right);$$

$$\left(b^2+ca\right)(c+a)=a\left(b^2+c^2\right)+c\left(a^2+b^2\right);$$

$$\left(c^2+ab\right)(a+b)=b\left(a^2+c^2\right)+a\left(b^2+c^2\right)$$

Bài toán đưa về chứng minh với ba số dương x,y,z ta có

$$\sqrt{\frac{x+y}{z}}+\sqrt{\frac{y+z}{x}}+\sqrt{\frac{z+x}{y}}\ge 3\sqrt{2}.$$

Bất đẳng thức này đúng theo AM – GM

$$\sqrt{\frac{x+y}{z}}+\sqrt{\frac{y+z}{x}}+\sqrt{\frac{z+x}{y}}\ge 3\sqrt[6]{\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{xyz}}\ge 3\sqrt[6]{\frac{2\sqrt{xy}.2\sqrt{yz}.2\sqrt{zx}}{xyz}}=3\sqrt{2}.$$

Bài 94. Tương tự bài toán trên bất đẳng thức đưa về chứng minh với ba số không âm x,y,z ta có $\sqrt{\frac{x}{y+z}}+\sqrt{\frac{y}{z+x}}+\sqrt{\frac{z}{x+y}}\ge 2$.

Bất đẳng thức cuối đúng(xem chứng minh trong bài tập mẫu).

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b,c=0$ hoặc các hoán vị.

Bài 95. Ta có $c^2+2ab=a^2+b^2+2c^2-2bc-2ca=(a-c)^2+(b-c)^2$.

Do đó $\frac{|a-b|}{\sqrt{c^2+2ab}}=\sqrt{\frac{(a-b)^2}{(c-a)^2+(c-b)^2}}$.

Bài toán đưa về chứng minh $\sqrt{\frac{x}{y+z}}+\sqrt{\frac{y}{z+x}}+\sqrt{\frac{z}{x+y}}\ge 2$.

Với $x=(a-b)^2, y=(b-c)^2, z=(c-a)^2$ xem bài tập mẫu.

Bài 96. Bất đẳng thức tương đương với $3abc+ab+bc+ca\ge 3+a+b+c$.

Bất đẳng thức luôn đúng do $a+b+c\ge\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\ge\frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca}$

$\Rightarrow ab+bc+ca\ge a+b+c$

$$a+b+c\ge\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}=\frac{1}{3}\left(\frac{2a}{b}+\frac{b}{c}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{2b}{c}+\frac{c}{a}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{2c}{a}+\frac{a}{b}\right)\ge\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}.$$

$\Rightarrow abc\ge 1$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài 97. Sử dụng bất đẳng thức AM – GM ta có

$$\frac{x^3+1}{\sqrt{x^4+y+z}}=\frac{x\left(x^2+yz\right)}{\sqrt{x^4+xyz(y+z)}}=\frac{x\left(x^2+yz\right)\sqrt{xy+yz+zx}}{\sqrt{\left(x^2(y+z)+1\right)\left(x^3+yz(y+z)\right)}}$$

$$\ge\frac{2x\left(x^2+yz\right)\sqrt{xy+yz+zx}}{x^2(y+z)+1+x^3+yz(y+z)}=\frac{2x\sqrt{xy+yz+zx}}{x+y+z}$$

Tương tự cho 2 căn thức còn lại rồi cộng lại theo vế ta có điều phải chứng minh.

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$.

Bài 98. Sử dụng bất đẳng thức AM – GM ta có

$$\sqrt[3]{\left(\frac{2a}{b+c}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{b+c}{2a}.\frac{b+c}{2a}.1}}\ge\frac{3}{\frac{b+c}{2a}+\frac{b+c}{2a}+1}=\frac{3a}{a+b+c}.$$

Tương tự ta có $\sqrt[3]{\left(\frac{2b}{c+a}\right)^2}\ge\frac{3b}{a+b+c};\sqrt[3]{\left(\frac{2c}{a+b}\right)^2}\ge\frac{3c}{a+b+c}$.

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Chú ý. Ngoài ra ta có thể chứng minh bằng bất đẳng thức Bernoulli(xem chủ đề sau).

Bài 99. Chú ý $x^5+y^5\ge x^2y^2\left(x+y\right)$

$$\Rightarrow\frac{xy}{x^5+y^5+xy}\le\frac{xy}{x^2y^2\left(x+y\right)+xy}=\frac{1}{xy\left(x+y\right)+1}=\frac{z}{x+y+z}.$$

Tương tư ta có $\frac{yz}{y^5+z^5+yz}\le\frac{x}{x+y+z};\frac{zx}{z^5+x^5+zx}\le\frac{y}{x+y+z}$.

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$.

Bài 100. Sử dụng bất đẳng thức AM – GM ta có

$$\frac{1}{1+ab}=1-\frac{ab}{1+ab}\ge1-\frac{ab}{2\sqrt{ab}}=1-\frac{\sqrt{ab}}{2}$$

$$\frac{1}{1+bc}=1-\frac{bc}{1+bc}\ge1-\frac{bc}{2\sqrt{bc}}=1-\frac{\sqrt{bc}}{2}$$

$$\frac{1}{1+ca}=1-\frac{ca}{1+ca}\ge1-\frac{ca}{2\sqrt{ca}}=1-\frac{\sqrt{ca}}{2}$$

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{1}{1+ab}+\frac{1}{1+bc}+\frac{1}{1+ca}\ge3-\frac{\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}}{2}=\frac{15}{4}-\frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2}{4}.$$

Vậy ta chỉ cần chứng minh $\frac{15}{4}-\frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2}{4}\ge\frac{9}{2\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)}$.

Đặt $t=\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c},\left(\sqrt{3}<t\le3\right)$ đưa về chứng minh

$$\frac{15}{4}-\frac{t^2}{4}\ge\frac{9}{2t}\Leftrightarrow t^3-15t+18\le0\Leftrightarrow\left(t-3\right)\left(t^2+3t-6\right)\le0.$$

Bất đẳng thức cuối đúng và ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

CHỦ ĐỀ 2: KỸ THUẬT GHÉP CẶP TRONG CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC AM – GM

A. NỘI DUNG PHƯƠNG PHÁP

1. Ghép cặp trực tiếp 2 hoặc 3 hạng tử ở một vế của bất đẳng thức

Ta cần chứng minh bất đẳng thức

$$A+B+C \geq X+Y+Z .$$

Nếu $X \leq \sqrt{AB}, Y \leq \sqrt{BC}, Z \leq \sqrt{CA}$.

Ta thực hiện ghép cặp sử dụng bất đẳng thức AM- GM cho 2 số dương như sau:

$$A+B \geq 2\sqrt{AB} \geq 2X$$

$$B+C \geq 2\sqrt{BC} \geq 2Y$$

$$C+A \geq 2\sqrt{CA} \geq 2Z$$

Cộng theo vế 3 bất đẳng thức trên ta có ngay điều phải chứng minh.

2. Ghép cặp kết hợp 2 giữa hoặc 3 nhân tử ở cả 2 vế của bất đẳng thức

Ta cần chứng minh bất đẳng thức $A+B+C \geq X+Y+Z$.

Ta có thể thực hiện đánh giá như sau

$$A+X \geq 2\sqrt{AX} \geq 2Y$$

$$B+Y \geq 2\sqrt{BY} \geq 2Z$$

$$C+Z \geq 2\sqrt{CZ} \geq 2X$$

Cộng lại theo vế 3 bất đẳng thức trên ta có ngay điều phải chứng minh.

3. Biến đổi điều kiện hoặc bất đẳng thức trước khi ghép cặp

Áp dụng với các bất đẳng thức có điều kiện chưa tương đồng với bất đẳng thức cần chứng minh. Thông thường ta sử dụng phép bình phương 2 vế, quy đồng 2 vế bất đẳng thức(xem bài tập mẫu).

B. BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Cho *x,y,z* là các số thực dương thoả mãn điều kiện $2\sqrt{xy}+\sqrt{xz}=1$.

Chứng minh rằng $\frac{3yz}{x}+\frac{4zx}{y}+\frac{5xy}{z} \geq 4$.

Lời giải

Gọi P là biểu thức vế trái của bất đẳng thức.

Ta viết lại P dưới dạng

$$P=\left(\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}\right)+2\left(\frac{yz}{x}+\frac{xy}{z}\right)+3\left(\frac{xy}{z}+\frac{zx}{y}\right).$$

Sử dụng bất đẳng thức AM – GM ta có

$$\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}\ge 2\sqrt{\frac{yz}{x}.\frac{zx}{y}}=2z;$$
$$\frac{yz}{x}+\frac{xy}{z}\ge 2\sqrt{\frac{yz}{x}.\frac{xy}{z}}=2y;$$
$$\frac{xy}{z}+\frac{zx}{y}\ge 2\sqrt{\frac{xy}{z}.\frac{zx}{y}}=2x.$$

Suy ra $P\ge 2z+4y+6x=2\left(x+z\right)+4\left(x+y\right)\ge 4\sqrt{zx}+8\sqrt{xy}=4$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}x=y=z\\ 2\sqrt{xy}+\sqrt{zx}=1\end{cases}\Leftrightarrow x=y=z=\dfrac{1}{3}$.

Nhận xét. Để có phân tích trên ta sử dụng đồng nhất thức như sau:

$$\frac{3yz}{x}+\frac{4zx}{y}+\frac{5xy}{z}=a\left(\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}\right)+b\left(\frac{yz}{x}+\frac{xy}{z}\right)+c\left(\frac{xy}{z}+\frac{zx}{y}\right)$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=3\\ b+c=5\\ c+a=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\ b=2\\ c=3\end{cases}\Rightarrow P=\left(\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}\right)+2\left(\frac{yz}{x}+\frac{xy}{z}\right)+3\left(\frac{xy}{z}+\frac{zx}{y}\right)$$

Bài 2. Cho *x,y,z* là các số thực dương thoả mãn điều kiện $x^2+y^2+z^2=3$.

Chứng minh rằng $\dfrac{xy}{z}+\dfrac{yz}{x}+\dfrac{zx}{y}\ge 3$.

Lời giải

<u>Phân tích tìm lời giải:</u>

Nếu sử dụng ghép cặp chẳng hạn $\dfrac{xy}{z}+\dfrac{yz}{x}\ge 2y$ nhưng điều kiện cho dưới dạng bậc 2 do vậy ta không thể ghép cặp sử dụng trực tiếp được và cần tạo ra các nhân tử có chứa x^2,y^2,z^2 như vậy lựa chọn phép bình phương 2 vế của bất đẳng thức.

<u>Lời giải chi tiết:</u>

Bình phương 2 vế bất đẳng thức cần chứng minh được viết dưới dạng

$$\frac{x^2y^2}{z^2}+\frac{y^2z^2}{x^2}+\frac{z^2x^2}{y^2}+2\left(x^2+y^2+z^2\right)\ge 9$$
$$\Leftrightarrow\frac{x^2y^2}{z^2}+\frac{y^2z^2}{x^2}+\frac{z^2x^2}{y^2}\ge 3$$

Sử dụng bất đẳng thức AM –GM cho 2 số dương ta được

$$\frac{x^2y^2}{z^2}+\frac{y^2z^2}{x^2}\ge 2\sqrt{\frac{x^2y^2}{z^2}.\frac{y^2z^2}{x^2}}=2y^2.$$

Tương tự ta có $\frac{y^2z^2}{x^2}+\frac{z^2x^2}{y^2}\ge 2z^2;\frac{x^2y^2}{z^2}+\frac{z^2x^2}{y^2}\ge 2x^2$.

Cộng theo vế 3 bất đẳng thức trên ta có ngay điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$.

Bài 3. Chứng minh rằng với mọi a,b,c dương ta luôn có

$$\frac{1}{b(a+b)}+\frac{1}{c(c+b)}+\frac{1}{a(a+c)}\ge\frac{9}{2(ab+bc+ca)}.$$

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{ab+bc+ca}{b(a+b)}+\frac{ab+bc+ca}{c(c+b)}+\frac{ab+bc+ca}{a(a+c)}\ge\frac{9}{2}$$

$$\Leftrightarrow\frac{c}{b}+\frac{b}{a}+\frac{a}{c}+\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}\ge\frac{9}{2}$$

$$\Leftrightarrow\frac{b+c}{b}+\frac{a+b}{a}+\frac{c+a}{c}+\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}\ge\frac{15}{2}$$

Sử dụng bất đẳng thức AM – GM cho 2 số dương ta có

$$\frac{b+c}{4b}+\frac{b}{b+c}\ge 2\sqrt{\frac{b+c}{4b}.\frac{b}{b+c}}=1.$$

Tương tự ta có: $\frac{a+b}{4a}+\frac{a}{a+b}\ge 1;\frac{c+a}{4c}+\frac{c}{c+a}\ge 1$.

Cộng theo vế 3 bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{1}{4}\left(\frac{a+b}{a}+\frac{b+c}{b}+\frac{c+a}{c}\right)+\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}\ge 3.$$

Mặt khác

$$\frac{3}{4}\left(\frac{a+b}{a}+\frac{b+c}{b}+\frac{c+a}{c}\right)=\frac{3}{4}\left(3+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\right)\ge\frac{3}{4}\left(3+3\sqrt[3]{\frac{b}{a}.\frac{c}{b}.\frac{a}{c}}\right)=\frac{9}{2}.$$

Cộng theo vế 2 bất đẳng thức trên ta có ngay điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bài 4. Chứng minh rằng với mọi số thực dương x,y,z ta có

$$\left(1+\frac{x}{y}\right)\left(1+\frac{y}{z}\right)\left(1+\frac{z}{x}\right)\ge 2+\frac{2(x+y+z)}{\sqrt[3]{xyz}}.$$

Lời giải

Khai triển vế trái viết lại bất đẳng thức đã cho dưới dạng

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\ge\frac{x+y+z}{\sqrt[3]{xyz}}=\sqrt[3]{\frac{x^2}{yz}}+\sqrt[3]{\frac{y^2}{zx}}+\sqrt[3]{\frac{z^2}{xy}}.$$

Sử dụng bất đẳng thức cho 3 số dương ta có $\frac{x}{y}+\frac{x}{y}+\frac{y}{z}\ge 3\sqrt[3]{\frac{x^2}{yz}}$.

Tương tự ta có: $\frac{y}{z}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\ge 3\sqrt[3]{\frac{y^2}{zx}};\frac{z}{x}+\frac{z}{x}+\frac{x}{y}\ge 3\sqrt[3]{\frac{z^2}{xy}}$.

Cộng theo vế 3 bất đẳng thức trên ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z$.

Bài 5. Chứng minh rằng với mọi số thực dương *x*,*y*,*z* ta có

$$\frac{x^3}{y^3}+\frac{y^3}{x^3}+\frac{y^3}{z^3}+\frac{z^3}{y^3}+\frac{z^3}{x^3}+\frac{x^3}{z^3}\ge 2\left(\frac{x^2}{yz}+\frac{y^2}{zx}+\frac{z^2}{xy}\right).$$

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức AM –GM cho 3 số dương ta có

$$\frac{x^3}{y^3}+\frac{x^3}{z^3}+1\ge 3\sqrt[3]{\frac{x^3}{y^3}.\frac{x^3}{z^3}.1}=3\frac{x^2}{yz}$$

$$\frac{y^3}{z^3}+\frac{y^3}{x^3}+1\ge 3\sqrt[3]{\frac{y^3}{z^3}.\frac{y^3}{x^3}.1}=3\frac{y^2}{zx}$$

$$\frac{z^3}{x^3}+\frac{z^3}{y^3}+1\ge 3\sqrt[3]{\frac{z^3}{x^3}.\frac{z^3}{y^3}.1}=\frac{3z^2}{xy}$$

Cộng theo vế 3 bất đẳng thức trên ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z$.

Bài 6. Cho *x*,*y*,*z* là các số thực không âm.

Chứng minh rằng $(x+y-z)(y+z-x)(z+x-y)\le xyz$.

Lời giải

Do tổng 3 thừa số vế trái bằng $x+y+z\ge 0$ nên có các khả năng sau

<u>+ TH1:</u> Nếu có 1 thừa số âm và 2 thừa số dương lúc này bất đẳng thức luôn đúng.

<u>+ TH2:</u> Nếu có 2 thừa số âm và 1 thừa số dương(điều này vô lý) vì tổng của 2 thừa số chẳng hạn $(x+y-z)+(y+z-x)=2y\ge 0$.

<u>+ TH3:</u> Nếu cả 3 thừa số đều không âm lúc đó ta sử dụng bất đẳng thức cho 2 số dương ta được

$$(x+y-z)(y+z-x) \le \left(\frac{x+y-z+y+z-x}{2}\right)^2 = y^2$$

$$(y+z-x)(z+x-y) \le \left(\frac{y+z-x+z+x-y}{2}\right)^2 = z^2$$

$$(z+x-y)(x+y-z) \le \left(\frac{z+x-y+x+y-z}{2}\right)^2 = x^2$$

Nhân theo vế 3 bất đẳng thức trên ta được

$$\begin{aligned}&\left[(x+y-z)(y+z-x)(z+x-y)\right]^2 \le x^2y^2z^2\\ &\Leftrightarrow (x+y-z)(y+z-x)(z+x-y) \le xyz\end{aligned}.$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z$.

Nhận xét. Vì chưa biết tính âm dương của mỗi thừa số vế trái nên chưa thể áp dụng trực tiếp bất đẳng thức AM – GM và ta cần phân chia các trường hợp.

\+ Đây là một dạng của bất đẳng thức Schur bậc ba có rất nhiều ứng dụng trong việc giải quyết một lớp bài toán(xem chủ đề sau).

Chẳng hạn với x,y,z có tổng bằng 3 ta có bất đẳng thức

$$4(xy+yz+zx)-3xyz \le 9.$$

Bài tập tương tự

Cho x,y,z là các số thực dương. Chứng minh

$$\left(1-\frac{x}{y+z}\right)\left(1-\frac{y}{z+x}\right)\left(1-\frac{z}{x+y}\right) \le \frac{1}{8}.$$

Bài 7. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện $a^2+b^2+c^2=3$.

Chứng minh rằng $\dfrac{a^3}{\sqrt{b^2+3}}+\dfrac{b^3}{\sqrt{c^2+3}}+\dfrac{c^3}{\sqrt{a^2+3}} \ge \dfrac{3}{2}$.

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức AM – GM cho 3 số dương ta có

$$\frac{a^3}{\sqrt{b^2+3}}+\frac{a^3}{\sqrt{b^2+3}}+\frac{b^2+3}{8} \ge \frac{3}{2}a^2$$

$$\frac{b^3}{\sqrt{c^2+3}}+\frac{b^3}{\sqrt{c^2+3}}+\frac{c^2+3}{8} \ge \frac{3}{2}b^2$$

$$\frac{c^3}{\sqrt{a^2+3}}+\frac{c^3}{\sqrt{a^2+3}}+\frac{a^2+3}{8} \ge \frac{3}{2}c^2$$

Cộng theo vế 3 bất đẳng thức trên và kết hợp với điều kiện $a^2+b^2+c^2=3$ ta có ngay điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài 8. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện $a+b+c=3$.

Chứng minh rằng $\frac{(1+a)^2(1+b)^2}{1+c^2}+\frac{(1+b)^2(1+c)^2}{1+a^2}+\frac{(1+c)^2(1+a)^2}{1+b^2}\geq 24$.

Lời giải

Gọi P là biểu thức vế trái của bất đẳng thức.

Sử dụng bất đẳng thức AM – GM cho 2 số dương ta được:

$$(1+a)^2(1+b)^2=(1+ab+a+b)^2\geq 4(1+ab)(a+b)=4a\left(1+b^2\right)+4b\left(1+a^2\right).$$

Suy ra $\frac{(1+a)^2(1+b)^2}{1+c^2}\geq 4a.\frac{1+b^2}{1+c^2}+4b.\frac{1+a^2}{a+c^2}$

Tương tự ta có: $\frac{(1+b)^2(1+c)^2}{1+a^2}\geq 4b.\frac{1+c^2}{1+a^2}+4c.\frac{1+b^2}{1+a^2}$

$$\frac{(1+c)^2(1+a)^2}{1+b^2}\geq 4a.\frac{1+c^2}{1+b^2}+4c.\frac{1+a^2}{1+b^2}$$

Cộng theo vế 3 bất đẳng thức trên ta có

$$P\geq 4a\left(\frac{1+b^2}{1+c^2}+\frac{1+c^2}{1+b^2}\right)+4b\left(\frac{1+a^2}{1+c^2}+\frac{1+c^2}{1+a^2}\right)+4c\left(\frac{1+a^2}{1+b^2}+\frac{1+b^2}{1+a^2}\right)$$

$$\geq 8a\sqrt{\frac{1+b^2}{1+c^2}.\frac{1+c^2}{1+b^2}}+8b\sqrt{\frac{1+a^2}{1+c^2}.\frac{1+c^2}{1+a^2}}+8c\sqrt{\frac{1+a^2}{1+b^2}.\frac{1+b^2}{1+a^2}}$$

$$=8(a+b+c)=24$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài 9. Cho *a,b,c* là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $\frac{a}{a+1}+\frac{b}{b+1}+\frac{c}{c+1}=2$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=ab+bc+ca$.

Lời giải

Theo giả thiết kết hợp sử dụng bất đẳng thức AM –GM cho 2 số dương ta có

$$\frac{a}{a+1}=1-\frac{b}{b+1}+1-\frac{c}{c+1}=\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}\geq\frac{2}{\sqrt{(b+1)(c+1)}}.$$

Tương tự ta có: $\frac{b}{b+1}\geq\frac{2}{\sqrt{(a+1)(c+1)}}$

$$\frac{c}{c+1}\geq\frac{2}{\sqrt{(a+1)(b+1)}}$$

Lần lượt nhân theo vế hai bất đẳng thức ta được:

$$\frac{ab}{(a+1)(b+1)} \geq \frac{4}{(c+1)\sqrt{(a+1)(b+1)}} \Leftrightarrow ab \geq \frac{4\sqrt{(a+1)(b+1)}}{c+1}.$$

Tương tự ta có: $bc \geq \frac{4\sqrt{(b+1)(c+1)}}{a+1}; ca \geq \frac{4\sqrt{(c+1)(a+1)}}{b+1}$.

Cộng lại theo vế 3 bất đẳng thức trên và sử dụng AM-GM ta được:

$$P \geq 4\left[\frac{\sqrt{(a+1)(b+1)}}{c+1} + \frac{\sqrt{(b+1)(c+1)}}{a+1} + \frac{\sqrt{(a+1)(c+1)}}{b+1}\right]$$

$$\geq 12\sqrt[3]{\frac{\sqrt{(a+1)(b+1)}}{c+1} \cdot \frac{\sqrt{(b+1)(c+1)}}{a+1} \cdot \frac{\sqrt{(a+1)(c+1)}}{b+1}} = 12$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 2$.

Bài 10. Cho x,y,z là các số thực dương thoả mãn điều kiện $xy + yz + zx = 1$.

Chứng minh rằng $3 - \sqrt{3} + \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} \geq (x + y + z)^2$.

Lời giải

Trước hết ta chứng minh bất đẳng thức sau

$$\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} \geq \frac{(x+y+z)(x^2+y^2+z^2)}{xy+yz+zx}.$$

Thật vậy, bất đẳng thức tương đương với:

$$(xy + yz + zx)\left(\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x}\right) \geq (x+y+z)(x^2+y^2+z^2).$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^3z}{y} + \frac{y^3x}{z} + \frac{z^3y}{x} \geq xz^2 + zy^2 + yx^2.$$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta có: $\frac{x^3z}{y} + \frac{y^3x}{z} \geq 2x^2y$.

$$\frac{y^3x}{z} + \frac{z^3y}{x} \geq 2y^2z.$$

$$\frac{x^3z}{y} + \frac{z^3y}{x} \geq 2z^2x.$$

Cộng theo vế 3 bất đẳng thức trên ta có điều phải chứng minh.

Gọi P là biểu thức vế trái bất đẳng thức ban đầu ta có

$$P \geq 3 - \sqrt{3} + (x+y+z)(x^2+y^2+z^2).$$

Vậy ta cần chứng minh

$$3-\sqrt{3}+(x+y+z)(x^2+y^2+z^2)\ge (x+y+z)^2$$

$$\Leftrightarrow (x+y+z)(x^2+y^2+z^2)\ge x^2+y^2+z^2+\sqrt{3}-1$$

$$\Leftrightarrow (x^2+y^2+z^2)(x+y+z-1)\ge \sqrt{3}-1$$

$$\Leftrightarrow \left[\left(x+y+z\right)^2-2\left(xy+yz+zx\right)\right]\left(x+y+z-1\right)\ge \sqrt{3}-1$$

$$\Leftrightarrow \left[\left(x+y+z\right)^2-2\right]\left(x+y+z-1\right)\ge \sqrt{3}-1$$

Bất đẳng thức luôn đúng do $x+y+z\ge \sqrt{3(xy+yz+zx)}=\sqrt{3}$.

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$x=y=z=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Bài tập tương tự

Cho x,y,z là các số thực dương có tổng bằng 1.

Chứng minh rằng $\dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{z}+\dfrac{z^2}{x}\ge 3\left(x^2+y^2+z^2\right)$.

C. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1. Chứng minh rằng với mọi số thực x ta có

$$\left(\frac{12}{5}\right)^x+\left(\frac{15}{4}\right)^x+\left(\frac{20}{3}\right)^x\ge 3^x+4^x+5^x.$$

Bài 2. Chứng minh rằng với mọi số dương x,y,z ta có

$$\frac{x^3}{y}+\frac{y^3}{z}+\frac{z^3}{x}\ge x^2+y^2+z^2.$$

Bài 3. Chứng minh rằng với mọi x,y,z là các số thực dương ta có

$$\frac{x^5}{y^2}+\frac{y^5}{z^2}+\frac{z^5}{x^2}\ge x^3+y^3+z^3.$$

Bài 4. Chứng minh rằng với mọi số thực dương *x,y,z* ta có

$$\frac{x^3}{yz}+\frac{y^3}{zx}+\frac{z^3}{xy}\ge x+y+z.$$

Bài 5. Cho *x,y,z* là các số thực dương thoả mãn điều kiện $x+y+z=xyz$.

Chứng minh rằng $\dfrac{x}{y^3}+\dfrac{y}{z^3}+\dfrac{z}{x^3}\ge 1$.

Bài 6. Cho a,b,c là độ dài 3 cạnh một tam giác. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{a+b-c}+\frac{b}{b+c-a}+\frac{c}{c+a-b}\ge 3.$$

Bài 7. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện $a^2+b^2+c^2=3$.

Chứng minh rằng $\dfrac{a^3}{\sqrt{b^2+1}}+\dfrac{b^3}{\sqrt{c^2+1}}+\dfrac{c^3}{\sqrt{a^2+1}}\ge\dfrac{3}{\sqrt{2}}$.

Bài 8. Cho *x,y,z* là các số thực dương thoả mãn điều kiện $2\sqrt{xz}+\sqrt{yz}+3\sqrt{xy}=1$.

Chứng minh rằng $\dfrac{7yz}{x}+\dfrac{8zx}{y}+\dfrac{9xy}{z}\ge 4$.

Bài 9. Cho x,y,z là các số thực dương thoả mãn điều kiện $xyz=1$.

Chứng minh rằng $\left(x+\dfrac{1}{y}-1\right)\left(y+\dfrac{1}{z}-1\right)\left(z+\dfrac{1}{x}-1\right)\le 1$.

Bài 10. Cho *a,b,c* là các số thực dương thỏa mãn $\dfrac{1}{a+1}+\dfrac{1}{b+1}+\dfrac{1}{c+1}=1$.

Chứng minh rằng $abc\ge 8$.

Bài 11. Cho x,y,z là các số thực dương. Chứng minh

$$\left(1-\frac{x}{y+z}\right)\left(1-\frac{y}{z+x}\right)\left(1-\frac{z}{x+y}\right)\le\frac{1}{8}.$$

D. HƯỚNG DẪN GIẢI – ĐÁP SỐ

Bài 1. Sử dụng bất đẳng thức AM – GM cho 2 số dương ta có

$$\left(\frac{12}{5}\right)^x+\left(\frac{15}{4}\right)^x\ge 2\sqrt{\left(\frac{12}{5}\right)^x.\left(\frac{15}{4}\right)^x}=2.3^x$$

$$\left(\frac{15}{4}\right)^x+\left(\frac{20}{3}\right)^x\ge 2\sqrt{\left(\frac{15}{4}\right)^x.\left(\frac{20}{3}\right)^x}=2.5^x$$

$$\left(\frac{20}{3}\right)^x+\left(\frac{12}{5}\right)^x\ge 2\sqrt{\left(\frac{20}{3}\right)^x.\left(\frac{12}{5}\right)^x}=2.4^x$$

Cộng lại theo vế 3 bất đẳng thức trên ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=0$.

Bài 2. Sử dụng bất đẳng thức AM – GM cho 3 số dương ta được

$$\frac{x^3}{y}+\frac{x^3}{y}+y^2\ge 3\sqrt[3]{\frac{x^3}{y}.\frac{x^3}{y}.y^2}=3x^2$$

$$\frac{y^3}{z}+\frac{y^3}{z}+z^2\geq 3\sqrt[3]{\frac{y^3}{z}.\frac{y^3}{z}.z^2}=3y^2$$

$$\frac{z^3}{x}+\frac{z^3}{x}+x^2\geq 3\sqrt[3]{\frac{z^3}{x}.\frac{z^3}{x}.x^2}=3z^2$$

Cộng theo vế 3 bất đẳng thức trên ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z$.

Cách 2: Sử dụng bất đẳng thức AM – GM cho 2 số dương ta có

$$\frac{x^3}{y}+xy\geq 2\sqrt{\frac{x^3}{y}.xy}=2x^2;\frac{y^3}{z}+yz\geq 2y^2;\frac{z^3}{x}+xz\geq 2z^2.$$

Cộng theo vế 3 bất đẳng thức trên kết hợp với $x^2+y^2+z^2\geq xy+yz+zx$ ta có điều phải chứng minh.

Bài 3. Sử dụng bất đẳng thức AM – GM cho 2 số dương ta có

$$\frac{x^5}{y^2}+xy^2\geq 2\sqrt{\frac{x^5}{y^2}.xy^2}=2x^3$$

$$\frac{y^5}{z^2}+yz^2\geq 2\sqrt{\frac{y^5}{z^2}.yz^2}=2y^3$$

$$\frac{z^5}{x^2}+zx^2\geq 2\sqrt{\frac{z^5}{x^2}.zx^2}=2z^3$$

Cộng theo vế 3 bất đẳng thức trên ta có

$$\frac{x^5}{y^2}+\frac{y^5}{z^2}+\frac{z^5}{x^2}+xy^2+yz^2+zx^2\geq 2\left(x^3+y^3+z^3\right).$$

Vậy ta chỉ cần chứng minh $x^3+y^3+z^3\geq xy^2+yz^2+zx^2$.

Bất đẳng thức này hiển nhiên đúng theo AM – GM cho 3 số dương

Vì $x^3+y^3+y^3\geq 3xy^2;y^3+z^3+z^3\geq 3yz^2;z^3+x^3+x^3\geq 3zx^2$.

Cộng lại theo vế 3 bất đẳng thức trên ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z$.

Bài 4. Sử dụng bất đẳng thức AM – GM cho 3 số dương ta có

$$\frac{x^3}{yz}+y+z\geq 3\sqrt[3]{\frac{x^3}{yz}.y.z}=3x$$

$$\frac{y^3}{zx}+z+x\geq 3\sqrt[3]{\frac{y^3}{zx}.z.x}=3y$$

$$\frac{z^3}{xy}+x+y\geq 3\sqrt[3]{\frac{z^3}{xy}.x.y}=3z$$

Cộng theo vế 3 bất đẳng thức trên ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z$.

Bài 5. Theo giả thiết ta có $\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}=1$.

Vậy bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại dưới dạng:

$$\frac{x}{y^3}+\frac{y}{z^3}+\frac{z}{x^3}\ge\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}$$

$$\Leftrightarrow\frac{x^4z^3+y^4x^3+z^4y^3}{x^3y^3z^3}\ge\frac{x+y+z}{xyz}$$

$$\Leftrightarrow x^4z^3+y^4x^3+z^4y^3\ge(x+y+z)x^2y^2z^2$$

$$\Leftrightarrow x^2y^2z^2\left(\frac{x^2z}{y^2}+\frac{y^2x}{z^2}+\frac{z^2y}{x^2}\right)\ge(x+y+z)x^2y^2z^2$$

$$\Leftrightarrow\frac{x^2z}{y^2}+\frac{y^2x}{z^2}+\frac{z^2y}{x^2}\ge x+y+z$$

Sử dụng bất đẳng thức AM – GM cho 3 số dương ta có

$$\frac{x^2z}{y^2}+\frac{y^2x}{z^2}+z\ge3\sqrt[3]{\frac{x^2z}{y^2}.\frac{y^2x}{z^2}.z}=3x$$

$$\frac{y^2x}{z^2}+\frac{z^2y}{x^2}+x\ge3\sqrt[3]{\frac{y^2x}{z^2}.\frac{z^2y}{x^2}.x}=3y$$

$$\frac{z^2y}{x^2}+\frac{x^2z}{y^2}+y\ge3\sqrt[3]{\frac{z^2y}{x^2}.\frac{x^2z}{y^2}.y}=3z$$

Cộng theo vế 3 bất đẳng thức trên ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Bài 6. Sử dụng bất đẳng thức AM – GM cho 3 số dương ta được

$$\frac{a}{a+b-c}+\frac{b}{b+c-a}+\frac{c}{c+a-b}\ge3\sqrt[3]{\frac{a}{a+b-c}.\frac{b}{b+c-a}.\frac{c}{c+a-b}}.$$

Chú ý. $(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)\le abc$.

Ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bài 7. Sử dụng bất đẳng thức AM – GM cho 3 số dương ta có

$$\frac{a^3}{\sqrt{b^2+1}}+\frac{a^3}{\sqrt{b^2+1}}+\frac{b^2+1}{2\sqrt{2}}\ge\frac{3}{\sqrt{2}}a^2;$$

$$\frac{b^3}{\sqrt{c^2+1}}+\frac{b^3}{\sqrt{c^2+1}}+\frac{c^2+1}{2\sqrt{2}}\geq\frac{3}{\sqrt{2}}b^2;$$

$$\frac{c^3}{\sqrt{a^2+1}}+\frac{c^3}{\sqrt{a^2+1}}+\frac{a^2+1}{2\sqrt{2}}\geq\frac{3}{\sqrt{2}}c^2.$$

Cộng theo vế 3 bất đẳng thức trên và kết hợp với điều kiện $a^2+b^2+c^2=3$ ta có ngay điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài 8. Gọi P là biểu thức vế trái của bất đẳng thức.

Ta viết lại P dưới dạng $P=3\left(\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}\right)+4\left(\frac{yz}{x}+\frac{xy}{z}\right)+5\left(\frac{xy}{z}+\frac{zx}{y}\right)$.

Sử dụng bất đẳng thức AM – GM ta có

$$\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}\geq 2\sqrt{\frac{yz}{x}.\frac{zx}{y}}=2z$$

$$\frac{yz}{x}+\frac{xy}{z}\geq 2\sqrt{\frac{yz}{x}.\frac{xy}{z}}=2y$$

$$\frac{xy}{z}+\frac{zx}{y}\geq 2\sqrt{\frac{xy}{z}.\frac{zx}{y}}=2x$$

Suy ra $P\geq 6z+8y+10x=4(x+z)+2(z+y)+6(x+y)$

$$\geq 8\sqrt{xz}+4\sqrt{yz}+12\sqrt{xy}=4$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}x=y=z\\ 2\sqrt{xz}+\sqrt{yz}+3\sqrt{xy}=1\end{cases}\Leftrightarrow x=y=z=\frac{1}{6}$.

Bài 9. Vì *x,y,z* là các số thực dương thoả mãn $xyz=1$ nên tồn tại các số thực dương a,b,c thoả mãn $x=\frac{a}{b},y=\frac{b}{c},z=\frac{c}{a}$ khi đó bất đẳng thức được viết lại dưới dạng:

$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)\leq abc$.

Đây là bất đẳng thức đã được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$.

<u>Cách 2:</u> Theo giả thiết ta có

$$x+\frac{1}{y}-1=x\left(1+\frac{1}{xy}-\frac{1}{x}\right)=x\left(1+z-\frac{1}{x}\right)$$

$$\Rightarrow\left(x+\frac{1}{y}-1\right)\left(z+\frac{1}{x}-1\right)=x\left(1+z-\frac{1}{x}\right)\left(z+\frac{1}{x}-1\right)$$

$$=x\left[z^2-\left(\frac{1}{x}-1\right)^2\right]\leq xz^2.$$

Tương tự ta có: $\left(y+\frac{1}{z}-1\right)\left(x-\frac{1}{y}+1\right)\le yx^2$.

$$\left(z+\frac{1}{x}-1\right)\left(y+\frac{1}{z}-1\right)\le zy^2$$

Nhân theo vế 3 bất đẳng thức trên kết hợp điều kiện $xyz=1$ ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$.

Bài 10. Theo giả thiết ta có $\frac{a}{a+1}=1-\frac{1}{a+1}=\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}$.

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM cho 2 số dương ta được

$$\frac{a}{a+1}\ge\frac{2}{\sqrt{(b+1)(c+1)}}.$$

Tương tự ta có: $\frac{b}{b+1}\ge\frac{2}{\sqrt{(a+1)(c+1)}}$.

$$\frac{c}{c+1}\ge\frac{2}{\sqrt{(a+1)(b+1)}}$$

Nhân theo vế 3 bất đẳng thức trên ta có ngay điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=2$.

Nhận xét. Với cách làm tương tự trên ta xử lý được bài toán tổng quát cho n số dương.

Bài toán. Với $x_1,x_2,...,x_n>0$ thỏa mãn $\frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_2}+...+\frac{1}{1+x_n}=1$ ta luôn có

$x_1x_2...x_n\ge(n-1)^n$.

Bài 11. Bất đẳng thức được viết dưới dạng tương đương:

$$8(x+y-z)(y+z-x)(z+x-y)\le(x+y)(y+z)(z+x).$$

Chú ý ta có $(x+y-z)(y+z-x)(z+x-y)\le xyz$.

$$8xyz\le(x+y)(y+z)(z+x)$$

Từ đó suy ra đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z$.

CHỦ ĐỀ 3: KỸ THUẬT SỬ DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC AM – GM DẠNG CỘNG MẪU SỐ

$$\frac{1}{A_1}+\frac{1}{A_2}+...+\frac{1}{A_n}\ge \frac{n^2}{A_1+A_2+...+A_n}.$$

A. NỘI DUNG PHƯƠNG PHÁP

Xuất phát từ bất đẳng thức

$$\left(a_1+a_2+...+a_n\right)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}\right)\ge n\sqrt[n]{a_1a_2...a_n}.\frac{n}{\sqrt[n]{a_1a_2...a_n}}=n^2.$$

Do đó $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}\ge \frac{n^2}{a_1+a_2+...+a_n}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1=a_2=...=a_n$.

Hai bất đẳng thức dạng trên hay được sử dụng nhất là

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge \frac{4}{a+b}$$

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge \frac{9}{a+b+c}$$

Dưới đây tôi sẽ trình bày một lớp bài toán dạng trên.

B. BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Cho *a,b,c* là các số thực dương thoả mãn điều kiện $a+b+c=3$.

Chứng minh rằng $\frac{1}{a+3b}+\frac{1}{b+3c}+\frac{1}{c+3a}\ge \frac{1}{a+3}+\frac{1}{b+3}+\frac{1}{c+3}$.

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\ge \frac{4}{x+y}$ ta có

$$\frac{1}{a+3b}+\frac{1}{c+3}\ge \frac{4}{a+3b+c+3}=\frac{2}{b+3}.$$

Tương tự ta có $\frac{1}{b+3c}+\frac{1}{a+3}\ge \frac{4}{a+b+3c+3}=\frac{2}{c+3}$

$$\frac{1}{c+3a}+\frac{1}{b+3}\ge \frac{4}{3a+b+c+3}=\frac{2}{a+3}$$

Cộng theo vế 3 bất đẳng thức trên ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài 2. Cho *a,b,c* là độ dài ba cạnh một tam giác thỏa mãn điều kiện $2c+b=abc$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{3}{b+c-a} + \frac{4}{a+c-b} + \frac{5}{a+b-c}.$$

Lời giải

Từ điều kiện ta có: $\frac{2}{ab} + \frac{1}{ac} = 1$.

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta được:

$$1 = \frac{1}{a}\left(\frac{2}{b} + \frac{1}{c}\right) = \frac{1}{3}.\frac{3}{a}\left(\frac{2}{b} + \frac{1}{c}\right) \le \frac{1}{12}\left(\frac{3}{a} + \frac{2}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 \Rightarrow \frac{3}{a} + \frac{2}{b} + \frac{1}{c} \ge 2\sqrt{3}.$$

Ta có:

$$P = 2\left(\frac{1}{b+c-a} + \frac{1}{a+b-c}\right) + \left(\frac{1}{b+c-a} + \frac{1}{a+c-b}\right) + 3\left(\frac{1}{a+c-b} + \frac{1}{a+b-c}\right).$$

Sử dụng bất đẳng thức $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \ge \frac{4}{x+y}, x, y > 0$ ta có:

$$P \ge \frac{8}{2b} + \frac{4}{2c} + \frac{12}{2a} = 2\left(\frac{3}{a} + \frac{2}{b} + \frac{1}{c}\right) \ge 4\sqrt{3}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \sqrt{3}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $4\sqrt{3}$ đạt tại $a = b = c = \sqrt{3}$.

Nhận xét. Điểm quan trọng nhất của bài toán là dự đoán dấu bằng tại $a = b = c$.

Ngoài ra ta có thể đánh giá P như sau: $P \ge 2\left(\frac{3}{a} + \frac{2}{b} + \frac{1}{c}\right)$.

Theo giả thiết ta có: $\frac{2}{b} + \frac{1}{c} = a$ suy ra $P \ge 2\left(\frac{3}{a} + a\right) \ge 4\sqrt{3}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \sqrt{3}$.

Bài tập tương tự

Cho a,b,c là độ dài ba cạnh một tam giác thoả mãn điều kiện

$$2ab + 3ac + 4bc = 9abc.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{5}{b+c-a} + \frac{6}{a+c-b} + \frac{7}{a+b-c}$.

Bài 3. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 = 3$.

Chứng minh rằng $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \ge \frac{4}{a^2+7} + \frac{4}{b^2+7} + \frac{4}{c^2+7}$.

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \ge \frac{4}{x+y}$ ta có $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} \ge \frac{4}{a+2b+c}$.

Theo AM – GM ta có $a^2+1\ge 2a$

$$2\left(b^2+1\right)\ge 4b$$

$$c^2+1\ge 2c$$

Cộng theo vế 3 bất đẳng thức trên ta được

$$2\left(a+2b+c\right)\le a^2+2b^2+c^2+4=\left(a^2+b^2+c^2\right)+4+b^2=b^2+7.$$

Suy ra $\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{b+c}\ge\dfrac{8}{b^2+7}$.

Tương tự ta có: $\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{c+a}\ge\dfrac{8}{c^2+7}$

$$\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\ge\frac{8}{a^2+7}$$

Cộng theo vế 3 bất đẳng thức trên ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài 4. Cho a,b,c là các số thực dương chứng minh rằng

$$\frac{ab}{a^3+b^3+a^2c+b^2c}+\frac{bc}{b^3+c^3+b^2a+c^2a}+\frac{ca}{c^3+a^3+c^2b+a^2b}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

Lời giải

Ta có $a^3+b^3\ge ab\left(a+b\right)$.

$$\Rightarrow\frac{ab}{a^3+b^3+a^2c+b^2c}\le\frac{ab}{ab\left(a+b\right)+c\left(a^2+b^2\right)}$$

$$\le\frac{ab}{4}\left[\frac{1}{ab\left(a+b\right)}+\frac{1}{c\left(a^2+b^2\right)}\right]$$

$$=\frac{1}{4}.\frac{1}{a+b}+\frac{1}{4}.\frac{ab}{a^2+b^2}.\frac{1}{c}\le\frac{1}{16}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+\frac{1}{8}c$$

Tương tự ta có $\dfrac{bc}{b^3+c^3+b^2a+c^2a}\le\dfrac{1}{16}\left(\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)+\dfrac{1}{8a}$.

$$\frac{ca}{c^3+a^3+c^2b+a^2b}\le\frac{1}{16}\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+\frac{1}{8b}$$

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bài 5. Cho a,b,c là các số thực dương có tích bằng 1. Chứng minh

$$\frac{1}{ab+a+2}+\frac{1}{bc+b+2}+\frac{1}{ca+c+2}\le\frac{3}{4}.$$

Lời giải

Ta có $\frac{1}{ab+a+2}=\frac{1}{(ab+1)+(a+1)}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{ab+1}+\frac{1}{a+1}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{c}{c+1}+\frac{1}{a+1}\right)$

$$\frac{1}{bc+b+2}=\frac{1}{(bc+1)+(b+1)}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{bc+1}+\frac{1}{b+1}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{a}{a+1}+\frac{1}{b+1}\right)$$

$$\frac{1}{ca+c+2}=\frac{1}{(ca+1)+(c+1)}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{ca+1}+\frac{1}{c+1}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{b}{b+1}+\frac{1}{c+1}\right)$$

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên ta có đcpm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

C. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1. Chứng minh rằng với mọi x,y,z dương ta có

$$\frac{1}{2x+y+z}+\frac{1}{2y+z+x}+\frac{1}{2z+x+y}\le\frac{xy+yz+xz}{4xyz}.$$

Bài 2. Cho x,y,z là các số thực dương thoả mãn điều kiện $xy+yz+zx+xyz=4$.

Chứng minh rằng $\frac{1}{2x+y+6}+\frac{1}{2y+z+6}+\frac{1}{2z+x+6}\le\frac{1}{3}$

Bài 3. Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh

$$\frac{a}{a+1}+\frac{2b}{b+2}+\frac{3c}{c+3}\le\frac{6(a+b+c)}{a+b+c+6}.$$

Bài 4. Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh

$$\frac{1}{a+2b}+\frac{1}{b+2c}+\frac{1}{c+2a}\ge\frac{4}{3a+4b+5c}+\frac{4}{3b+4c+5a}+\frac{4}{3c+4a+5b}.$$

Bài 5. Cho *x,y,z* là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $x+y^2+z^3=13$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{1}{1+x}+\frac{4}{y}+\frac{12}{z}$.

Bài 6. Chứng minh rằng với mọi số thực dương tùy ý a,b,c,d ta luôn có

$$\frac{a-d}{b+d}+\frac{d-b}{c+b}+\frac{b-c}{c+a}+\frac{c-a}{d+a}\ge 0.$$

Bài 7. Cho a,b,c là độ dài ba cạnh một tam giác thoả mãn điều kiện

$$2ab+3ac+4bc=9abc.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=2\left(\frac{5}{b+c-a}+\frac{6}{a+c-b}+\frac{7}{a+b-c}\right)$.

Bài 8. Cho a,b,c là các số thực dương có tích bằng 1. Chứng minh

$$\frac{a}{ca+1}+\frac{b}{ab+1}+\frac{c}{bc+1}\le\frac{1}{2}\left(a^2+b^2+c^2\right).$$

Bài 9. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$.

Chứng minh rằng $\frac{1}{(a-1)(b-1)(c-1)}+\frac{8}{(a+1)(b+1)(c+1)}\le\frac{1}{4}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI – ĐÁP SỐ

Bài 1. Sử dụng bất đẳng thức $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_4}\ge\frac{16}{a_1+a_2+a_3+a_4}$ ta được:

$$\frac{1}{2x+y+z}\le\frac{1}{16}\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$$

$$\frac{1}{2y+z+x}\le\frac{1}{16}\left(\frac{2}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{x}\right)$$

$$\frac{1}{2z+x+y}\le\frac{1}{16}\left(\frac{2}{z}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$$

Cộng theo vế 3 bất đẳng thức trên ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z$.

Bài 2. Gọi P là biểu thức vế trái của bất đẳng thức đã cho.

Sử dụng bất đẳng thức $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_n}\ge\frac{9}{a_1+a_2+a_3}$ ta được:

$$\frac{1}{2x+y+6}=\frac{1}{(x+2)+(x+2)+(y+2)}\le\frac{1}{9}\left(\frac{2}{x+2}+\frac{1}{y+2}\right).$$

Tương tự ta có

$$\frac{1}{2y+z+6}\le\frac{1}{9}\left(\frac{2}{y+2}+\frac{1}{z+2}\right)$$

$$\frac{1}{2z+x+6}\le\frac{1}{9}\left(\frac{2}{z+2}+\frac{1}{x+2}\right)$$

Cộng theo vế 3 bất đẳng thức trên ta được

$$P\le\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+2}+\frac{1}{y+2}+\frac{1}{z+2}\right).$$

Chú ý điều kiện bài toán được viết lại dưới dạng:

$$\frac{1}{x+2}+\frac{1}{y+2}+\frac{1}{z+2}=1.$$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$.

Bài 3. Bất đẳng thức được viết lại dưới dạng

$$\frac{a}{a+1}-1+\frac{2b}{b+2}-2+\frac{3c}{c+3}-3\le\frac{6\left(a+b+c\right)}{a+b+c+6}-6$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{a+1}+\frac{4}{b+2}+\frac{9}{c+3}\ge\frac{36}{a+b+c+6}$$

Bất đẳng thức cuối luôn đúng. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$a+1=\frac{b+2}{2}=\frac{c+3}{3}.$$

Bài 4.

Ta có

$$\frac{16}{3a+4b+5c}=\frac{\left(1+1+1+1\right)^2}{\left(a+2b\right)+\left(b+2c\right)+\left(b+2c\right)+\left(c+2a\right)}\le\frac{1}{a+2b}+\frac{2}{b+2c}+\frac{1}{c+2a}.$$

Xây dựng tương tự 2 bất đẳng thức như trên rồi cộng lại ta có điều phải chứng minh.

Bài 5. Điểm rơi của bài toán là $x=1,y=2,z=2$.

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$$33=x+y^2+z^3+20=x+y^2+4+z^3+8+8\ge x+4y+12z.$$

Sử dụng bất đẳng thức C-S dạng phân thức ta có:

$$P=\frac{1}{1+x}+4.\frac{1}{y}+12.\frac{1}{z}\ge\frac{\left(1+4.1+12.1\right)^2}{1+x+4y+12.z}=\frac{17^2}{x+4y+12z+1}\ge\frac{17^2}{34}=\frac{289}{34}=\frac{17}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=1,y=2,z=2$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\frac{17}{2}$ đạt tại $x=1,y=z=2$.

Bài 6. Cộng 4 vào 2 vế bất đẳng thức tương đương với:

$$\frac{a+b}{b+d}+\frac{c+d}{c+b}+\frac{b+a}{c+a}+\frac{c+d}{d+a}\ge 4.$$

$$\Leftrightarrow (c+d)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+d}\right)+(a+b)\left(\frac{1}{b+d}+\frac{1}{c+a}\right)\ge 4.$$

Chú ý $\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+d}\ge\frac{4}{a+b+c+d}$;

$$\frac{1}{b+d}+\frac{1}{c+a}\ge\frac{4}{a+b+c+d}$$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=d$.

Bài 7. Theo giả thiết ta có: $2ab+3ac+4bc=9abc\Leftrightarrow\frac{4}{a}+\frac{3}{b}+\frac{2}{c}=9$.

Sử dụng bất đẳng thức AM – GM dạng cộng mẫu, ta có

$$P = 2.\left(\frac{1}{b+c-a}+\frac{1}{a+c-b}\right)+4.\left(\frac{1}{a+c-b}+\frac{1}{a+b-c}\right)+3.\left(\frac{1}{a+b-c}+\frac{1}{b+c-a}\right).$$

$$\Rightarrow P \ge 2.\frac{4}{2c}+4.\frac{4}{2a}+3.\frac{4}{2b} \Rightarrow P \ge 2\left(\frac{4}{a}+\frac{3}{b}+\frac{2}{c}\right)=18$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều $a=b=c=1$.

Bài 8. Tồn tại các số thực dương x,y,z sao cho $a=\frac{x}{y}, b=\frac{y}{z}, c=\frac{z}{x}$.

Bất đẳng thức trở thành $\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{z^2}+\frac{z^2}{x^2} \ge \frac{2x}{y+z}+\frac{2y}{z+x}+\frac{2z}{x+y}$.

Chú ý sử dụng bất đẳng thức AM – GM ta có

$$\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{z^2}+\frac{z^2}{x^2} \ge \frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}$$

$$\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{z^2}+\frac{z^2}{x^2} \ge \frac{x}{z}+\frac{y}{x}+\frac{z}{y}$$

Cộng theo vế hai bất đẳng thức trên và chú ý

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+\frac{x}{z}+\frac{y}{x}+\frac{z}{y}=x\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)+y\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\right)+z\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$$

$$\ge \frac{4x}{y+z}+\frac{4y}{z+x}+\frac{4z}{x+y}$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài 9. Giả thiết ta có $ab+bc+ca=abc$.

Suy ra

$$\frac{1}{(a-1)(b-1)(c-1)}+\frac{8}{(a+1)(b+1)(c+1)}=\frac{1}{a+b+c-1}+\frac{8}{2abc+a+b+c+1}.$$

Chú ý $a+b+c \ge \dfrac{9}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}=9;$

$$abc=ab+bc+ca \ge \sqrt{3abc(a+b+c)} \ge 3\sqrt{3abc} \Rightarrow abc \ge 27$$

Từ đó ta có ngay điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=3$.

CHỦ ĐỀ 4: KỸ THUẬT SỬ DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC CAUCHY – SCHWARZ

A. NỘI DUNG PHƯƠNG PHÁP

Cho hai dãy số thực $(a_1, a_2, ..., a_n); (b_1, b_2, ..., b_n)$ khi đó ta có

$$\left(a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n\right)^2 \le \left(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2\right).$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_i = kb_i, i = \overline{1,n}, k \in \mathbb{R}$.

Chứng minh.

Xét tam thức bậc hai

$$f(x) = \left(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2\right)x^2 - 2\left(a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n\right)x + \left(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2\right)$$
$$= \left(a_1x - b_1\right)^2 + \left(a_2x - b_2\right)^2 + ... + \left(a_nx - b_n\right)^2 \ge 0.$$

Theo định lý về dấu của tam thức bậc hai ta có

$$\Delta' \le 0 \Leftrightarrow \left(a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n\right)^2 \le \left(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2\right).$$

Hệ quả(Bất đẳng thức Mincopski) Với 2 dãy số thực $a_1, a_2, .., a_n$ và $b_1, b_2, ..., b_n$ ta có

$$\sqrt{a_1^2 + b_1^2} + \sqrt{a_2^2 + b_2^2} + ... + \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \ge \sqrt{\left(a_1 + a_2 + ... + a_n\right)^2 + \left(b_1 + b_2 + ... + b_n\right)^2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1, a_2, .., a_n$ và $b_1, b_2, ..., b_n$ là 2 bộ số tỷ lệ.

B. BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Cho x,y,z là các số thực dương thoả mãn điều kiện $x + y + z = \dfrac{47}{12}$.

Chứng minh rằng $3x^2 + 4y^2 + 5z^2 \ge \dfrac{235}{12}$.

Lời giải

<u>Phân tích tìm lời giải:</u>

Ta cần tìm các số a,b,c dương sao cho

$$\left(3x^2 + 4y^2 + 5z^2\right)\left(a^2 + b^2 + c^2\right) \ge \left(a\sqrt{3}x + 2by + c\sqrt{5}z\right)^2.$$

Với vế phải bất đẳng thức là một hằng số vì vậy chỉ cần chọn a,b,c sao cho

$$a\sqrt{3}x + 2by + c\sqrt{5}z = x + y + z.$$

Ta có ngay $(a;b;c) = \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}; \dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

Lời giải chi tiết:

$$\left(3x^2+4y^2+5z^2\right)\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)\ge\left(x+y+z\right)^2=\left(\frac{47}{12}\right)^2.$$

$$\Rightarrow 3x^2+4y^2+5z^2\ge\frac{235}{12}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\left(x;y;z\right)=\left(\frac{5}{3};\frac{5}{4};1\right)$.

Bài 2. Cho x,y,a,b,c là các số thực thoả mãn điều kiện

$$\left(x+a\right)^2+\left(y+b\right)^2+\left(x+y\right)^2=c^2.$$

Chứng minh rằng $\left(a+b\right)^2\le 3c^2$.

Lời giải

Phân tích tìm lời giải:

Ta cần chứng minh $\left(a+b\right)^2\le 3\left(\left(x+a\right)^2+\left(y+b\right)^2+\left(x+y\right)^2\right)$.

Chú ý $a+b=\left(x+a\right)+\left(y+b\right)+\left(-x-y\right)$.

Nên dựa vào bất đẳng thức trên ta sử dụng bất đẳng thức C –S cho hai bộ số

$$\left(1;1;1\right);\left(x+a;y+b;-x-y\right).$$

Lời giải chi tiết:

Sử dụng bất đẳng thức C –S ta có

$$\left(a+b\right)^2=\left[\left(x+a\right)+\left(y+b\right)+\left(-x-y\right)\right]^2\le 3\left[\left(x+a\right)^2+\left(y+b\right)^2+\left(x+y\right)^2\right]=3c^2.$$

Bất đẳng thức được chứng minh.

Bài 3. Cho x,y,z là các số thực thoả mãn $x\ge 5, y\ge 6, z\ge 7; x^2+y^2+z^2\ge 125$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x+y+z$.

Lời giải

$$\begin{aligned} x+y+z&=\sqrt{x^2+y^2+z^2+2yz+2zx+2xy}\\ &\ge\sqrt{125+2xy+2(x+y)z}\\ &\ge\sqrt{125+2xy+2(x+y)\sqrt{125-x^2-y^2}}\\ &\ge\sqrt{125+60+22\sqrt{64}}=19\end{aligned}.$$

Cơ sở nhỏ nhất ta ép về 2 biến có chặn dưới nhỏ nhất là x và y khi đó tích xy nhỏ nhất trong các tích.

Bài 3. Cho x,y,z,t là các số thực thoả mãn điều kiện $\begin{cases} x^2+y^2=9 \\ z^2+t^2=16 \\ xt+yz=12 \end{cases}$.

Chứng minh rằng $\left|x+z\right| \le 5$.

Lời giải

Chú ý hệ điều kiện ta có đẳng thức sau: $\left(xt+yz\right)^2=\left(x^2+y^2\right)\left(z^2+t^2\right)=144$.

Do đó $x=kt, y=kz$.

Vì vậy $x^2+y^2=k^2\left(t^2+z^2\right) \Rightarrow k^2=\dfrac{9}{16}$

$$\Rightarrow S=x+z=x+\frac{y}{k}=\frac{kx+y}{k} \Rightarrow S^2=\frac{\left(kx+y\right)^2}{k^2} \le \frac{\left(k^2+1\right)\left(x^2+y^2\right)}{k^2}=25.$$

Bất đẳng thức được chứng minh.

Bài tập tương tự

Cho a,b,c,x,y,z là các số thực thoả mãn điều kiện $\begin{cases} a^2+b^2+c^2=9 \\ x^2+y^2+z^2=16 \\ ax+by+cz=12 \end{cases}$.

Chứng minh rằng $a+y+z \le \sqrt{41}$.

Bài 4. Cho x,y,z là các số thực không âm. Chứng minh

$$\sqrt{x^3y+y^3z+z^3x}+\sqrt{x^3z+y^3x+z^3y} \le \frac{(x+y+2z)^2}{2}.$$

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức C –S ta có:

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^3y+y^3z+z^3x}+\sqrt{x^3z+y^3x+z^3y} &\le \sqrt{2\left(x^3y+y^3z+z^3x+x^3z+y^3x+z^3y\right)} \\
&= \sqrt{2\sum xy(x^2+y^2)} \\
&\le \sqrt{2(xy+yz+zx)(x^2+y^2+z^2)} \\
&\le \frac{x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)}{2} \\
&= \frac{(x+y+z)^2}{2} \le \frac{(x+y+2z)^2}{2}
\end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y, z=0$.

Bài 5. Cho $x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2$ là các số thực thoả mãn điều kiện

$$x_1, x_2 > 0, x_1y_1 > z_1^2, x_2y_2 > z_2^2.$$

Chứng minh rằng $\dfrac{1}{x_1y_1 - z_1^2} + \dfrac{1}{x_2y_2 - z_2^2} \geq \dfrac{8}{(x_1+x_2)(y_1+y_2) - (z_1+z_2)^2}$.

Lời giải

Bất đẳng thức tương đương với:

$$\left(\frac{1}{x_1y_1 - z_1^2} + \frac{1}{x_2y_2 - z_2^2}\right)\left[(x_1+x_2)(y_1+y_2) - (z_1+z_2)^2\right] \geq 8.$$

Sử dụng bất đẳng thức C –S ta có

$$(z_1+z_2)^2 = \left(\sqrt{x_1}.\frac{z_1}{\sqrt{x_1}} + \sqrt{x_2}.\frac{z_2}{\sqrt{x_2}}\right)^2 \leq (x_1+x_2)\left(\frac{z_1^2}{x_1} + \frac{z_2^2}{x_2}\right).$$

Kết hợp sử dụng bất đẳng thức AM – GM ta có:

$$\begin{aligned}(x_1+x_2)(y_1+y_2) - (z_1+z_2)^2 &\geq (x_1+x_2)(y_1+y_2) - (x_1+x_2)\left(\frac{z_1^2}{x_1} + \frac{z_2^2}{x_2}\right)\\ &= (x_1+x_2)\left(y_1 - \frac{z_1^2}{x_1} + y_2 - \frac{z_2^2}{x_2}\right)\\ &= (x_1+x_2)\left(\frac{x_1y_1 - z_1^2}{x_1} + \frac{x_2y_2 - z_2^2}{x_2}\right)\\ &\geq 2\sqrt{x_1x_2}.2\sqrt{\frac{x_1y_1 - z_1^2}{x_1}.\frac{x_2y_2 - z_2^2}{x_2}}\\ &= 4\sqrt{\left(x_1y_1 - z_1^2\right)\left(x_2y_2 - z_2^2\right)}\end{aligned}$$

Mặt khác $\dfrac{1}{x_1y_1 - z_1^2} + \dfrac{1}{x_2y_2 - z_2^2} \geq \dfrac{2}{\sqrt{\left(x_1y_1 - z_1^2\right)\left(x_2y_2 - z_2^2\right)}}$.

Nhân theo vế hai bất đẳng thức trên ta có ngay điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2; y_1 = y_2; z_1 = z_2$.

Tổng quát với $x_k > 0, x_ky_k > z_k^2, k = \overline{1,n}$ ta có

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_ky_k - z_k^2} \geq \frac{n^3}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n}x_k\right)\left(\sum\limits_{k=1}^{n}y_k\right) - \left(\sum\limits_{k=1}^{n}z_k\right)^2}$$

Bài 3. Cho a,b,c,x,y,z là các số thực dương thoả mãn điều kiện $ax+by+cz=xyz$.

Chứng minh rằng $x+y+z>\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a}$.

Lời giải

Theo giả thiết ta có $\frac{a}{yz}+\frac{b}{zx}+\frac{c}{xy}=1$.

Đặt $a=myz, b=nzx, c=pxy \Rightarrow m+n+p=1$.

Bất đẳng thức trở thành

$$x+y+z>\sqrt{z(my+nx)}+\sqrt{x(nz+py)}+\sqrt{y(mz+px)}.$$

Sử dụng bất đẳng thức C –S cho vế phải ta có

$$\begin{aligned}&\sqrt{z(my+nx)}+\sqrt{x(nz+py)}+\sqrt{y(mz+px)}\\&\le\sqrt{(x+y+z)(my+mz+nx+nz+px+py)}\\&<\sqrt{(x+y+z)(m+n+p)(x+y+z)}=x+y+z\end{aligned}.$$

Bất đẳng thức được chứng minh.

Nhận xét. Ta có thể tìm được giá trị nhỏ nhất của tổng $x+y+z$ bằng

$$\sqrt{M(M+a)(M+b)(M+c)}.$$

Chính là nghiệm dương duy nhất của phương trình

$$\frac{2}{M}=\frac{1}{a+M}+\frac{1}{b+M}+\frac{1}{c+M}.$$

Bài 3. Cho x,y là 2 số thực dương thoả mãn điều kiện $x^2+y^3\ge x^3+y^4$.

Chứng minh rằng $x^3+y^3\le 2$.

Lời giải

<u>Phân tích tìm lời giải:</u>

Bằng cách sử dụng C –S làm xuất hiện các bậc x^2, y^4 để tận dụng điều kiện bài toán.

Sử dụng bất đẳng thức C – S, ta có

$$\begin{aligned}\left(x^3+y^3\right)^2&=\left(x\sqrt{x}.x\sqrt{x}+y^2.y\right)^2\le\left(x^3+y^4\right)\left(x^3+y^2\right)\\&\le\left(x^2+y^3\right)\left(x^3+y^2\right)\le\left(\frac{x^2+y^3+x^3+y^2}{2}\right)^2.\end{aligned}$$

Suy ra $x^3+y^3\le\frac{x^2+y^3+x^3+y^2}{2}\Leftrightarrow x^3+y^3\le x^2+y^2$.

Vậy ta chỉ cần chứng minh $x^2+y^2\le 2$.

Thật vậy sử dụng bất đẳng thức C –S ta có

$$\left(x^2+y^2\right)^2=\left(x\sqrt{x}.\sqrt{x}+y\sqrt{y}.\sqrt{y}\right)^2\le\left(x^3+y^3\right)\left(x+y\right)\le\left(x^2+y^2\right)\left(x+y\right)$$

$$\Rightarrow x^2+y^2\le x+y\le\sqrt{2\left(x^2+y^2\right)}\Rightarrow x^2+y^2\le 2$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=1$.

Bài 5. Cho x,y,z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $4xy+2yz-zx=25$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\sqrt{\dfrac{x^2+4y^2}{z^2+4xy}}+\dfrac{2}{5}\sqrt{z^2+4xy}$.

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức C –S ta có

$$\begin{aligned}25&=\sqrt{4xy}.\sqrt{4xy}+z(2y-x)\\&\le\sqrt{(4xy+z^2)[4xy+(2y-x)^2]}\\&=\sqrt{(z^2+4xy)(x^2+4y^2)}\\&\Rightarrow\sqrt{x^2+4y^2}\ge\frac{25}{\sqrt{z^2+4xy}}\end{aligned}$$

Vì vậy $P\ge\dfrac{25}{z^2+4xy}+\dfrac{2}{5}\sqrt{z^2+4xy}$.

Áp dụng BĐT AM-GM ta có:

$$\frac{25}{z^2+4xy}+\frac{2}{5}\sqrt{z^2+4xy}=\frac{25}{z^2+4xy}+\frac{1}{5}\sqrt{z^2+4xy}+\frac{1}{5}\sqrt{z^2+4xy}$$

$$\ge 3\sqrt[3]{\frac{25}{z^2+4xy}.\frac{1}{5}\sqrt{z^2+4xy}.\frac{1}{5}\sqrt{z^2+4xy}}=3$$

Với $x=3,y=2,z=1$ thì P bằng 3.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 3.

Bài 4. Cho x,y,z là các số thực thoả mãn điều kiện $x+y+z=0;x^2+y^2+z^2=6$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\left|\left(x-y\right)\left(y-z\right)\left(z-x\right)\right|$.

Lời giải

Không mất tính tổng quát giả sử $x\ge y\ge z$.

Khi đó $P=\left(x-y\right)\left(y-z\right)\left(x-z\right)$.

Sử dụng bất đẳng thức C – S ta có

$$x-z\le\sqrt{2\left(x^2+z^2\right)}\le\sqrt{2\left(x^2+y^2+z^2\right)}=2\sqrt{3}.$$

Sử dụng bất đẳng thức AM – GM ta có

$$P\le\left(\frac{x-y+y-z}{2}\right)^2(x-z)=\frac{1}{4}(x-z)^3\le6\sqrt{3}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=\sqrt{3},y=0,z=-\sqrt{3}$ hoặc các hoán vị.

Bài 5. Cho *x,y,z* là các số thực thoả mãn điều kiện $x^2+y^2+z^2=2$.

Chứng minh rằng $x+y+z\le2+xyz$.

Lời giải

Phân tích tìm lời giải:

Bất đẳng thức viết lại dưới dạng $x(1-yz)+y+z\le2$.

Ta đánh giá thông qua tổng $x^2+y^2+z^2$ vì vậy áp dụng C – S cho 2 bộ số $(x;y;z)$ và $(1-yz;1;1)$ hoặc $(x;y+z);(1-yz;1)$.

Ta lựa chọn 2 bộ số thứ 2 vì khi đó ta có một biểu thức tích của yz.

Lời giải chi tiết:

Sử dụng bất đẳng thức C – S ta có

$$x(1-yz)+y+z\le\sqrt{\left(x^2+(y+z)^2\right)\left((1-yz)^2+1^2\right)}$$
$$=\sqrt{(2+2yz)\left(2+y^2z^2-2yz\right)}$$

Vậy ta chỉ cần chứng minh $\sqrt{(2+2yz)\left(2+y^2z^2-2yz\right)}\le2$

$\Leftrightarrow(1+yz)\left(2+y^2z^2-2yz\right)\le2\Leftrightarrow y^3z^3\le y^2z^2$.

Bất đẳng thức cuối luôn đúng vì

$$2=x^2+y^2+z^2\ge y^2+z^2\ge2|yz|\Rightarrow|yz|\le1\Rightarrow y^3z^3\le y^2z^2.$$

Bất đẳng thức được chứng minh đẳng thức xảy ra chẳng hạn 1 số bằng 0 và 2 số bằng 1.

Bài tập tương tự

Cho x,y,z là các số thực không âm thoả mãn điều kiện $x^2+y^2+z^2=1$.

Chứng minh rằng $x+y+z\le\sqrt{2}+\frac{9}{4}xyz$.

Bài 6. Cho x,y,z là các số thực thoả mãn điều kiện $x^2+y^2+z^2=1$. Chứng minh rằng $xy+yz+2zx\le\frac{\sqrt{3}+1}{2}$.

Lời giải

Chú ý vai trò đối xứng của x và z vì vậy sử dụng bất đẳng thức C –S ta có

$$y(x+z)\le\sqrt{2\left(y^2x^2+y^2z^2\right)}=\sqrt{2y^2\left(1-y^2\right)}$$
$$2zx\le x^2+z^2=1-y^2.$$

Cộng theo vế hai bất đẳng thức đưa về chứng minh

$$\sqrt{2y^2\left(1-y^2\right)}+1-y^2\le\frac{\sqrt{3}+1}{2}.$$

Đến đây có thể đưa về khảo sát hàm số hoặc sử dụng trực tiếp C –S như sau

$$\begin{aligned}\sqrt{2y^2\left(1-y^2\right)}+1-y^2&=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{4y^2-4y^4}+\frac{1}{2}\left(1-2y^2\right)+\frac{1}{2}\\&\le\sqrt{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)\left(4y^2-4y^4+\left(1-2y^2\right)^2\right)}+\frac{1}{2}=\frac{1+\sqrt{3}}{2}.\end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=z=\pm\frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{3}}},y=\pm\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{3}}}$.

Bài 5. Chứng minh rằng nếu phương trình $x^4+bx^3+cx^2+bx+1=0$ có nghiệm thì $b^2+(c-2)^2>3$.

Lời giải

Nếu x_0 là nghiệm của phương trình rõ ràng $x_0\ne0$ viết lại phương trình dưới dạng

$$x_0^2+\frac{1}{x_0^2}+b\left(x_0+\frac{1}{x_0}\right)+c=0\Leftrightarrow\left(x_0+\frac{1}{x_0}\right)^2+b\left(x_0+\frac{1}{x_0}\right)+c-2=0.$$

Đặt $X=x_0+\frac{1}{x_0},|X|\ge2$ phương trình trở thành

$$X^2+bX+c-2=0\Rightarrow(bX+c-2)^2=X^4.$$

Sử dụng bất đẳng thức C –S ta có

$$(bX+c-2)^2\le\left[b^2+(c-2)^2\right]\left(X^2+1\right).$$

Suy ra $b^2+(c-2)^2\ge\frac{X^4}{X^2+1}=X^2-1+\frac{1}{X^2+1}>X^2-1\ge3$.

Bất đẳng thức được chứng minh.

Bài tập tương tự

Cho phương trình $x^4+ax^3+bx^2+2ax+4=0$.

Tìm nghiệm của phương trình biết $a^2+b^2=\dfrac{16}{9}$.

Bài 3. Cho x,y,z là các số thực thoả mãn điều kiện $x,y,z\ge 1$ và $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=2$.

Chứng minh rằng $\sqrt{x+y+z}\ge\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1}$.

Lời giải

Viết lại điều kiện giả thiết dưới dạng

$$1=1-\frac{1}{x}+1-\frac{1}{y}+1-\frac{1}{z}$$

$$\Leftrightarrow\frac{x-1}{x}+\frac{y-1}{y}+\frac{z-1}{x}=1$$

Sử dụng bất đẳng thức C –S ta có

$$x+y+z=(x+y+z)\left(\frac{x-1}{x}+\frac{y-1}{y}+\frac{z-1}{z}\right)$$

$$\ge\left(\sqrt{x}.\sqrt{\frac{x-1}{x}}+\sqrt{y}.\sqrt{\frac{y-1}{y}}+\sqrt{z}.\sqrt{\frac{z-1}{z}}\right)^2.$$

$$=\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1}\right)^2$$

$$\Rightarrow\sqrt{x+y+z}\ge\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1}$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=\dfrac{3}{2}$.

Bài 4. Cho *x*,*y*,*z* là các số thực thuộc đoạn $[-1;1]$ và thoả mãn điều kiện

$$x+y+z+xyz=0.$$

Chứng minh rằng $\sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}+\sqrt{z+1}\le 3$.

Lời giải

\+ Nếu $x+y+z\le 0$ ta có ngay điều phải chứng minh vì

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}+\sqrt{z+1}\le\sqrt{(1+1+1)(x+1+y+1+z+1)}$$

$$=\sqrt{3(x+y+z)+9}\le 3$$

\+ Ta xét với $x+y+z>0\Rightarrow xyz=-(x+y+z)<0$ do đó phải tồn tại ít nhất 1 số âm và 1 số dương.

Không mất tính tổng quát giả sử $z<0 \Rightarrow \begin{cases} xy>0 \\ x+y>-z>0 \end{cases} \Rightarrow x,y>0$.

Khi đó vai trò của x và y như nhau nên ta áp dụng C – S cho 2 căn thức đầu tiên ta được

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}+\sqrt{z+1} \le \sqrt{2(x+1+y+1)}+\sqrt{z+1}$$
$$=\sqrt{2(x+y)+4}+\sqrt{z+1}$$

Bất đẳng thức được chứng minh nếu ta chứng minh được

$$\sqrt{2(x+y)+4}+\sqrt{z+1} \le 3$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{2(x+y)+4}-2 \le 1-\sqrt{z+1}$$
$$\Leftrightarrow \frac{2(x+y)}{\sqrt{2(x+y)+4}+2} \le -\frac{z}{1+\sqrt{z+1}}$$

Chú ý $x+y=-z(xy+1);1+z=-\frac{x+y}{xy+1}+1=\frac{(1-x)(1-y)}{1+xy}$.

Vậy ta đi chứng minh

$$\frac{-2z(xy+1)}{\sqrt{2(x+y)+4}+2} \le \frac{-z}{1+\sqrt{\frac{(1-x)(1-y)}{1+xy}}}$$
$$\Leftrightarrow xy+\sqrt{(1-x)(1-y)(1+xy)} \le 1+\sqrt{1+\frac{x+y}{2}}$$

Bất đẳng thức luôn đúng vì

$$xy+\sqrt{(1-x)(1-y)(1+xy)}=\sqrt{x}.\sqrt{xy^2}+\sqrt{(1-x)}.\sqrt{(1-y)(1+xy)}$$
$$\le \sqrt{(x+1-x)\left(xy^2+(1-y)(1+xy)\right)}$$
$$=\sqrt{1+xy-y}=\sqrt{1+y(x-1)} \le 1 \le 1+\sqrt{1+\frac{x+y}{2}}$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra tại $x=y=z=0$.

Bài 6. Cho *a*,*b*,*c* là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\left(a^2+1\right)\left(b^2+1\right)\left(c^2+1\right) \ge \frac{5}{16}(a+b+c+1)^2.$$

Lời giải

Dự đoán dấu bằng đạt tại $a=b=c$ thay vào bất đẳng thức ta tìm được $a=b=c=\frac{1}{2}$.

Sử dụng bất đẳng thức C –S ta có

$$\frac{5}{16}(a+b+c+1)^2=\frac{5}{16}\left(a.1+1.\frac{b+c+1}{1}\right)^2\le\frac{5}{16}\left(a^2+1\right)\left[1+(b+c+1)^2\right].$$

Vậy ta chỉ cần chứng minh $\left(b^2+1\right)\left(c^2+1\right)\ge\frac{5}{16}\left[1+(b+c+1)^2\right]$

$\Leftrightarrow 16b^2c^2+11b^2+11c^2+6\ge 10bc+10b+10c$.

Bất đẳng thức trên là tổng của các bất đẳng thức sau

$$16b^2c^2+1\ge 8bc$$
$$b^2+c^2\ge 2bc$$
$$10\left(b^2+\frac{1}{4}\right)\ge 10b$$
$$10\left(c^2+\frac{1}{4}\right)\ge 10c$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{2}$.

<u>Cách 2:</u> Chú ý. Với mọi số thực $a_1,a_2,...,a_n>-1$ và cùng dấu ta luôn có

$$(1+a_1)(1+a_2)...(1+a_n)\ge 1+a_1+a_2+...+a_n.$$

Trong 3 số $a^2-\frac{1}{4},b^2-\frac{1}{4},c^2-\frac{1}{4}$ có ít nhất 2 số cùng dấu không mất tính tổng quát giả sử $a^2-\frac{1}{4};b^2-\frac{1}{4}$ cùng dấu ta có:

$$\left(a^2+1\right)\left(b^2+1\right)=\left[\left(a^2-\frac{1}{4}\right)+\frac{5}{4}\right].\left[\left(b^2-\frac{1}{4}\right)+\frac{5}{4}\right]$$
$$=\frac{25}{16}\left[1+\frac{4}{5}\left(a^2-\frac{1}{4}\right)\right].\left[1+\frac{4}{5}\left(b^2-\frac{1}{4}\right)\right]$$
$$\ge\frac{25}{16}\left[1+\frac{4}{5}\left(a^2-\frac{1}{4}\right)a^2+\frac{4}{5}\left(b^2-\frac{1}{4}\right)\right]$$

Bất đẳng thức được chứng minh nếu ta chứng minh được:

$$\frac{25}{16}\left[1+\frac{4}{5}\left(a^2-\frac{1}{4}\right)+\frac{4}{5}\left(b^2-\frac{1}{4}\right)\right]\left(c^2+1\right)\ge\frac{5}{16}(a+b+c+1)^2.$$

$5\left[1+\frac{4}{5}\left(a^2-\frac{1}{4}\right)+\frac{4}{5}\left(b^2-\frac{1}{4}\right)\right]\left(c^2+1\right)\ge(a+b+c+1)^2$.

$\Leftrightarrow\left(4a^2+4b^2+3\right)\left(c^2+1\right)\ge(a+b+c+1)^2$.

Theo C-S ta có

$$\left(4a^2+4b^2+3\right)\left(c^2+1\right)=\left(4a^2+4b^2+1+1+1\right)\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+c^2+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)$$

$$\geq\left(2a.\frac{1}{2}+2b.\frac{1}{2}+1.c+1.\frac{1}{2}+1.\frac{1}{2}\right)^2=\left(a+b+c+1\right)^2$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{2}$.

Bài tập tương tự

Cho a,b,c là các số thực dương chứng minh

$$\left(a^2+3\right)\left(b^2+3\right)\left(c^2+3\right)\geq 4\left(a+b+c+1\right)^2.$$

Bài 10. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện $a+b+c+1=4abc$.

Chứng minh rằng $\frac{1}{a^4+b+c}+\frac{1}{b^4+c+a}+\frac{1}{c^4+a+b}\leq\frac{3}{a+b+c}$.

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức C – S ta có

$$\left(a^4+b+c\right)\left(1+b^3+c^3\right)\geq\left(a^2+b^2+c^2\right)^2$$

$$\Rightarrow\frac{1}{a^4+b+c}\leq\frac{1+b^3+c^3}{\left(a^2+b^2+c^2\right)}$$

Tương tự ta có $\frac{1}{b^4+c+a}\leq\frac{1+c^3+a^3}{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2};\frac{1}{c^4+a+b}\leq\frac{1+a^4+b^4}{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}$.

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên ta được

$$P\leq\frac{3+2\left(a^3+b^3+c^3\right)}{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}.$$

Ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{3+2\left(a^3+b^3+c^3\right)}{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}\leq\frac{3}{a+b+c}$$

$$\Leftrightarrow a^4+b^4+c^4+6\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)\geq 2\left(a^3b+b^3a+b^3c+c^3b+c^3a+a^3c\right)+3\left(a+b+c\right)$$

$$\Leftrightarrow\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\right)^2+3\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2-a-b-c\right)\geq 0$$

.

Chú ý

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\ge\sqrt{3a^2b^2c^2\left(a^2+b^2+c^2\right)}\ge abc\left(a+b+c\right)\ge a+b+c$$

bởi vì $4abc=1+a+b+c\ge 1+3\sqrt[3]{abc}\Rightarrow abc\ge 1$.

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài tập tương tự

Cho a, b, c là các số thực dương thoả mãn điều kiện

$$\frac{1}{a+b+1}+\frac{1}{b+c+1}+\frac{1}{c+a+1}\ge 1.$$

Chứng minh rằng $a+b+c\ge ab+bc+ca$.

Bài 11. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh

$$\sqrt{\left(a+b+c\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)}\ge 1+\sqrt[3]{5+\sqrt{\left(a^3+b^3+c^3\right)\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\right)}}.$$

Lời giải

Ta có $\sqrt{\left(a+b+c\right)^3\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^3}$

$$=\sqrt{\left[a^3+b^3+c^3+3\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)\right]\left[\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}+\frac{3\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)}{a^2b^2c^2}\right]}$$

$$\ge\sqrt{\left(a^3+b^3+c^3\right)\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\right)}+\frac{3\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)}{abc}$$

Chú ý

$$\frac{\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)}{abc}=\frac{\left(a+b+c\right)\left(ab+bc+ca\right)}{abc}-1=\left(a+b+c\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-1$$

Do đó

$$3\left(a+b+c\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-3\ge 3\left(a+b+c\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-3\sqrt{\left(a+b+c\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)}+6$$

Vì $\left(a+b+c\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\ge 9$.

Từ đó suy ra

$$\left(\sqrt{(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)}-1\right)^3 \ge 5+\sqrt{\left(a^3+b^3+c^3\right)\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\right)}$$

$$\Rightarrow \sqrt{(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)} \ge 1+\sqrt[3]{5+\sqrt{\left(a^3+b^3+c^3\right)\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\right)}}$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bài tập tương tự

Cho a,b,c là các số thực dương chứng minh $P=\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)$.

C. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1. Cho a,b là các số thực chứng minh $\sqrt{\left(1+a^2\right)\left(1+b^2\right)} \ge \frac{1}{\sqrt{2}}(a+b+ab-1)$.

Bài 2. Cho x,y,z là các số thực thoả mãn điều kiện $1 \le x \le y \le z \le 4$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=(x-1)^2+\left(\frac{y}{x}-1\right)^2+\left(\frac{z}{y}-1\right)^2+\left(\frac{4}{z}-1\right)^2$.

Bài 2. Sử dụng bất đẳng thức C –S ta có

$$P \ge \frac{1}{4}\left(x-1+\frac{y}{x}-1+\frac{z}{y}-1+\frac{4}{z}-1\right)^2.$$

Chú ý sử dụng bất đẳng thức AM – GM ta có

$$x+\frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{4}{z} \ge 4\sqrt[4]{x.\frac{y}{x}.\frac{z}{y}.\frac{4}{z}}=4\sqrt{2} \Rightarrow P \ge \frac{1}{4}\left(4\sqrt{2}-4\right)^2=4\left(\sqrt{2}-1\right)^2.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=\frac{y}{x}=\frac{z}{y}=\frac{4}{z} \Leftrightarrow x=\sqrt{2}, y=2, z=2\sqrt{2}$.

Bài 2. Chứng minh rằng với mọi x,y,z là các số thực dương ta có

$$\frac{x}{(y+z)^2}+\frac{y}{(z+x)^2}+\frac{z}{(x+y)^2} \ge \frac{9}{4(x+y+z)}.$$

Bài 3. Cho x,y,z là các số thực không âm.

Chứng minh rằng $\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}+\sqrt{z^2+1} \ge \sqrt{6(x+y+z)}$.

Bài 4. Chứng minh rằng với mọi x,y,z là các số thực dương ta có

$$\frac{x^3}{y^2}+\frac{y^3}{z^2}+\frac{z^3}{x^2} \ge \frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}.$$

Bài 5. Cho các số thực *a,b,c* thay đổi thỏa mãn điều kiện $a^2+b^2+c^2=1$.

Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=a^3+b^3+c^3-abc$.

Bài 6. Cho a,b,c là các số thực thoả mãn điều kiện $a^2+b^2+c^2=2$.

Chứng minh rằng $\left|a^3+b^3+c^3-abc\right|\le 2\sqrt{2}$.

Bài 7. Cho a,b,c là các số thực thoả mãn điều kiện $a^2+b^2+c^2=9$.

Chứng minh rằng $2(a+b+c)-abc\le 10$.

Bài 8. Cho *a,b,c* là các số thực thoả mãn điều kiện $x^2+y^2+z^2=k,(k\ge 0)$.

Chứng minh rằng $18k(x+y+z)-xyz\le 270k\sqrt{k}$.

Bài 9. Cho x,y,z là các số thực không âm thoả mãn điều kiện $x^2+y^2+z^2=1$.

Chứng minh rằng $x+y+z\le\sqrt{2}+\frac{9}{4}xyz$.

Bài 10. Chứng minh rằng với mọi a,b,c là các số thực dương ta có

$$\frac{\sqrt{b+c}}{a}+\frac{\sqrt{c+a}}{b}+\frac{\sqrt{a+b}}{c}\ge\frac{4(a+b+c)}{\sqrt{(a+b)(b+c)(c+a)}}.$$

Bài 11. Chứng minh với mọi a,b,c là các số thực dương ta có

$$\frac{a^2+b^2}{2\left(a^2+b^2\right)+c(a+b)}+\frac{b^2+c^2}{2\left(b^2+c^2\right)+a(b+c)}+\frac{c^2+a^2}{2\left(c^2+a^2\right)+b(c+a)}\ge 1.$$

Bài 12. Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh $\sqrt{\frac{2a}{a+b}}+\sqrt{\frac{2b}{b+c}}+\sqrt{\frac{2c}{c+a}}\le 3$

Bài 13. Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh

$$\sqrt{\frac{a^2}{b^2+(c+a)^2}}+\sqrt{\frac{b^2}{c^2+(a+b)^2}}+\sqrt{\frac{c^2}{a^2+(b+c)^2}}\le\frac{3}{\sqrt{5}}.$$

Bài 14. Cho a,b,c là các số thực dương chứng minh

$$\left(a^2+3\right)\left(b^2+3\right)\left(c^2+3\right)\ge 4(a+b+c+1)^2.$$

Bài 15. Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện

$$\frac{1}{a+b+1}+\frac{1}{b+c+1}+\frac{1}{c+a+1}\ge 1.$$

Chứng minh rằng $a+b+c\ge ab+bc+ca$.

Bài 16. Cho a,b,c là các số thực dương có tích bằng 1. Chứng minh

$$\frac{a^5-a^2}{a^5+b^2+c^2}+\frac{b^5-b^2}{b^5+c^2+a^2}+\frac{c^5-c^2}{c^5+a^2+b^2}\le 0.$$

Bài 17. Chứng minh rằng với mọi số thực a,b,c ta có

$$2(1+abc)+\sqrt{2(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)}\ge(1+a)(1+b)(1+c).$$

Bài 18. Cho x,y,z,t là các số thực không âm thoả mãn điều kiện

$$|x-y|+|y-z|+|z-t|+|t-x|=4.$$

Chứng minh rằng $x^2+y^2+z^2+t^2\ge 2$.

Bài 19. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện $a^2+b^2+c^2=3$.

Chứng minh rằng

$$\frac{5a^2}{\sqrt{5a^2+4bc}+2\sqrt{bc}}+\frac{5b^2}{\sqrt{5b^2+4ca}+2\sqrt{ca}}+\frac{5c^2}{\sqrt{5c^2+4ab}+2\sqrt{ab}}\ge 3.$$

Bài 20. Cho a, b, c không âm thoả mãn điều kiện $a+b+c=1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a}$.

Bài 21. Cho a,b,c là độ dài 3 cạnh một tam giác.

Chứng minh rằng $\sqrt{a+b-c}+\sqrt{b+c-a}+\sqrt{c+a-b}\le\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$.

Bài 22. Cho a,b,c là các số thực không âm thoả mãn điều kiện $a^2+b^2+c^2=8$.

Chứng minh rằng $4(a+b+c)-abc\le 16$.

Bài 23. Cho x,y,z là các số thực thoả mãn điều kiện $x^2+y^2+z^2=1$.

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=x^3+y^3+z^3-3xyz.$$

Bài 24. Chứng minh rằng với mọi a,b,c là độ dài 3 cạnh một tam giác ta có

$$a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)\ge 0.$$

Bài 25. Cho x,y,z là các số thực dương chứng minh

$$\frac{1+yz+zx}{(1+x+y)^2}+\frac{1+xy+zx}{(1+y+z)^2}+\frac{1+xy+yz}{(1+z+x)^2}\ge 1.$$

Bài 26. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện

$$(a+b-c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)=4.$$

Chứng minh rằng $\left(a^4+b^4+c^4\right)\left(\frac{1}{a^4}+\frac{1}{b^4}+\frac{1}{c^4}\right)\ge 2304$.

Bài 27. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện

$$(a+b-c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)=4.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\left(a^3+b^3+c^3\right)\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\right)$.

D. HƯỚNG DẪN GIẢI – ĐÁP SỐ

Bài 1. Ta có

$$\left(1+a^2\right)\left(1+b^2\right)=(a+b)^2+(ab-1)^2\geq\frac{1}{2}(a+b+ab-1)^2$$

$$\Rightarrow\sqrt{\left(1+a^2\right)\left(1+b^2\right)}\geq\frac{1}{\sqrt{2}}(a+b+ab-1)$$

Điều phải chứng minh.

Bài 2. Sử dụng bất đẳng thức C –S ta có

$$(x+y+z)\left[\frac{x}{(y+z)^2}+\frac{y}{(z+x)^2}+\frac{z}{(x+y)^2}\right]\geq\left(\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}\right)^2.$$

Mặt khác $\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}=(x+y+z)\left(\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}+\frac{1}{x+y}\right)-3$

$$=\frac{1}{2}\left[(x+y)+(y+z)+(z+x)\right]\left(\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}+\frac{1}{x+y}\right)-3$$

$$\geq\frac{1}{2}(1+1+1)^2-3=\frac{3}{2}$$

Ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z$.

Bài 3. Sử dụng hệ quả bất đẳng thức C –S (Mincopski) ta có

$$\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}+\sqrt{z^2+1}\geq\sqrt{(x+y+z)^2+(1+1+1)^2}.$$

Vậy ta cần chứng minh $(x+y+z)^2+9\geq 6(x+y+z)\Leftrightarrow(x+y+z-3)^2\geq 0$

Bất đẳng thức luôn đúng. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$.

Bài 4. Sử dụng bất đẳng thức C – S ta có

$$\left(\frac{x^3}{y^2}+\frac{y^3}{z^2}+\frac{z^3}{x^2}\right)(x+y+z)\geq\left(\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}\right)^2$$

$$\left(\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}\right)(y+z+x)\geq(x+y+z)^2$$

Nhân theo vế 2 bất đẳng thức trên ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z$.

Tổng quát ta có $\frac{x^{k+1}}{y^k}+\frac{y^{k+1}}{z^k}+\frac{z^{k+1}}{x^k}\ge \frac{x^k}{y^{k-1}}+\frac{y^k}{z^{k-1}}+\frac{z^k}{x^{k-1}}, k\ge 1$.

Bài 5. Sử dụng bất đẳng thức C-S ta được:

$$P^2=\left[a^3+b^3+c\left(c^2-ab\right)\right]^2=\left[a.a^2+b.b^2+c\left(c^2-ab\right)\right]^2$$
$$\le\left(a^2+b^2+c^2\right)\left[a^4+b^4+\left(c^2-ab\right)^2\right]$$
$$=a^4+b^4+c^4-2abc^2+a^2b^2$$
$$\le a^4+b^4+c^4+a^2b^2+c^2\left(a^2+b^2\right)$$
$$\le a^4+b^4+c^4+2\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)=\left(a^2+b^2+c^2\right)^2=1$$

Với $a=1, b=c=0$ thì P bằng 1; với $a=-1, b=c=0$ thì P bằng -1.

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng 1 đạt tại $a=1, b=c=0$ hoặc các hoán vị.

Giá trị nhỏ nhất của P bằng -1 đạt tại $a=-1, b=c=0$ hoặc các hoán vị.

Bài 6. Gọi P là biểu thức vế trái.

Sử dụng bất đẳng thức C-S ta có

$$P^2=\left[a^3+b^3+c\left(c^2-ab\right)\right]^2=\left[a.a^2+b.b^2+c\left(c^2-ab\right)\right]^2$$
$$\le\left(a^2+b^2+c^2\right)\left[a^4+b^4+\left(c^2-ab\right)^2\right]$$
$$=2\left(a^4+b^4+c^4-2abc^2+a^2b^2\right)$$
$$\le 2\left[a^4+b^4+c^4+a^2b^2+c^2\left(a^2+b^2\right)\right]$$
$$\le 2\left[a^4+b^4+c^4+2\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)\right]$$
$$=2\left(a^2+b^2+c^2\right)^2=8\Rightarrow P\le 2\sqrt{2}$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a=\pm\sqrt{2}, b=c=0$ hoặc các hoán vị.

Bài tập tương tự

Cho x,y,z là các số thực không âm thoả mãn điều kiện $x^2+y^2+z^2=3$.

Chứng minh rằng $x^3+y^3+z^3-xyz\le 3\sqrt{3}$.

Bài 7. Sử dụng bất đẳng thức C – S ta có

$$a\left(2-bc\right)+2\left(b+c\right)\le\sqrt{\left[a^2+\left(b+c\right)^2\right]\left[\left(2-bc\right)^2+2^2\right]}$$
$$=\sqrt{\left(2bc+9\right)\left(b^2c^2-4bc+8\right)}$$

Vậy ta cần chứng minh

$$\left(2bc+9\right)\left(b^2c^2-4bc+8\right)\le 100\Leftrightarrow\left(bc+2\right)^2\left(2bc-7\right)\le 0.$$

Bất đẳng thức cuối đúng nếu ta giả sử $a^2=\max\left\{a^2,b^2,c^2\right\}$.

Thật vậy ta có $2bc\le b^2+c^2=9-a^2\le 9-3=6\Rightarrow 2bc-7\le -1$.

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra chẳng hạn tại $a=-1,b=c=2$.

Bài 9. Không mất tính tổng quả giả sử $x=\max\left\{x,y,z\right\}\Rightarrow x\ge\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Sử dụng bất đẳng thức C –S ta có

$$x\left(1-\frac{9}{4}yz\right)+y+z\le\sqrt{\left(x^2+\left(y+z\right)^2\right)\left[\left(1-\frac{9}{4}yz\right)^2+1\right]}$$
$$=\sqrt{\left(2yz+1\right)\left(\frac{81}{16}y^2z^2-\frac{9}{2}yz+2\right)}$$

Ta cần chứng minh $\left(2yz+1\right)\left(\frac{81}{16}y^2z^2-\frac{9}{2}yz+2\right)\le 2$

$$\Leftrightarrow yz\left(162y^2z^2-63yz-8\right)\le 0$$

Bất đẳng thức luôn đúng vì $yz\le\frac{y^2+z^2}{2}=\frac{1-x^2}{2}\le\frac{1}{3}$.

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$x=y=\frac{1}{\sqrt{2}},z=0$ hoặc các hoán vị.

Bài 10. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\sum_{cyc}\frac{b+c}{a}\sqrt{\left(a+b\right)\left(a+c\right)}\ge 4\left(a+b+c\right).$$

Sử dụng bất đẳng thức C – S ta có

$$\sqrt{\left(a+b\right)\left(a+c\right)}\ge a+\sqrt{bc}$$
$$\sqrt{\left(b+c\right)\left(b+a\right)}\ge b+\sqrt{ca}$$
$$\sqrt{\left(c+a\right)\left(c+b\right)}\ge c+\sqrt{ab}$$

Áp dụng và ta cần chứng minh

$$\frac{b+c}{a}\sqrt{bc}+\frac{c+a}{b}\sqrt{ca}+\frac{a+b}{c}\sqrt{ab}\ge 2\left(a+b+c\right).$$

Không mất tính tổng quát ta giả sử

$$a\ge b\ge c\Rightarrow b+c\le c+a\le a+b;\frac{\sqrt{bc}}{a}\le\frac{\sqrt{ca}}{b}\le\frac{\sqrt{ab}}{c}.$$

Sử dụng bất đẳng thức Chebyshev ta có

$$\frac{b+c}{a}\sqrt{bc}+\frac{c+a}{b}\sqrt{ca}+\frac{a+b}{c}\sqrt{ab}\ge\frac{1}{3}\left(b+c+c+a+a+b\right)\left(\frac{\sqrt{bc}}{a}+\frac{\sqrt{ca}}{b}+\frac{\sqrt{ab}}{c}\right)$$

$$\ge 2\left(a+b+c\right).\sqrt[3]{\frac{\sqrt{bc}}{a}.\frac{\sqrt{ca}}{b}.\frac{\sqrt{ab}}{c}}=2\left(a+b+c\right)$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bài 11. Sử dụng bất đẳng thức C – S ta có

$$\frac{a^2+b^2}{2\left(a^2+b^2\right)+c\left(a+b\right)}=\frac{1}{2+\frac{c\left(a+b\right)}{a^2+b^2}}\ge\frac{1}{2+\frac{c\left(a+b\right)}{\frac{1}{2}\left(a+b\right)^2}}=\frac{a+b}{2\left(a+b+c\right)}.$$

Tương tự ta có $\dfrac{b^2+c^2}{2\left(b^2+c^2\right)+a\left(b+c\right)}\ge\dfrac{b+c}{2\left(a+b+c\right)}$.

$$\frac{c^2+a^2}{2\left(c^2+a^2\right)+b\left(c+a\right)}\ge\frac{c+a}{2\left(a+b+c\right)}$$

Cộng theo vế 3 bất đẳng thức trên ta có điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bài 12. Gọi P là biểu thức vế trái và sử dụng bất đẳng thức C –S ta có

$$P=\sqrt{\frac{2a\left(a+c\right)}{\left(a+b\right)\left(a+c\right)}}+\sqrt{\frac{2b\left(b+a\right)}{\left(b+c\right)\left(b+a\right)}}+\sqrt{\frac{2c\left(c+b\right)}{\left(c+a\right)\left(c+b\right)}}$$

$$\le\sqrt{\left[\sum\left(a+c\right)\right]\left[\sum\frac{2a}{\left(a+b\right)\left(a+c\right)}\right]}$$

$$=\sqrt{\frac{8\left(a+b+c\right)\left(ab+bc+ca\right)}{\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)}}.$$

Ta chỉ cần chứng minh $\dfrac{8\left(a+b+c\right)\left(ab+bc+ca\right)}{\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)}\le 9$

$$\Leftrightarrow (a+b)(b+c)(c+a) \geq \frac{8}{9}(a+b+c)(ab+bc+ca) \Leftrightarrow (a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$$

Bất đẳng thức cuối luôn đúng theo AM – GM.

Bài 13. Sử dụng bất đẳng thức C –S ta có

$$(1+4)\left[b^2+(c+a)^2\right] \geq \left[b+2(c+a)\right]^2 \Rightarrow \sqrt{\frac{a^2}{b^2+(c+a)^2}} \leq \frac{a}{\sqrt{5}(b+2a+2c)}.$$

Tương tự cho 2 căn thức còn lại bài toán đưa về chứng minh

$$\frac{a}{b+2a+2c}+\frac{b}{c+2b+2a}+\frac{c}{a+2b+2c} \leq \frac{3}{5}$$
$$\Leftrightarrow \frac{b+2c}{b+2a+2c}+\frac{c+2a}{c+2b+2a}+\frac{a+2b}{a+2b+2c} \geq \frac{9}{5}.$$

Sử dụng bất đẳng thức C –S ta có

$$\frac{b+2c}{b+2a+2c}+\frac{c+2a}{c+2b+2a}+\frac{a+2b}{a+2b+2c} \geq$$
$$\geq \frac{\left(\sum(b+2c)\right)^2}{\sum(b+2c)(b+2a+2c)} = \frac{9(a+b+c)^2}{5(a+b+c)^2} = \frac{9}{5}.$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bài 14. Dự đoán đẳng thức đạt tại khi 3 số bằng nhau thay vào bất đẳng thức ta có $a=b=c=1$.

Ta sử dụng dụng bất đẳng thức C –S

$$4(a+b+c+1)^2 = 4\left(a.1+\sqrt{3}.\frac{b+c+1}{\sqrt{3}}\right)^2 \leq 4\left(a^2+3\right)\left(1+\frac{(b+c+1)^2}{3}\right).$$

Vậy ta chứng minh $4\left(1+\dfrac{(b+c+1)^2}{3}\right) \leq \left(b^2+3\right)\left(c^2+3\right)$.

$$\Leftrightarrow 3b^2c^2+5b^2+5c^2+11 \geq 8bc+8b+8c$$

Bất đẳng thức cuối là tổng của 3 bất đẳng thức sau

$$3\left(b^2c^2+1\right) \geq 6bc$$
$$b^2+c^2 \geq 2bc \qquad .$$
$$4\left(b^2+c^2+2\right) \geq 4(2b+2c) = 8b+8c$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

<u>**Cách 2:**</u> Xem bài tập mẫu.

Bài 15. Sử dụng bất đẳng thức C –S ta có

$$\left(a+b+1\right)\left(a+b+c^2\right)\ge\left(a+b+c\right)^2\Rightarrow\frac{1}{a+b+1}\le\frac{a+b+c^2}{\left(a+b+c\right)^2}.$$

Tương tự ta có $\dfrac{1}{b+c+1}\le\dfrac{b+c+a^2}{\left(a+b+c\right)^2};\dfrac{1}{c+a+1}\le\dfrac{c+a+b^2}{\left(a+b+c\right)^2}$.

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên và kết hợp với điều kiện ta được:

$$\frac{a^2+b^2+c^2+2\left(a+b+c\right)}{\left(a+b+c\right)^2}\ge 1\Leftrightarrow a+b+c\ge ab+bc+ca.$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài 16. Bất đẳng thức tương đương với:

$$\frac{1}{a^5+b^2+c^2}+\frac{1}{b^5+c^2+a^2}+\frac{1}{c^5+a^2+b^2}\le\frac{3}{a^2+b^2+c^2}.$$

Sử dụng bất đẳng thức C –S ta có

$$\left(a^5+b^2+c^2\right)\left(\frac{1}{a}+b^2+c^2\right)\ge\left(a^2+b^2+c^2\right)^2\Rightarrow\frac{1}{a^5+b^2+c^2}\le\frac{\frac{1}{a}+b^2+c^2}{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}.$$

Tương tự ta có

$$\frac{1}{b^5+c^2+a^2}\le\frac{\frac{1}{b}+c^2+a^2}{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2};\frac{1}{c^5+a^2+b^2}\le\frac{\frac{1}{c}+a^2+b^2}{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}.$$

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên và đưa về chứng minh

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+2\left(a^2+b^2+c^2\right)\le 3\left(a^2+b^2+c^2\right).$$

$$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca$$

Bất đẳng thức cuối đúng vậy ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài 17. Bất đẳng thức tương đương với:

$$\sqrt{2(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)}\ge a+b+c+ab+bc+ca-abc-1.$$

Chú ý $2(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)=\left((a+b)^2+(1-ab)^2\right)\left((1+c)^2+(c-1)^2\right)$.

Sử dụng bất đẳng thức C –S ta có

$$\sqrt{2(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)} = \sqrt{[(a+b)^2+(1-ab)^2][(1+c)^2+(c-1)^2]}$$
$$\geq (a+b)(1+c)+(c-1)(1-ab)$$
$$= a+b+c+ab+bc+ca-abc-1$$

Bất đẳng thức được chứng minh.

Bài 18. Sử dụng bất đẳng thức C –S ta có

$$x^2+y^2+z^2+t^2 = \frac{x^2+y^2}{2}+\frac{y^2+z^2}{2}+\frac{z^2+t^2}{2}+\frac{t^2+x^2}{2}$$
$$\geq \frac{(x-y)^2}{2}+\frac{(y-z)^2}{2}+\frac{(z-t)^2}{2}+\frac{(t-x)^2}{2}$$
$$\geq \frac{(|x-y|+|y-z|+|z-t|+|t-x|)^2}{8} = 2$$

Bất đẳng thức được chứng minh.

Dấu bằng xảy ra chẳng hạn tại $x=z=1, y=t=0$.

Bài 19. Sử dụng bất đẳng thức C –S ta có

$$\sqrt{5a^2+4bc}+2\sqrt{bc} = \sqrt{3}.\sqrt{\frac{5a^2+4bc}{3}}+\sqrt{2}.\sqrt{2bc}$$
$$\leq \sqrt{(3+2)\left(\frac{5a^2+4bc}{3}+2bc\right)} = \sqrt{\frac{5}{3}\left(5a^2+10bc\right)}$$
$$\leq \sqrt{\frac{5}{3}\left(5a^2+5\left(b^2+c^2\right)\right)} = 5\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}$$
$$\Rightarrow \frac{5a^2}{\sqrt{5a^2+4bc}+2\sqrt{bc}} \geq a^2\sqrt{\frac{3}{a^2+b^2+c^2}}$$

Tương tự rồi cộng lại theo vế ta có đpcm.

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bài 20. Ta có $P^2 = 2(a+b+c)+2\sum\sqrt{(a+b)(a+c)}$.

Chú ý sử dụng bất đẳng thức C –S ta có

$$\sum\sqrt{(a+b)(a+c)} \geq \sum\left(a+\sqrt{bc}\right) = a+b+c+\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}.$$

Do đó $P^2 \geq 4(a+b+c)+2\left(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\right) \geq 4 \Rightarrow P \geq 2$.

Dấu bằng đạt tại $a=1, b=c=0$ hoặc các hoán vị.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 2.

Bài 21. Sử dụng bất đẳng thức C – S ta có

$$\sqrt{a+b-c}+\sqrt{b+c-a}\le\sqrt{2\left(a+b-c+b+c-a\right)}=2\sqrt{b}$$
$$\sqrt{b+c-a}+\sqrt{c+a-b}\le\sqrt{2\left(b+c-a+c+a-b\right)}=2\sqrt{c}$$
$$\sqrt{c+a-b}+\sqrt{a+b-c}\le\sqrt{2\left(c+a-b+a+b-c\right)}\le2\sqrt{a}$$

Cộng theo vế 3 bất đẳng thức trên ta có điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bài 22. Không mất tính tổng quát giả sử $a=\max\left\{a,b,c\right\}\Rightarrow a\ge\sqrt{\frac{8}{3}}$.

Sử dụng bất đẳng thức C –S ta có

$$a\left(4-bc\right)+4\left(b+c\right)\le\sqrt{\left(a^2+\left(b+c\right)^2\right)\left(\left(4-bc\right)^2+4^2\right)}$$
$$=\sqrt{\left(8+2bc\right)\left(b^2c^2-8bc+32\right)}$$

Ta chứng minh $\left(8+2bc\right)\left(b^2c^2-8bc+32\right)\le16^2\Leftrightarrow2\left(bc-4\right)b^2c^2\le0$.

Bất đẳng thức luôn đúng vì $bc\le\frac{b^2+c^2}{2}=\frac{8-a^2}{2}\le\frac{8-\frac{8}{3}}{2}=\frac{8}{3}<4$.

Bất đẳng thức được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=2,c=0$ hoặc các hoán vị.

Bài 23. Ta có $xy+yz+zx\le x^2+y^2+z^2=1$.

Khi đó $P=\left(x+y+z\right)\left(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\right)$

$$=\left(x+y+z\right)\left(1-xy-yz-zx\right)$$
$$\Rightarrow P^2=\left(1+2\left(xy+yz+zx\right)\right)\left(1-xy-yz-zx\right)^2$$
$$=2\left(xy+yz+zx\right)^3-3\left(xy+yz+zx\right)^2+1$$
$$=\left(xy+yz+zx\right)^2\left(2\left(xy+yz+zx\right)-3\right)+1\le1$$

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng 1 đạt tại $x=1,y=z=0$ hoặc các hoán vị.

Giá trị nhỏ nhất của P bằng -1 đạt tại $x=-1,y=z=0$ hoặc các hoán vị.

Bài 24. Đặt $a=y+z,\ b=z+x,\ c=x+y,\ x,\ y,\ z>0$ bất đẳng thức trở thành

$$x^3z+y^3x+z^3y\ge xyz\left(x+y+z\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}\ge x+y+z$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}\right)\left(y+z+x\right)\ge \left(x+y+z\right)^2.$$

Luôn đúng theo C – S.

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bài 25. Sử dụng bất đẳng thức C –S ta có

$$\left[1+z\left(x+y\right)\right]\left(1+\frac{x+y}{z}\right)\ge \left(1+x+y\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{1+yz+zx}{\left(1+x+y\right)^2}\le \frac{1}{1+\frac{x+y}{z}}=\frac{z}{x+y+z}$$

Tương tự cho hai biểu thức còn lại rồi cộng lại theo vế ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$.

Bài 26. Theo giả thiết kết hợp sử dụng bất đẳng thức AM – GM ta có

$$\left(a+b-c\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-c\right)=\left(a+b\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+1-\left[c\left(a+b\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\right]$$

$$\le \left(a+b\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+1-2\sqrt{\left(a+b\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)}$$

$$=\left[\sqrt{\left(a+b\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)}-1\right]^2.$$

Suy ra $\sqrt{\left(a+b\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)}-1\ge 2\Leftrightarrow \sqrt{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2}\ge 3\Leftrightarrow \frac{a}{b}+\frac{b}{a}\ge 7$.

Khi đó sử dụng bất đẳng thức C –S ta có

$$\left(a^4+b^4+c^4\right)\left(\frac{1}{a^4}+\frac{1}{b^4}+\frac{1}{c^4}\right)\ge \left[\sqrt{\left(a^4+b^4\right)\left(\frac{1}{a^4}+\frac{1}{b^4}\right)}+1\right]^2$$

$$=\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}+1\right)^2=\left[\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)^2-1\right]^2\ge \left(7^2-1\right)^2=2304$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $ab=c^2$ và $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=7$.

CHỦ ĐỀ 5: KỸ THUẬT SỬ DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC CAUCHY – SCHWARZ DẠNG PHÂN THỨC

A. NỘI DUNG PHƯƠNG PHÁP

B. BÀI TẬP MẪU

Để mở đầu ta xét bài toán quen thuộc sau đây

Bài 1. Chứng minh rằng với mọi số thực dương a,b,c ta có

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ge\frac{3}{2}.$$

Lời giải

Đây là bất đẳng thức Nebits nổi tiếng có rất nhiều lời giải dành cho nó. Dưới đây tôi đề cập 2 phương pháp tiếp cận cũng chính là kỹ thuật chính chúng ta cần áp dụng trong chủ đề này.

<u>Cách 1:</u> Cộng thêm vào mỗi hạng tử vế trái với 1 ta được

$$\begin{aligned}\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}&=\left(\frac{a}{b+c}+1\right)+\left(\frac{b}{c+a}+1\right)+\left(\frac{c}{a+b}+1\right)-3\\&=(a+b+c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{c+a}\right)-3\\&=\frac{1}{2}\left[(a+b)+(b+c)+(c+a)\right]\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)-3\\&\ge\frac{1}{2}\left[\sqrt{a+b}.\frac{1}{\sqrt{a+b}}+\sqrt{b+c}.\frac{1}{\sqrt{b+c}}+\sqrt{c+a}.\frac{1}{\sqrt{c+a}}\right]^2-3=\frac{3}{2}\end{aligned}$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

<u>Cách 2:</u> Nhân thêm vào mỗi hạng tử vế trái tương ứng với a,b,c để xuất đại lượng bình phương ta được:

$$\begin{aligned}\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}&=\frac{a^2}{a(b+c)}+\frac{b^2}{b(c+a)}+\frac{c^2}{c(c+a)}\\&\ge\frac{(a+b+c)^2}{a(b+c)+b(c+a)+c(c+a)}=\frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)}.\\&\ge\frac{3(ab+bc+ca)}{2(ab+bc+ca)}=\frac{3}{2}\end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a}{a(b+c)}=\frac{b}{b(c+a)}=\frac{c}{c(c+a)}\Leftrightarrow a=b=c$.

Nhận xét. Như vậy 2 kỹ thuật ta cần áp dụng đó là:

+ Cộng thêm vào mỗi phân thức 1 hệ số thích hợp để tất cả các phân thức có dung tử thức.
+ Nhân thêm vào mỗi phân thức một biến thích hợp nhằm tạo bình phương trình trên tử thức ở mỗi phân thức.
+ Khi có thêm điều kiện ràng buộc giữa các biến ta cần khéo léo vận dụng C –S đưa về biến chung.

Bài 2. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện $\frac{a}{b+c} \geq \frac{3}{2}$.

Chứng minh rằng $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq 2$.

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức C –S ta có

$$\frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{(b+c)^2}{b(c+a)+c(a+b)} = \frac{(b+c)^2}{a(b+c)+2bc}$$

$$\geq \frac{(b+c)^2}{a(b+c)+\frac{1}{2}(b+c)^2} = \frac{1}{\frac{a}{b+c}+\frac{1}{2}}$$

Gọi P là biểu thức vế trái ta có

$$P \geq \frac{a}{b+c} + \frac{1}{\frac{a}{b+c}+\frac{1}{2}} = \frac{x(2x-3)}{2x+1} + 2 \geq 2, \left(x = \frac{a}{b+c}\right).$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = 3b = 3c$.

Bài 3. Cho x,y,z là các số thực thoả mãn điều kiện $x+y+z=0$.

Chứng minh rằng $\frac{x(x+2)}{2x^2+1} + \frac{y(y+2)}{2y^2+1} + \frac{z(z+2)}{2z^2+1} \geq 0$.

Lời giải

Giả sử $|z| = \max\{|x|,|y|,|z|\}$ ta có bất đẳng thức đã cho tương đương với:

$$\frac{x(x+2)}{2x^2+1} + \frac{1}{2} + \frac{y(y+2)}{2y^2+1} + \frac{1}{2} + \frac{z(z+2)}{2z^2+1} - 1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(2x+1)^2}{2x^2+1} + \frac{(2y+1)^2}{2y^2+1} \geq \frac{2(z-1)^2}{2z^2+1}$$

Sử dụng bất đẳng thức C –S cho vế trái ta có

$$\frac{(2x+1)^2}{2x^2+1} + \frac{(2y+1)^2}{2y^2+1} \geq \frac{(2x+2y+2)^2}{2x^2+2y^2+2} = \frac{2(z-1)^2}{x^2+y^2+1}.$$

Vậy ta chỉ cần chứng minh $\frac{2(z-1)^2}{x^2+y^2+1} \geq \frac{2(z-1)^2}{2z^2+1} \Leftrightarrow 2z^2 \geq x^2+y^2$

Bất đẳng thức cuối đúng ta có đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=-\frac{1}{2}, z=1$ hoặc các hoán vị.

Bài 4. Cho các số thực $x, y, z \geq 1$ và thỏa mãn $3(x+y+z)=x^2+y^2+z^2+2xy$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{x^2}{(x+y)^2+x}+\frac{x}{z^2+x}$.

Lời giải

Ta có $x^2 \geq x$ suy ra: $P \geq x\left(\frac{1}{(x+y)^2+x}+\frac{1}{z^2+x}\right) \geq \frac{4x}{(x+y)^2+z^2+2x}$.

Theo giả thiết ta có:

$(x+y)^2+z^2=3\left[(x+y)+z\right] \leq 3\sqrt{2\left[(x+y)^2+z^2\right]} \Rightarrow (x+y)^2+z^2 \leq 18$.

Suy ra $P \geq \frac{4x}{18+2x}=\frac{2(2x+18)-36}{2x+18}=2-\frac{18}{x+9} \geq 2-\frac{18}{1+9}=\frac{1}{5}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\frac{1}{5}$ đạt tại $x=1, y=2, z=3$.

Bài 5. Cho *a,b,c* là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a^2+b^2+c^2=3$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{a^2}{b+2c}+\frac{b^2}{c+2a}+\frac{c^2}{a+2b}$.

Lời giải

Phân tích tìm lời giải:

Mỗi phân thức có dạng bình phương trên tử thức tuy nhiên ta cần sử dụng triệt để điều kiện giả thiết $a^2+b^2+c^2=3$.

Ta xử lý như sau:

$$P=\frac{a^4}{a^2(b+2c)}+\frac{b^4}{b^2(c+2a)}+\frac{c^4}{c^2(a+2b)}$$

$$\geq \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{a^2b+b^2c+c^2a+2(a^2c+b^2a+c^2b)}$$

$$=\frac{9}{a^2b+b^2c+c^2a+2(a^2c+b^2a+c^2b)}$$

Theo giả thiết ta có:

$$3(a+b+c)=(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2\right)$$
$$=a^3+b^3+c^3+a^2b+b^2c+c^2a+a^2c+b^2a+c^2b$$

Sử dụng bất đẳng thức AM – GM cho 3 số dương ta được

$$a^3+a^3+c^3\geq 3a^2c$$
$$b^3+b^3+a^3\geq 3b^2a$$
$$c^3+c^3+b^3\geq 3c^2b$$

Cộng theo vế 3 bất đẳng thức trên ta được

$$a^3+b^3+c^3\geq a^2c+b^2a+c^2b.$$

Suy ra $3(a+b+c)\geq a^2b+b^2c+c^2a+2\left(a^2c+b^2a+c^2b\right).$

Mặt khác $a+b+c\leq\sqrt{3\left(a^2+b^2+c^2\right)}=3.$

Suy ra $P\geq\dfrac{9}{3(a+b+c)}\geq 1.$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1.$

Bài 6. Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{2a^2+bc}+\frac{b^2}{2b^2+ca}+\frac{c^2}{2c^2+ab}\leq 1.$$

Lời giải

Viết lại bất đẳng thức dưới dạng

$$\frac{bc}{2\left(2a^2+bc\right)}+\frac{ca}{2\left(2b^2+ca\right)}+\frac{ab}{2\left(2c^2+ab\right)}\geq\frac{1}{2}.$$

Gọi P là biểu thức vế trái ta có

$$P=\frac{b^2c^2}{2\left(2a^2+bc\right)bc}+\frac{c^2a^2}{2\left(2b^2+ca\right)ca}+\frac{a^2b^2}{2\left(2c^2+ab\right)ab}$$
$$\geq\frac{(ab+bc+ca)^2}{2\left(2a^2+bc\right)bc+2\left(2b^2+ca\right)ca+2\left(2c^2+ab\right)ab}$$
$$=\frac{(ab+bc+ca)^2}{2(ab+bc+ca)^2}=\frac{1}{2}$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c.$

Bài 7. Cho *x*,*y*,*z* là các số thực dương thoả mãn điều kiện $x+y+z=1.$

Chứng minh rằng $\dfrac{x}{x+\sqrt{x+yz}}+\dfrac{y}{y+\sqrt{y+zx}}+\dfrac{z}{z+\sqrt{z+xy}}\le 1.$

Lời giải

Theo giả thiết ta có $x+yz=x(x+y+z)+yz=(x+y)(x+z).$

Sử dụng bất đẳng thức C-S ta có

$$x+\sqrt{x+yz}=x+\sqrt{(x+y)(x+z)}\ge x+x+\sqrt{yz}=2x+\sqrt{yz}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{x+\sqrt{x+yz}}\le \frac{x}{2x+\sqrt{yz}}$$

Tương tự ta có

$$\frac{y}{y+\sqrt{y+zx}}\le \frac{y}{2y+\sqrt{zx}}$$

$$\frac{z}{z+\sqrt{z+xy}}\le \frac{z}{2z+\sqrt{xy}}$$

Cộng theo vế 3 bất đẳng thức trên đưa về chứng minh

$$\frac{x}{2x+\sqrt{yz}}+\frac{y}{2y+\sqrt{zx}}+\frac{z}{2z+\sqrt{xy}}\le 1.$$

Đặt $x=a^2,y=b^2,z=c^2$đưa về bất đẳng thức

$$\frac{a^2}{2a^2+bc}+\frac{b^2}{2b^2+ca}+\frac{c^2}{2c^2+ab}\le 1.$$

Bất đẳng thức này đã được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=\dfrac{1}{3}.$

<u>Cách 2:</u> Sử dụng bất đẳng thức C-S ta có

$$x+\sqrt{x+yz}=x+\sqrt{x(x+y+z)+yz}$$

$$=x+\sqrt{(x+y)(x+z)}\ge x+\sqrt{xz}+\sqrt{xy}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{x+\sqrt{x+yz}}\le \frac{x}{x+\sqrt{xy}+\sqrt{xz}}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}$$

Tương tự ta có

$$\frac{y}{y+\sqrt{y+zx}}\le \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}$$

$$\frac{z}{z+\sqrt{z+xy}}\le \frac{\sqrt{z}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}$$

Cộng theo vế 3 bất đẳng thức trên ta có điều phải chứng minh.

Nhận xét. Như vậy linh hoạt sử dụng điều kiện cũng như sử dụng C-S hợp lý ta có lời giải ngắn gọn cho bài toán như cách 2.

Bài 8. Cho x,y,z là các số thực dương có tổng bằng 1.

Chứng minh rằng $\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}\ge 3\left(x^2+y^2+z^2\right)$.

Lời giải

Bất đẳng thức có dạng mạnh hơn tôi đã đề cập trong chương 1 bất đẳng thức AM – GM

$$\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}\ge \frac{\left(x+y+z\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)}{xy+yz+zx}\ge 3\left(x^2+y^2+z^2\right).$$

Dưới đây ta chứng minh bằng C –S cho bài toán trên.

Ta có $\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}=\frac{x^4}{x^2y}+\frac{y^4}{y^2z}+\frac{z^4}{z^2x}\ge \frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}{x^2y+y^2z+z^2x}$.

Chú ý

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2 &= \left(x+y+z\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)\\ &= x^3+y^3+z^3+xy\left(x+y\right)+yz\left(y+z\right)+zx\left(z+x\right)\\ &= x\left(x-y\right)^2+y\left(y-z\right)^2+z\left(z-x\right)^2+3\left(x^2y+y^2z+z^2x\right)\\ &\ge 3\left(x^2y+y^2z+z^2x\right)\end{aligned}$$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=\frac{1}{3}$.

Bài 9. Cho x,y,z là các số thực dương thoả mãn điều kiện $x^2+y^2+z^2=3$.

Chứng minh rằng $\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\ge \frac{9}{x+y+z}$.

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức C – S ta có

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}=\frac{x^2}{xy}+\frac{y^2}{yz}+\frac{z^2}{zx}\ge \frac{\left(x+y+z\right)^2}{xy+yz+zx}.$$

Vậy ta chứng minh $\left(x+y+z\right)^3\ge 9\left(xy+yz+zx\right)$.

Đặt $t=a+b+c,\left(\sqrt{3}\le t\le 3\right)\Rightarrow xy+yz+zx=\frac{t^2-3}{2}$.

Bất đẳng thức trở thành $t^3 \ge \frac{9\left(t^2-3\right)}{2} \Leftrightarrow \left(t-3\right)^2\left(2t+3\right) \ge 0$(luôn đúng).

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$.

Bài 10. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện $a+b+c=1$.

Chứng minh rằng $2\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\right) \ge \frac{1+a}{1-a}+\frac{1+b}{1-b}+\frac{1+c}{1-c}$

Lời giải

Theo giả thiết ta có $\frac{1+a}{1-a}=\frac{2a+b+c}{b+c}=\frac{2a}{b+c}+1$.

Suy ra $\frac{2a}{c}-\frac{1+a}{1-a}=\frac{2a}{c}-\frac{2a}{b+c}-1=\frac{2ab}{c\left(b+c\right)}-1$.

Tương tự ta có

$$\frac{2b}{a}-\frac{1+b}{1-b}=\frac{2bc}{a\left(a+c\right)}$$

$$\frac{2c}{b}-\frac{1+c}{1-c}=\frac{2ca}{b\left(a+b\right)}$$

Cộng theo vế 3 bất đẳng thức trên ta cần chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{ab}{c\left(b+c\right)}+\frac{bc}{a\left(a+c\right)}+\frac{ca}{b\left(b+a\right)} \ge \frac{3}{2}.$$

Gọi P là biểu thức vế trái viết lại P và sử dụng bất đẳng thức C – S dạng phân thức ta có

$$P=\frac{a^2b^2}{abc\left(b+c\right)}+\frac{b^2c^2}{abc\left(a+c\right)}+\frac{c^2a^2}{abc\left(b+a\right)}$$

$$\ge \frac{\left(ab+bc+ca\right)^2}{abc\left(b+c\right)+abc\left(c+a\right)+abc\left(a+b\right)}$$

$$=\frac{\left(ab+bc+ca\right)^2}{2abc\left(a+b+c\right)} \ge \frac{3abc\left(a+b+c\right)}{2abc\left(a+b+c\right)}=\frac{3}{2}$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bài 11. Cho a,b,c là các số thực dương có tích bằng 1 chứng minh

$$\frac{1}{a^2+a+1}+\frac{1}{b^2+b+1}+\frac{1}{c^2+c+1} \ge 1.$$

Lời giải

Theo giả thiết tồn tại các số dương x, y, z thoả mãn $a=\frac{xy}{z^2},b=\frac{yz}{x^2},c=\frac{zx}{y^2}$.

Bất đẳng thức trở thành

$$\frac{x^4}{x^4+x^2yz+y^2z^2}+\frac{y^4}{y^4+y^2zx+z^2x^2}+\frac{z^4}{z^4+z^2xy+x^2y^2}\ge 1.$$

Sử dụng bất đẳng thức C –S ta có

$$\frac{x^4}{x^4+x^2yz+y^2z^2}+\frac{y^4}{y^4+y^2zx+z^2x^2}+\frac{z^4}{z^4+z^2xy+x^2y^2}$$

$$\ge \frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}{x^4+y^4+z^4+xyz\left(x+y+z\right)+x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2}$$

Vậy ta chỉ cần chứng minh

$$\left(x^2+y^2+z^2\right)^2\ge x^4+y^4+z^4+xyz\left(x+y+z\right)+x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2$$

$$\Leftrightarrow x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2\ge xyz\left(x+y+z\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(xy-yz\right)^2+\frac{1}{2}\left(yz-zx\right)^2+\frac{1}{2}\left(zx-xy\right)^2\ge 0$$

Bất đẳng thức đúng ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài 12. Cho a,b,c là các số thực dương có tổng bằng 3 chứng minh

$$\sqrt{\frac{a^3}{a^2+8b^2}}+\sqrt{\frac{b^3}{b^2+8c^2}}+\sqrt{\frac{c^3}{c^2+8a^2}}\ge\frac{1}{3}.$$

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức AM – GM ta có

$$\sqrt{\frac{a^3}{a^2+8b^2}}=\frac{3a^2}{\sqrt{9a\left(a^2+8b^2\right)}}\ge\frac{6a^2}{a^2+8b^2+9a}.$$

Tương tự ta có

$$\sqrt{\frac{b^3}{b^2+8c^2}}\ge\frac{6b^2}{b^2+8c^2+8b};\sqrt{\frac{c^3}{c^2+8a^2}}\ge\frac{6c^2}{c^2+8a^2+9c}.$$

Ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{a^2}{a^2+8b^2+9a}+\frac{b^2}{b^2+8c^2+9b}+\frac{c^2}{c^2+8a^2+9c}\ge\frac{1}{6}.$$

Sử dụng bất đẳng thức C –S cho vế trái ta được $VT\ge\dfrac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{\sum a^2\left(a^2+8b^2+9a\right)}$.

Vậy ta chứng minh

$$6\left(a^2+b^2+c^2\right)^2 \ge \sum a^2\left(a^2+8b^2+9a\right)$$

$$\Leftrightarrow 6\left(a^2+b^2+c^2\right)^2 \ge 3\sum a^3\left(b+c\right)+4\left(a^2+b^2+c^2\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \sum\left(a-b\right)^2\left(a^2-ab+b^2\right)\ge 0$$

Bất đẳng thức cuối đúng. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài 13. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện $abc=1$.

Chứng minh rằng $\dfrac{a}{\sqrt{b^2+3}}+\dfrac{b}{\sqrt{c^2+3}}+\dfrac{c}{\sqrt{a^2+3}}\ge\dfrac{3}{2}$.

Lời giải

Do a,b,c dương và $abc=1$nên tồn tại các số dương thoả mãn

$a=\sqrt{\dfrac{y}{x}},b=\sqrt{\dfrac{z}{y}},c=\sqrt{\dfrac{x}{z}}$.

Bất đẳng thức được viết lại dưới dạng

$$\frac{x}{\sqrt{z\left(3x+y\right)}}+\frac{y}{\sqrt{x\left(3y+z\right)}}+\frac{z}{\sqrt{y\left(3z+x\right)}}\ge\frac{3}{2}.$$

Gọi P là biểu thức vế trái của bất đẳng thức trên viết lại P và sử dụng bất đẳng thức C – S ta có

$$P=\frac{x^2}{x\sqrt{z\left(3x+y\right)}}+\frac{y^2}{y\sqrt{x\left(3y+z\right)}}+\frac{z^2}{z\sqrt{y\left(3z+x\right)}}$$

$$\ge\frac{\left(x+y+z\right)^2}{x\sqrt{z\left(3x+y\right)}+y\sqrt{x\left(3y+z\right)}+z\sqrt{y\left(3z+x\right)}}$$

Đặt $Q=x\sqrt{z\left(3x+y\right)}+y\sqrt{x\left(3y+z\right)}+z\sqrt{y\left(3z+x\right)}$.

Sử dụng bất đẳng thức C – S ta có

$$Q=\sqrt{x}\sqrt{xz\left(3x+y\right)}+\sqrt{y}\sqrt{xy\left(3y+z\right)}+\sqrt{z}\sqrt{yz\left(3z+x\right)}$$

$$\le\sqrt{\left(x+y+z\right)\left(xz\left(3x+y\right)+xy\left(3y+z\right)+yz\left(3z+x\right)\right)}$$

$$=\sqrt{3\left(x+y+z\right)\left(x^2z+y^2x+z^2y+xyz\right)}$$

Mặt khác sử dụng bất đẳng thức quen thuộc ta có

$$x^2z+y^2x+z^2y+xyz\le\frac{4}{27}\left(x+y+z\right)^3.$$

Do đó $Q\le\dfrac{2}{3}\left(x+y+z\right)^2\Rightarrow P\ge\dfrac{\left(x+y+z\right)^2}{\dfrac{2}{3}\left(x+y+z\right)^2}=\dfrac{3}{2}$.

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài 14. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện $a+b+c+abc=4$.

Chứng minh rằng $\dfrac{a}{\sqrt{b+c}}+\dfrac{b}{\sqrt{c+a}}+\dfrac{c}{\sqrt{a+b}}\ge\dfrac{\sqrt{2}}{2}(a+b+c)$.

Lời giải

Gọi P là biểu thức vế trái viết lại P và sử dụng bất đẳng thức C – S ta có

$$\begin{aligned}P&=\frac{a^2}{a\sqrt{b+c}}+\frac{b^2}{b\sqrt{c+a}}+\frac{c^2}{c\sqrt{a+b}}\\&\ge\frac{(a+b+c)^2}{a\sqrt{b+c}+b\sqrt{c+a}+c\sqrt{a+b}}\\&\ge\frac{(a+b+c)^2}{\sqrt{(a+b+c)\left(a(b+c)+b(c+a)+c(a+b)\right)}}\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}(a+b+c)\sqrt{\frac{a+b+c}{ab+bc+ca}}\end{aligned}$$

Vậy ta cần chứng minh $a+b+c\ge ab+bc+ca$.

Thật vậy giả sử ngược lại $ab+bc+ca>a+b+c$.

Sử dụng bất đẳng thức Schur bậc 3

$$a^3+b^3+c^3+3abc\ge ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)$$

Ta có

$$\begin{aligned}&\frac{9abc}{a+b+c}\ge4(ab+bc+ca)-(a+b+c)^2\\&\Leftrightarrow\frac{9abc}{a+b+c}>4(a+b+c)-(a+b+c)^2\\&\Leftrightarrow\frac{9abc}{a+b+c}>abc(a+b+c)\Leftrightarrow a+b+c<3\\&\Rightarrow abc<1\Rightarrow a+b+c+abc<4\end{aligned}$$

Vô lý. Vậy $a+b+c\ge ab+bc+ca$.

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài 15. Cho a,b,c là các số thực không âm thoả mãn điều kiện $ab+bc+ca>0$.

Chứng minh rằng $\dfrac{a}{b^2+c^2}+\dfrac{b}{c^2+a^2}+\dfrac{c}{a^2+b^2}\ge\dfrac{8}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2}$.

Lời giải

Gọi P là biểu thức vế trái sử dụng bất đẳng thức C- S ta có

$$P=\frac{a^3}{a^2\left(b^2+c^2\right)}+\frac{b^3}{b^2\left(c^2+a^2\right)}+\frac{c^3}{c^2\left(a^2+b^2\right)}$$

$$\ge\frac{\left(\sqrt{a^3}+\sqrt{b^3}+\sqrt{c^3}\right)^2}{2\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)}$$

Vậy ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{\left(\sqrt{a^3}+\sqrt{b^3}+\sqrt{c^3}\right)^2}{2\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)}\ge\frac{8}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{a^3}+\sqrt{b^3}+\sqrt{c^3}\right)^2\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2\ge16\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)$$

Sử dụng bất đẳng thức C – S ta có

$$\left(\sqrt{a^3}+\sqrt{b^3}+\sqrt{c^3}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)\ge\left(a+b+c\right)^2.$$

Vậy ta chỉ cần chứng minh

$$\left(a+b+c\right)^4\ge16\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)$$

$$\Leftrightarrow\frac{a^2b^2}{\left(a+b+c\right)^4}+\frac{b^2c^2}{\left(a+b+c\right)^4}+\frac{c^2a^2}{\left(a+b+c\right)^4}\le\frac{1}{16}$$

Đặt $x=\frac{a}{a+b+c},y=\frac{b}{a+b+c},z=\frac{c}{a+b+c}\Rightarrow x+y+z=1$

Ta cần chứng minh $x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2\le\frac{1}{16}$.

Không mất tính tổng quát giả sử $x=\min\left\{x,y,z\right\}\Rightarrow x\le\frac{1}{3}$ ta có

$$x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2=x^2\left(y^2+z^2\right)+y^2z^2\le x^2\left(y+z\right)^2+\left(\frac{y+z}{2}\right)^4$$

$$=x^2\left(1-x\right)^2+\left(\frac{1-x}{2}\right)^4\le\frac{1}{16}$$

Chú ý khảo sát hàm số $f(x)=x^2\left(1-x\right)^2+\left(\frac{1-x}{2}\right)^4$ trên đoạn $\left[0;\frac{1}{3}\right]$ ta có điều phải chứng minh.

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b,c=0$ hoặc các hoán vị.

Bài 16. Cho a,b,c là các số thực không âm thoả mãn điều kiện $a+b+c=1$.

Chứng minh rằng

$$\frac{a}{1+9bc+4(b-c)^2}+\frac{b}{1+9ca+4(c-a)^2}+\frac{c}{1+9ab+4(a-b)^2}\geq\frac{1}{2}.$$

Lời giải

Gọi P là biểu thức vế trái và sử dụng bất đẳng thức C –S ta có:

$$P=\frac{a^2}{a+9abc+4a(b-c)^2}+\frac{b^2}{b+9abc+4b(c-a)^2}+\frac{c^2}{c+9abc+4c(a-b)^2}$$

$$\geq\frac{(a+b+c)^2}{a+b+c+27abc+4a\left(b-c\right)^2+4b\left(c-a\right)^2+4c\left(a-b\right)^2}$$

$$=\frac{1}{1+3abc+4(a^2b+b^2c+c^2a+ab^2+bc^2+ca^2)}$$

Vậy ta chỉ cần chứng minh

$$2\geq1+3abc+4\left(a^2b+b^2c+c^2a+ab^2+bc^2+ca^2\right)$$

$$\Rightarrow(a+b+c)^3\geq3abc+ab\left(a+b\right)+bc\left(c+a\right)+ca\left(c+a\right)$$

Bất đẳng thức cuối chính là bất đẳng thức Schur bậc 3.

Bài toán được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{3}$ hoặc $a=b=\frac{1}{2},c=0$ và các hoán vị.

C. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1. Cho *x,y* là hai số thực dương thỏa mãn điều kiện $x+y=1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{x}{\sqrt{y^2+1}}+\frac{y}{\sqrt{x^2+1}}$.

Bài 2. Cho *x,y* là hai số thực dương thay đổi thỏa mãn điều kiện $2x+3y=5$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{\sqrt{\left(1+x^2\right)\left(1+y^2\right)}-1}{2y}+\frac{\sqrt{\left(1+x^3\right)\left(1+y^3\right)}-1}{3x^2}.$$

Bài 3. Cho $x,y,z>1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=x^2\left(\frac{1}{y-1}+\frac{1}{z-1}\right)+y^2\left(\frac{1}{z-1}+\frac{1}{x-1}\right)+z^2\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{y-1}\right).$$

Bài 4. Cho *x*, *y*, *z* là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{x}{3x+7(y+z)}+\frac{y}{3y+7(z+x)}+\frac{z}{3z+7(x+y)}\geq\frac{3}{17}.$$

Bài 5. (TSĐH Khối A 2007) Cho x, y, z là các số thực dương thoả mãn điều kiện $xyz=1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{x^2(y+z)}{y\sqrt{y}+2z\sqrt{z}}+\frac{y^2(z+x)}{z\sqrt{z}+2x\sqrt{x}}+\frac{z^2(x+y)}{x\sqrt{x}+2y\sqrt{y}}.$$

Bài 6. Chứng minh rằng với mọi a,b,c là các số thực dương ta có

$$\frac{a(b+c)}{\sqrt{bc(b^2+c^2)}}+\frac{b(c+a)}{\sqrt{ca(c^2+a^2)}}+\frac{c(a+b)}{\sqrt{ab(a^2+b^2)}}\geq 3\sqrt{2}.$$

Bài 7. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện $a+b+c=1$.

Chứng minh rằng $\frac{a^2}{3a+1}+\frac{b^2}{3b+1}+\frac{c^2}{3c+1}\leq\frac{1}{18(ab+bc+ca)}$.

Bài 8. Cho x,y,z là các số thực dương thoả mãn điều kiện $x+y+z=1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{x^2(y+z)}{yz}+\frac{y^2(z+x)}{zx}+\frac{z^2(x+y)}{xy}.$$

Bài 9. Cho x,y,z là các số thực dương thoả mãn điều kiện $xyz=1$.

Chứng minh rằng

$$\frac{x^4y}{x^2+1}+\frac{y^4z}{y^2+1}+\frac{z^4x}{z^2+1}\geq\frac{3}{2}.$$

Bài 10. Cho *x*,*y*,*z* là các số thực dương thoả mãn điều kiện $x+y+z=3$.

Chứng minh rằng

$$\frac{x^4}{(y+z)(y^2+z^2)}+\frac{y^4}{(z+x)(z^2+x^2)}+\frac{z^4}{(x+y)(x^2+y^2)}\geq\frac{3}{4}.$$

Bài 11. Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{3a+b+c}+\frac{b}{3b+c+a}+\frac{c}{3c+a+b}\leq\frac{3}{5}.$$

Bài 12. Cho a,b,c là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{a}{b+c}+\frac{4b}{a+c}+\frac{9c}{a+b}.$$

Bài 13. Cho a,b,c là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{a+3c}{a+b}+\frac{c+3a}{b+c}+\frac{4b}{c+a}.$$

Bài 14. Cho a,b,c là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{3(b+c)}{2a}+\frac{4a+3c}{3b}+\frac{12(b-c)}{2a+3c}.$$

Bài 15. Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{b+c}{a}+\frac{2a+c}{b}+\frac{4(a+b)}{a+c}\ge 9.$$

Bài 16. Cho a,b,c là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{3a}{b+c}+\frac{4b}{c+a}+\frac{5c}{a+b}.$$

Bài 17. Cho a,b,c là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{9b+16c}{a}+\frac{25(4a+16c)}{b}+\frac{64(4a+9b)}{c}.$$

Bài 18. Cho a,b,c,x,y,z là các số thực dương.

Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b+c}(y+z)+\frac{b}{c+a}(z+x)+\frac{c}{a+b}(x+y)\ge\frac{3(xy+yz+zx)}{x+y+z}$$

Bài 19. Cho x,y,z là các số thực dương và k số thực, $k\ge 8$.

Chứng minh rằng $\frac{x}{\sqrt{x^2+kyz}}+\frac{y}{\sqrt{y^2+kzx}}+\frac{z}{\sqrt{z^2+kxy}}\ge\frac{3}{\sqrt{k+1}}.$

Bài 20. Chứng minh với a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện $abc=1$ta có

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\ge\frac{3}{2}.$$

Bài 21. Chứng minh với mọi a,b,c là các số thực dương ta có

$$\frac{1}{a\sqrt{3a+2b}}+\frac{1}{b\sqrt{3b+2c}}+\frac{1}{c\sqrt{3c+2a}}\ge\frac{3}{\sqrt{5abc}}.$$

Bài 22. Cho a,b,c là các số thực dương có tổng bằng 3.

Chứng minh rằng $\sqrt{\frac{a^3}{a^2+5b^2}}+\sqrt{\frac{b^3}{b^2+5c^2}}+\sqrt{\frac{c^3}{c^2+5a^2}}\ge\sqrt{\frac{3}{2}}.$

Bài 23. Chứng minh với mọi a,b,c dương ta có

$$\frac{a^3}{\sqrt{b^2-bc+c^2}}+\frac{b^3}{\sqrt{c^2-ca+a^2}}+\frac{c^3}{\sqrt{a^2-ab+b^2}}\ge a^2+b^2+c^2.$$

Bài 24. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\ge a^2b^2c^2.$$

Chứng minh rằng $\dfrac{a^2b^2}{c^3\left(a^2+b^2\right)}+\dfrac{b^2c^2}{a^3\left(b^2+c^2\right)}+\dfrac{c^2a^2}{b^3\left(c^2+a^2\right)}\ge\dfrac{\sqrt{3}}{2}.$

Bài 25. Cho a,b,c là các số thực dương có tích bằng 1.

Chứng minh rằng $\sqrt{\dfrac{a^4+b^4}{1+ab}}+\sqrt{\dfrac{b^4+c^4}{1+bc}}+\sqrt{\dfrac{c^4+a^4}{1+ca}}\ge 3.$

Bài 26. Cho a,b,c là độ dài 3 cạnh một tam giác. Chứng minh

$$\frac{3a+b}{2a+c}+\frac{3b+c}{2b+a}+\frac{3c+a}{2c+b}\ge 4.$$

Bài 27. Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $ab+bc+ca=1$.

Chứng minh rằng $\dfrac{1}{a\sqrt{b^2+c^2}}+\dfrac{1}{b\sqrt{c^2+a^2}}+\dfrac{1}{c\sqrt{a^2+b^2}}\ge\dfrac{9}{2\sqrt{2}-3\sqrt{6}abc}.$

Bài 28. Cho a,b,c là các số thực không âm thoả mãn điều kiện

$$ab+bc+ca=a+b+c>0.$$

Chứng minh rằng $(a+b+c)\left(\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{c+a}\right)\ge a+b+c+1$

Bài 29. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện $a^2+b^2+c^2=1.$

Chứng minh rằng $\dfrac{a^3}{b^2+c}+\dfrac{b^3}{c^2+a}+\dfrac{c^3}{a^2+b}\ge\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}.$

Bài 30. Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh

$$\frac{a}{\sqrt{b+c}}+\frac{b}{\sqrt{c+a}}+\frac{c}{\sqrt{a+b}}\ge\sqrt{\frac{3}{2}(a+b+c)}.$$

Bài 31. Cho a,b,c là các số thực dương có tích bằng 1. Chứng minh

$$\frac{1}{a+b+4}+\frac{1}{b+c+4}+\frac{1}{c+a+4}\le\frac{1}{2}.$$

Bài 32. Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh

$$\frac{1}{a+\frac{1}{b}+1}+\frac{1}{b+\frac{1}{c}+1}+\frac{1}{c+\frac{1}{a}+1}\ge\frac{3}{\sqrt[3]{abc}+\frac{1}{\sqrt[3]{abc}}+1}.$$

Bài 33. Cho a,b,c là 3 số thực dương.

Chứng minh rằng

$$\frac{(b+c)^2}{a(b+c+2a)}+\frac{(a+c)^2}{b(a+c+2b)}+\frac{(a+b)^2}{c(a+b+2c)}\ge 2\left(\frac{a}{c+b}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\right).$$

Bài 34. Cho x,y là hai số thực dương có tổng bằng 1.

Chứng minh rằng $\frac{x^2}{y+1}+\frac{y^2}{x+1}\ge\frac{1}{3}$.

Bài 35. Cho *x,y* là hai số thực dương. Chứng minh

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{4}{x^2+y^2}\ge\frac{32\left(x^2+y^2\right)}{\left(x+y\right)^4}.$$

Bài 36. Cho x,y là các số thực dương thoả mãn điều kiện

$$\left(x+2y-3\right)\sqrt{2\left(x^2+y^2\right)}+5xy+y^2=3\left(x+y\right).$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}+x+3y$.

Bài 37. Cho a,b,x,y,z là các số thực dương. Chứng minh

$$\frac{x}{ay+bz}+\frac{y}{az+bx}+\frac{z}{ax+by}\ge\frac{3}{a+b}.$$

Bài 38. Cho x,y,z là các số thực dương. Chứng minh

$$\frac{x^2}{(3x+4y)(4x+3y)}+\frac{y^2}{(3y+4z)(4y+3z)}+\frac{z^2}{(3z+4x)(4z+3x)}\ge\frac{3}{49}.$$

Bài 39. Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{a^3+2b^3}{4ab+3a^2}+\frac{b^3+2c^3}{4bc+3b^2}+\frac{c^3+2a^3}{4ca+3c^2}.$$

Bài 40. Chứng minh rằng với mọi a, b, c dương ta có

$$\frac{a}{b+2c}+\frac{b}{c+2a}+\frac{c}{a+2b}\ge 1.$$

A. HƯỚNG DẪN GIẢI – ĐÁP SỐ

Bài 1. Sử dụng bất đẳng thức C-S dạng phân thức ta có:

$$P=\frac{x}{\sqrt{y^2+1}}+\frac{y}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{x^2}{x\sqrt{y^2+1}}+\frac{y^2}{y\sqrt{x^2+1}}\ge\frac{\left(x+y\right)^2}{x\sqrt{y^2+1}+y\sqrt{x^2+1}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x}.\sqrt{xy^2+x}+\sqrt{y}.\sqrt{yx^2+y}}\ge\frac{1}{\sqrt{\left(x+y\right)\left(xy^2+x+yx^2+y\right)}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{xy\left(x+y\right)+x+y}}=\frac{1}{\sqrt{1+xy}}\ge\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{x+y}{2}\right)^2}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = \frac{1}{2}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\frac{2}{\sqrt{5}}$ đạt tại $x = y = \frac{1}{2}$.

Bài 2. Sử dụng bất đẳng thức C-S ta được:

$$\sqrt{\left(1+x^2\right)\left(1+y^2\right)} \ge 1+xy, \sqrt{\left(1+x^3\right)\left(1+y^3\right)} \ge 1+xy\sqrt{xy}.$$

Suy ra $P \ge \frac{xy}{2y} + \frac{xy\sqrt{xy}}{3x^2} = \frac{1}{6}\left(3x+2y\sqrt{\frac{y}{x}}\right)$.

Nhận xét. Vế phải của bất đẳng thức bậc 1 và điều kiện bậc 1 nên sử dụng kỹ thuật đồng bậc: $P \ge \frac{5}{6}.\frac{3x+2y\sqrt{\frac{y}{x}}}{2x+3y} = \frac{5}{6}.\frac{3+2\frac{y}{x}\sqrt{\frac{y}{x}}}{2+\frac{3y}{x}}$.

Đặt $t = \sqrt{\frac{y}{x}}, (t>0)$ khi đó

$$P \ge \frac{5}{6}.\frac{3+2t^3}{2+3t^2} = \frac{5}{6}\left(\frac{3+2t^3}{2+3t^2} - 1\right) + \frac{5}{6} = \frac{5}{6}.\frac{(t-1)^2(2t+1)}{2+3t^2} + \frac{5}{6} \ge \frac{5}{6}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $t = 1 \Leftrightarrow x = y \Rightarrow x = y = 1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\frac{5}{6}$ đạt tại $x = y = 1$.

Bình luận. Dự đoán được điểm rơi $x = y = 1$ ta có thể đánh giá nhanh bằng bất đẳng thức AM-GM như sau:

$$P \ge \frac{1}{6}\left(3x+2y\sqrt{\frac{y}{x}}\right) = \frac{1}{6}\left(2x+x+y\sqrt{\frac{y}{x}}+y\sqrt{\frac{y}{x}}\right) \ge \frac{1}{6}\left(2x+3\sqrt[3]{xy\sqrt{\frac{y}{x}}y\sqrt{\frac{y}{x}}}\right) = \frac{2x+3y}{6} = \frac{5}{6}.$$

Bài 3. Sử dụng bất đẳng thức C-S ta có

$$\frac{1}{y-1}+\frac{1}{z-1} \ge \frac{4}{y+z-2}; \frac{1}{z-1}+\frac{1}{x-1} \ge \frac{4}{z+x-2}; \frac{1}{x-1}+\frac{1}{y-1} \ge \frac{4}{x+y-2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z$.

Suy ra $P \ge 4\left(\frac{x^2}{y+z-2}+\frac{y^2}{z+x-2}+\frac{z^2}{x+y-2}\right)$.

Sử dụng bất đẳng thức C-S ta có

$$\frac{x^2}{y+z-2}+\frac{y^2}{z+x-2}+\frac{z^2}{x+y-2}\ge\frac{(x+y+z)^2}{2(x+y+z)-6}.$$

Suy ra

$$P\ge 4.\frac{(x+y+z)^2}{2(x+y+z)-6}=\frac{2(x+y+z)^2}{x+y+z-3}$$

$$=2(x+y+z-3)+\frac{18}{x+y+z-3}+12$$

$$\ge 2\sqrt{2(x+y+z-3).\frac{18}{x+y+z-3}}+12=24$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases}x=y=z>1\\ 2(x+y+z-3)=\dfrac{18}{x+y+z-3}\end{cases}\Leftrightarrow x=y=z=2.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 24 đạt tại $x=y=z=2$.

Bài tập tương tự

1) Cho $x,y,z>1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=x\left(\frac{1}{y-1}+\frac{1}{z-1}\right)+y\left(\frac{1}{z-1}+\frac{1}{x-1}\right)+z\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{y-1}\right).$$

Bài 4. Sử dụng bất đẳng thức C-S dạng phân thức ta có

$$VT=\frac{x^2}{3x^2+7(y+z)x}+\frac{y^2}{3y^2+7(z+x)y}+\frac{z^2}{3z^2+7(x+y)z}$$

$$\ge\frac{(x+y+z)^2}{3(x^2+y^2+z^2)+14(xy+yz+zx)}=\frac{(x+y+z)^2}{3(x+y+z)^2+8(xy+yz+zx)}$$

$$\ge\frac{(x+y+z)^2}{3(x+y+z)^2+\frac{8}{3}(x+y+z)^2}=\frac{3}{17}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z$.

Bài 5. Sử dụng bất đẳng thức AM – GM cho 2 số dương ta được

$$x^2(y+z)\ge 2x^2\sqrt{yz}=2x^2\sqrt{\frac{1}{x}}=2x\sqrt{x}.$$

Suy ra $\dfrac{x^2(y+z)}{y\sqrt{y}+2z\sqrt{z}}\ge\dfrac{2x\sqrt{x}}{y\sqrt{y}+2z\sqrt{z}}$.

Tương tự ta có

$$\frac{y^2(z+x)}{z\sqrt{z}+2x\sqrt{x}} \ge \frac{2y\sqrt{y}}{z\sqrt{z}+2x\sqrt{x}}$$

$$\frac{z^2(x+y)}{x\sqrt{x}+2y\sqrt{y}} \ge \frac{2z\sqrt{z}}{x\sqrt{x}+2y\sqrt{y}}$$

Cộng theo vế 3 bất đẳng thức trên ta được

$$P \ge \frac{2x\sqrt{x}}{y\sqrt{y}+2z\sqrt{z}} + \frac{2y\sqrt{y}}{z\sqrt{z}+2x\sqrt{x}} + \frac{2z\sqrt{z}}{x\sqrt{x}+2y\sqrt{y}}.$$

Đặt $a = x\sqrt{x}, b = y\sqrt{y}, c = z\sqrt{z} \Rightarrow abc = 1$.

Ta có

$$P \ge \frac{2a}{b+2c} + \frac{2b}{c+2a} + \frac{2c}{b+2b}$$

$$= 2\left[\frac{a^2}{a(b+2c)} + \frac{b^2}{b(c+2a)} + \frac{c^2}{c(a+2b)}\right]$$

$$\ge \frac{2(a+b+c)^2}{a(b+2c)+b(c+2a)+c(a+2b)}$$

$$= \frac{2(a+b+c)^2}{3(ab+bc+ca)} \ge \frac{6(ab+bc+ca)}{3(ab+bc+ca)} = 2$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 1 đạt tại $x = y = z = 1$.

Bài 6. Sử dụng bất đẳng thức AM –GM cho 2 số dương ta được

$$\sqrt{bc(b^2+c^2)} = \frac{1}{\sqrt{2}}.\sqrt{2bc(b^2+c^2)} \le \frac{2bc+b^2+c^2}{2\sqrt{2}} = \frac{(b+c)^2}{2\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{a(b+c)}{\sqrt{bc(b^2+c^2)}} \ge \frac{2\sqrt{2}a(b+c)}{(b+c)^2} = \frac{2\sqrt{2}a}{b+c}$$

Tương tự ta có

$$\frac{b(c+a)}{\sqrt{ca(c^2+a^2)}} \ge \frac{2\sqrt{2}b}{c+a}$$

$$\frac{c(a+b)}{\sqrt{ab(a^2+b^2)}} \ge \frac{2\sqrt{2}c}{a+b}.$$

Cộng theo vế 3 bất đẳng thức trên và gọi P là biểu thức vế trái của bất đẳng thức ta được

$$P \geq 2\sqrt{2}\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right) \geq 2\sqrt{2}.\frac{3}{2}=3\sqrt{2}.$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bài 8. Sử dụng bất đẳng thức AM – GM cho 2 số dương ta được

$$yz \leq \left(\frac{y+z}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{x^2(y+z)}{yz} \geq \frac{x^2(y+z)}{\left(\frac{y+z}{2}\right)^2}=\frac{4x^2}{y+z}.$$

Tương tự ta có

$$\frac{y^2(z+x)}{zx} \geq \frac{4y^2}{z+x}$$
$$\frac{z^2(x+y)}{xy} \geq \frac{4z^2}{x+y}.$$

Cộng theo vế 3 bất đẳng thức trên ta được

$$P \geq 4\left(\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}\right) \geq 4.\frac{(x+y+z)^2}{2(x+y+z)}=2(x+y+z)=2.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=\frac{1}{3}$. Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 2.

<u>**Cách 2:**</u> Viết lại P dưới dạng

$$P=\left(\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}\right)+\left(\frac{x^2}{z}+\frac{y^2}{x}+\frac{z^2}{y}\right).$$

Chú ý sử dụng AM –GM ta có

$$\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x} \geq x+y+z$$
$$\frac{x^2}{z}+\frac{y^2}{x}+\frac{z^2}{y} \geq x+y+z$$

Cộng theo vế 2 bất đẳng thức trên có kết quả tương tự trên.

Bài 9. Gọi P là biểu thức vế trái, với giả thiết $xyz=1$ suy ra

$$P=\frac{x^4}{x^3z+xz}+\frac{y^4}{y^3x+xy}+\frac{z^4}{z^4y+yz}.$$

Sử dụng bất đẳng thức C – S dạng phân thức ta có

$$P \ge \frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}{x^3z+y^3x+z^3y+xy+yz+zx}.$$

Ta cần chứng minh

$$\frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}{x^3z+y^3x+z^3y+xy+yz+zx} \ge \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\left(x^4+y^4+z^4\right)+4\left(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2\right) \ge 3\left(x^3z+y^3x+z^3y+xy+yz+zx\right)$$

Bất đẳng thức trên là tổng của các bất đẳng thức

$$x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2 \ge xy+yz+zx \ (1)$$

$$x^4+y^4+z^4 \ge x^3z+y^3x+z^3y \ \ (2)$$

$$x^4+y^4+z^4+x^2y^2+y^2z^2+y^2z^2 \ge 2\left(x^3z+y^3x+z^3y\right) \ (3)$$

Chứng minh (1).

Sử dụng bất đẳng thức AM – GM cho 3 số dương ta có

$$\begin{aligned} x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2 &\ge 2\left(xy+yz+zx\right)-3 \\ &= \left(xy+yz+zx\right)+\left(xy+yz+zx-3\right) \\ &\ge xy+yz+zx+3\left(\sqrt[3]{x^2y^2z^2}-1\right)=xy+yz+zx \end{aligned}$$

Chứng minh (2).

Sử dụng bất đẳng thức AM – GM cho 4 số dương ta được

$$x^4+x^4+x^4+z^4 \ge 4x^3z$$

$$y^4+y^4+y^4+x^4 \ge 4y^3x.$$

$$z^4+z^4+z^4+y^4 \ge 4z^3y$$

Cộng theo vế 3 bất đẳng thức trên ta có điều phải chứng minh.

Chứng minh (3).

Bất đẳng thức tương đương với

$$x^2\left(x-z\right)^2+y^2\left(y-x\right)^2+z^2\left(z-y\right)^2 \ge 0.$$

Bài toán được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$.

Bài 10. Gọi P là biểu thức vế trái của bất đẳng thức.

Viết lại P và sử dụng bất đẳng thức C – S ta có

$$P=\frac{\frac{x^4}{y^2+z^2}}{y+z}+\frac{\frac{y^4}{z^2+x^2}}{z+x}+\frac{\frac{z^4}{x^2+y^2}}{x+y}\geq\frac{\left(\frac{x^2}{\sqrt{y^2+z^2}}+\frac{y^2}{\sqrt{z^2+x^2}}+\frac{z^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2}{2(x+y+z)}$$

$$=\frac{\left(\frac{x^2}{\sqrt{y^2+z^2}}+\frac{y^2}{\sqrt{z^2+x^2}}+\frac{z^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2}{6}$$

Vậy ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{x^2}{\sqrt{y^2+z^2}}+\frac{y^2}{\sqrt{z^2+x^2}}+\frac{z^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\geq\frac{3}{\sqrt{2}}.$$

Gọi Q là biểu thức vế trái của bất đẳng thức viết lại Q và sử dụng bất đẳng thức C-S ta có

$$Q=\frac{x^4}{x^2\sqrt{y^2+z^2}}+\frac{y^4}{y^2\sqrt{z^2+x^2}}+\frac{z^4}{z^2\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\geq\frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}{x^2\sqrt{y^2+z^2}+y^2\sqrt{z^2+x^2}+z^2\sqrt{x^2+y^2}}$$

Chú ý

$$x^2\sqrt{y^2+z^2}+y^2\sqrt{z^2+x^2}+z^2\sqrt{x^2+y^2}=\sum\sqrt{x^2}\sqrt{x^2\left(y^2+z^2\right)}$$

$$\leq\sqrt{\left(x^2+y^2+z^2\right)\left[x^2\left(y^2+z^2\right)+y^2\left(z^2+x^2\right)+z^2\left(x^2+y^2\right)\right]}$$

$$=\sqrt{2\left(x^2+y^2+z^2\right)\left(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2\right)}$$

$$\leq\sqrt{\frac{2}{3}\left(x^2+y^2+z^2\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}$$

Suy ra

$$Q\geq\frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}{\sqrt{\frac{2}{3}\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}}=\sqrt{\frac{3}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)}\geq\frac{x+y+z}{\sqrt{2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}.$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$.

Bài 11. Viết lại bất đẳng thức dưới dạng

$$\frac{a+b}{3c+a+b}+\frac{b+c}{3a+b+c}+\frac{c+a}{3b+c+a}\geq\frac{6}{5}.$$

Gọi P là biểu thức vế trái của bất đẳng thức ta có

$$P=\frac{(a+b)^2}{(a+b)(3c+a+b)}+\frac{(b+c)^2}{(b+c)(3a+b+c)}+\frac{(c+a)^2}{(c+a)(3b+c+a)}$$

$$\geq\frac{(a+b+b+c+c+a)^2}{(a+b)(3c+a+b)+(b+c)(3a+b+c)+(c+a)(3b+c+a)}$$

$$=\frac{4(a+b+c)^2}{2\left(a^2+b^2+c^2\right)+8(ab+bc+ca)}=\frac{2(a+b+c)^2}{(a+b+c)^2+2(ab+bc+ca)}$$

$$\geq\frac{2(a+b+c)^2}{(a+b+c)^2+\frac{2}{3}(a+b+c)^2}=\frac{6}{5}$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bài 12. Ta có:

$$P=\left(\frac{a}{b+c}+1\right)+4\left(\frac{b}{c+a}+1\right)+9\left(\frac{c}{a+b}+1\right)-14$$

$$=\frac{a+b+c}{b+c}+4.\frac{a+b+c}{c+a}+9.\frac{a+b+c}{a+b}-14$$

$$=(a+b+c)\left(\frac{9}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{4}{c+a}\right)-14$$

$$=\frac{1}{2}\left[(a+b)+(b+c)+(c+a)\right]\left(\frac{9}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{4}{c+a}\right)-14$$

$$\geq\frac{(3+1+2)^2}{2}-14=\frac{21}{2}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a+b}{3}=\frac{b+c}{1}=\frac{c+a}{2}$.

Bài 13.

<u>Phân tích tìm lời giải:</u>

Tương tự bài toán trên ta cần thêm vào mỗi phân thức các hằng số thích hợp để có cả 3 phân thức có chung tử thức.

Ta chọn x,y dương sao cho:

$$a+3c+x(a+b)=c+3a+y(b+c)=M$$

$$\Leftrightarrow (x+1)a+xb+3c=3a+yb+(y+1)c=M$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x+1=3\\x=y\\y+1=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y=2\end{cases}\Rightarrow M=3a+2b+3c$$

Vậy ta thêm vào $\frac{4b}{a+c}+6=\frac{2(3a+3c+2b)}{a+c}$

$$P=\left(\frac{a+3c}{a+b}+2\right)+\left(\frac{c+3a}{b+c}+2\right)+\left(\frac{4b}{a+c}+6\right)-10$$

$$=\frac{3a+2b+3c}{a+b}+\frac{3a+2b+3c}{b+c}+\frac{2(3a+3c+2b)}{a+c}-10$$

Vậy ta có P $=(3a+2b+3c)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)-10$

$$=\left[(a+b)+(b+c)+2(c+a)\right]\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)-10$$

$$\geq\left(1+1+\sqrt{2}\right)^2-10$$

Bài 14. Ta có:

$$P=\left[\frac{3(b+c)}{2a}+2\right]+\left(\frac{4a+3c}{3b}+1\right)+\left[\frac{12(b-c)}{2a+3c}+8\right]-11$$

$$=(4a+3b+3c)\left(\frac{1}{2a}+\frac{1}{3b}+\frac{4}{2a+3c}\right)-11$$

$$=\left[2a+3b+(2a+3c)\right]\left(\frac{1}{2a}+\frac{1}{3b}+\frac{4}{2a+3c}\right)-11$$

$$\geq(1+1+2)^2-11=5$$

đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $2a=3b=\frac{2a+3c}{2}\Leftrightarrow 2a=3b=3c$.

Bài 15. Gọi P là biểu thức vế trái của bất đẳng thức.

Ta có

$$P=\left(\frac{b+c}{a}+2\right)+\left(\frac{2a+c}{b}+1\right)+\left[\frac{4(a+b)}{a+c}+4\right]-7$$

$$=(2a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{4}{a+c}\right)-7$$

$$\geq\left(a+b+(a+c)\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{4}{a+c}\right)-7\geq(1+1+2)^2-7=9$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=\frac{a+c}{2}\Leftrightarrow a=b=c$.

Bài 16. Ta có

$$P=\left(\frac{3a}{b+c}+3\right)+\left(\frac{4b}{c+a}+4\right)+\left(\frac{5c}{a+b}+5\right)-12$$

$$=(a+b+c)\left(\frac{3}{b+c}+\frac{4}{c+a}+\frac{5}{a+b}\right)-12$$

$$=\frac{1}{2}\left[(b+c)+(c+a)+(a+b)\right]\left(\frac{3}{b+c}+\frac{4}{c+a}+\frac{5}{a+b}\right)-12$$

$$\geq\frac{\left(\sqrt{3}+2+\sqrt{5}\right)^2}{2}-12$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{b+c}{\sqrt{3}}=\frac{c+a}{2}=\frac{a+b}{\sqrt{5}}$.

Bài 17. Ta có

$$P=\left(\frac{9b+16c}{a}+4\right)+\left[\frac{25(4a+16c)}{b}+9.25\right]+\left[\frac{64(4a+9b)}{c}+64.16\right]-1253$$

$$=(4a+9b+16c)\left(\frac{1}{a}+\frac{25}{b}+\frac{64}{c}\right)-1253\geq(2+3.5+4.8)^2-1253=1148$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=4b=16c$.

Bài 18. Gọi P là biểu thức vế trái của bất đẳng thức.

Ta viết lại P và sử dụng bất đẳng thức C –S ta có

$$P=(a+b+c)\left(\frac{y+z}{b+c}+\frac{z+x}{c+a}+\frac{x+y}{a+b}\right)-2(x+y+z)$$

$$=\frac{1}{2}\left[(b+c)+(c+a)+(a+b)\right]\left(\frac{y+z}{b+c}+\frac{z+x}{c+a}+\frac{x+y}{a+b}\right)-2(x+y+z)$$

$$\geq\frac{1}{2}\left(\sqrt{y+z}+\sqrt{z+x}+\sqrt{x+y}\right)^2-2(x+y+z)$$

Vậy ta chứng minh

$$\frac{1}{2}\left(\sqrt{y+z}+\sqrt{z+x}+\sqrt{x+y}\right)^2-2(x+y+z)\geq\frac{3(xy+yz+zx)}{x+y+z}$$

$$\Leftrightarrow(x+y+z)\left(x+y+z+\sum\sqrt{x^2+xy+yz+zx}\right)\geq2(x+y+z)^2+3(xy+yz+zx)$$

$$\Leftrightarrow(x+y+z)\sum\sqrt{x^2+xy+yz+zx}\geq(x+y+z)^2+3(xy+yz+zx)$$

Ta có $\sum\sqrt{x^2+xy+yz+zx}\ge\sqrt{(x+y+z)^2+\left(3\sqrt{xy+yz+zx}\right)^2}$

$$=\sqrt{(x+y+z)^2+9(xy+yz+zx)}$$

Vậy ta chứng minh

$$(x+y+z)\sqrt{(x+y+z)^2+9(xy+yz+zx)}\ge(x+y+z)^2+3(xy+yz+zx)$$

$$\Leftrightarrow 9(x+y+z)^2(xy+yz+zx)\ge 9(xy+yz+zx)^2+6(x+y+z)^2(xy+yz+zx)$$

$$\Leftrightarrow (x+y+z)^2\ge 3(xy+yz+zx)$$

$$\Leftrightarrow (x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\ge 0$$

Bất đẳng thức luôn đúng.

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c;x=y=z$.

Bài 19. Gọi P là biểu thức vế trái, viết lại P và sử dụng bất đẳng thức C – S ta có

$$P=\frac{x^2}{x\sqrt{x^2+kyz}}+\frac{y^2}{y\sqrt{y^2+kzx}}+\frac{z^2}{z\sqrt{z^2+kxy}}$$

$$\ge\frac{(x+y+z)^2}{x\sqrt{x^2+kyz}+y\sqrt{y^2+kzx}+z\sqrt{z^2+kxy}}$$

$$\ge\frac{(x+y+z)^2}{\sqrt{(x+y+z)\left(x\left(x^2+kyz\right)+y\left(y^2+kzx\right)+z\left(z^2+kxy\right)\right)}}$$

Vậy ta chứng minh

$$(k+1)(x+y+z)^3\ge 9\left[x\left(x^2+kyz\right)+y\left(y^2+kzx\right)+z\left(z^2+kxy\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow (k-8)\left(x^3+y^3+z^3\right)+3(k+1)(x+y)(y+z)(z+x)\ge 27kxyz$$

Bất đẳng thức cuối luon đúng dựa vào AM – GM.

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z$.

Bài 20. Gọi P là biểu thức vế trái, viết lại P và sử dụng bất đẳng thức C – S ta được

$$P=\frac{\frac{1}{a^2}}{a(b+c)}+\frac{\frac{1}{b^2}}{b(c+a)}+\frac{\frac{1}{c^2}}{c(a+b)}$$

$$\ge\frac{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2}{a(b+c)+b(c+a)+c(a+b)}=\frac{(ab+bc+ca)^2}{2(ab+bc+ca)}$$

$$=\frac{ab+bc+ca}{2}\ge\frac{3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}}{2}=\frac{3}{2}$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài 21. Đặt $x=\frac{1}{a},y=\frac{1}{b},z=\frac{1}{c}$ bất đẳng thức trở thành

$$\frac{x}{\sqrt{z(3x+2y)}}+\frac{y}{\sqrt{x(3y+2z)}}+\frac{z}{\sqrt{y(3z+2x)}}\ge\frac{3}{\sqrt{5}}.$$

Sử dụng bất đẳng thức AM – GM ta có

$$\frac{x}{\sqrt{z(3x+2y)}}\ge\frac{2\sqrt{5}x}{5z+3x+2y}$$

$$\frac{y}{\sqrt{x(3y+2z)}}\ge\frac{2\sqrt{5}y}{5x+3y+2z}$$

$$\frac{z}{\sqrt{y(3z+2x)}}\ge\frac{2\sqrt{5}z}{5y+3z+2x}$$

Cộng theo vế 3 bất đẳng trên kết hợp sử dụng C – S ta có

$$P\ge\frac{2\sqrt{5}(x+y+z)^2}{3(x+y+z)^2+(xy+yz+zx)}\ge\frac{3}{\sqrt{5}}.$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bài tập tương tự

Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a\sqrt{a+b}}+\frac{1}{b\sqrt{b+c}}+\frac{1}{c\sqrt{c+a}}\ge\frac{3}{\sqrt{2abc}}.$$

Bài 22. Gọi P là biểu thức vế trái của bất đẳng thức và sử dụng AM – GM ta có

$$\sqrt{\frac{a^3}{a^2+5b^2}}=\frac{\sqrt{6}a^2}{\sqrt{6a(a^2+5b^2)}}\ge\frac{2\sqrt{6}a^2}{a^2+5b^2+6a}$$

$$\sqrt{\frac{b^3}{b^2+5c^2}}\ge\frac{2\sqrt{6}b^2}{b^2+5c^2+6b}$$

$$\sqrt{\frac{c^3}{c^2+5a^2}}\ge\frac{2\sqrt{6}c^2}{c^2+5a^2+6c}$$

Cộng theo vế 3 bất đẳng thức trên ta được

$$P\ge\frac{2\sqrt{6}a^2}{a^2+5b^2+6a}+\frac{2\sqrt{6}b^2}{b^2+5c^2+6b}+\frac{2\sqrt{6}c^2}{c^2+5a^2+6c}.$$

Vậy ta cần chứng minh

$$Q=\frac{a^2}{a^2+5b^2+6a}+\frac{b^2}{b^2+5c^2+6b}+\frac{c^2}{c^2+5a^2+6c}\ge\frac{1}{4}.$$

Sử dụng bất đẳng thức C –S ta có

$$Q=\frac{a^4}{a^2\left(a^2+5b^2+6a\right)}+\frac{b^4}{b^2\left(b^2+5c^2+6b\right)}+\frac{c^4}{c^2\left(c^2+5a^2+6c\right)}$$

$$\ge\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{a^4+b^4+c^4+5\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)+6\left(a^3+b^3+c^3\right)}$$

Vậy ta chứng minh

$$\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{a^4+b^4+c^4+5\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)+6\left(a^3+b^3+c^3\right)}\ge\frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow 4\left(a^2+b^2+c^2\right)^2\ge a^4+b^4+c^4+5\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)+6\left(a^3+b^3+c^3\right)$$

$$\Leftrightarrow 2\left(a^4+b^4+c^4\right)+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\ge 2\left(a^3+b^3+c^3\right)$$

$$\Leftrightarrow 2\left(a^4+b^4+c^4\right)+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\ge\frac{2}{3}(a+b+c)\left(a^3+b^3+c^3\right)$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^4+(b-c)^4+(c-a)^4\ge 0$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài tập tương tự

Cho a,b,c là các số thực dương có tổng bằng 3.

Chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{a^3}{a^2+8b^2}}+\sqrt{\frac{b^3}{b^2+8c^2}}+\sqrt{\frac{c^3}{c^2+8a^2}}\ge 1.$$

Bài 23. Gọi P là biểu thức vế trái sử dụng bất đẳng thức C –S ta có

$$P\ge\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{a\sqrt{b^2-bc+c^2}+b\sqrt{c^2-ca+a^2}+c\sqrt{a^2-ab+b^2}}$$

$$\ge\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{\sqrt{(a+b+c)\left[a\left(b^2-bc+c^2\right)+b\left(c^2-ca+a^2\right)+c\left(a^2-ab+b^2\right)\right]}}$$

Ta cần chứng minh

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)^2\ge(a+b+c)\left[a\left(b^2-bc+c^2\right)+b\left(c^2-ca+a^2\right)+c\left(a^2-ab+b^2\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow a^4+b^4+c^4+abc(a+b+c)\ge ab\left(a^2+b^2\right)+bc\left(b^2+c^2\right)+ca\left(c^2+a^2\right)$$

Bất đẳng thức cuối luôn đúng(xem chủ đề chứng minh tương đương).

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bài 24. Đặt $x=\frac{1}{a}, y=\frac{1}{b}, z=\frac{1}{c} \Rightarrow x^2+y^2+z^2 \geq 1$.

Bất đẳng thức trở thành $\frac{x^3}{y^2+z^2}+\frac{y^3}{z^2+x^2}+\frac{z^3}{x^2+y^2} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Gọi P là biểu thức vế trái và sử dụng bất đẳng thức C –S ta có

$$P=\frac{x^4}{x\left(y^2+z^2\right)}+\frac{y^4}{y\left(z^2+x^2\right)}+\frac{z^4}{z\left(x^2+y^2\right)}$$

$$\geq \frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}{x\left(y^2+z^2\right)+y\left(z^2+x^2\right)+z\left(x^2+y^2\right)}$$

Mặt khác sử dụng bất đẳng thức AM – GM ta có

$$x\left(y^2+z^2\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2x^2\left(y^2+z^2\right)\left(y^2+z^2\right)}$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\left(\frac{2x^2+y^2+z^2+y^2+z^2}{3}\right)^3}$$

$$=\frac{2\sqrt{3}}{9}\left(x^2+y^2+z^2\right)\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

Tương tự ta có

$$y\left(z^2+x^2\right) \leq \frac{2\sqrt{3}}{9}\left(x^2+y^2+z^2\right)\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$z\left(x^2+y^2\right) \leq \frac{2\sqrt{3}}{9}\left(x^2+y^2+z^2\right)\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

Cộng theo vế 3 bất đẳng thức trên từ đó suy ra

$$P \geq \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{x^2+y^2+z^2} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\sqrt{3}$.

Bài 25. Sử dụng bất đẳng thức C – S ta có

$$\sqrt{\frac{a^4+b^4}{1+ab}}=\sqrt{\frac{2\left(a^4+b^4\right)}{2+2ab}} \geq \frac{a^2+b^2}{\sqrt{2+2ab}}.$$

Tương tự ta suy ra

$$P \ge \frac{a^2+b^2}{\sqrt{2+2ab}} + \frac{b^2+c^2}{\sqrt{2+2bc}} + \frac{c^2+a^2}{\sqrt{2+2ca}}$$

$$\ge \frac{(2a+2b+2c)^2}{2\left(\sqrt{2+2ab}+\sqrt{2+2bc}+\sqrt{2+2ca}\right)}$$

$$\ge \frac{4(a+b+c)^2}{3+ab+3+bc+3+ca} \ge 3$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài 26. Gọi P là biểu thức vế trái ta có

$$P = \frac{3a+b}{2a+c} - 1 + \frac{3b+c}{2b+a} - 1 + \frac{3c+a}{2c+b} - 1 + 3$$

$$= \frac{a+b-c}{2a+c} + \frac{b+c-a}{2b+a} + \frac{c+a-b}{2c+b} + 3$$

$$= \frac{(a+b-c)^2}{(a+b-c)(2a+c)} + \frac{(b+c-a)^2}{(b+c-a)(2b+a)} + \frac{(c+a-b)^2}{(c+a-b)(2c+b)} + 3$$

$$\ge \frac{(a+b+c)^2}{\sum (a+b-c)(2a+c)} + 3 = \frac{(a+b+c)^2}{(a+b+c)^2} + 3 = 4$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bài 27.

Sử dụng bất đẳng thức C-S ta có

$$\frac{1}{a\sqrt{b^2+c^2}} + \frac{1}{b\sqrt{c^2+a^2}} + \frac{1}{c\sqrt{a^2+b^2}} \ge \frac{9}{a\sqrt{b^2+c^2}+b\sqrt{c^2+a^2}+c\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Tương tự ta có

$$a\sqrt{b^2+c^2}+b\sqrt{c^2+a^2}+c\sqrt{a^2+b^2}$$

$$\le \sqrt{3\left[a^2\left(b^2+c^2\right)+b^2\left(c^2+a^2\right)+c^2\left(a^2+b^2\right)\right]}$$

$$= \sqrt{6\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)} = \sqrt{6\left[(ab+bc+ca)^2-2abc(a+b+c)\right]}$$

$$= \sqrt{6-12abc(a+b+c)}$$

Vậy $\dfrac{1}{a\sqrt{b^2+c^2}} + \dfrac{1}{b\sqrt{c^2+a^2}} + \dfrac{1}{c\sqrt{a^2+b^2}} \ge \dfrac{9}{\sqrt{6-12abc(a+b+c)}}$

Bất đẳng thức được chứng minh nếu ta chứng minh được

$$\frac{9}{\sqrt{6-12abc(a+b+c)}} \geq \frac{9}{2\sqrt{2}-3\sqrt{6}abc} \Leftrightarrow 2\sqrt{2}-3\sqrt{6}abc \geq \sqrt{6-12abc(a+b+c)}.$$

Luôn đúng do $a+b+c \geq \sqrt{3(ab+bc+ca)} = \sqrt{3}; abc \leq \frac{1}{3\sqrt{3}}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Bài 28. Bất đẳng thức tương đương với

$$(ab+bc+ca)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right) \geq a+b+c+1$$

$$\Leftrightarrow \frac{ab}{a+b}+\frac{bc}{b+c}+\frac{ca}{c+a} \geq 1$$

Sử dụng bất đẳng thức C –S ta có

$$\frac{ab}{a+b}+\frac{bc}{b+c}+\frac{ca}{c+a} = \frac{a^2b^2}{ab(a+b)}+\frac{b^2c^2}{bc(b+c)}+\frac{c^2a^2}{ca(c+a)}$$

$$\geq \frac{(ab+bc+ca)^2}{ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)}$$

$$= \frac{(ab+bc+ca)^2}{(a+b+c)(ab+bc+ca)-3abc}$$

$$\geq \frac{(ab+bc+ca)^2}{(a+b+c)(ab+bc+ca)} = 1$$

Bất đẳng thức được chứng minh đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=2, c=0$ hoặc các hoán vị.

Bài 29. Sử dụng bất đẳng thức C –S ta có

$$\frac{a^3}{b^2+c}+\frac{b^3}{c^2+a}+\frac{c^3}{a^2+b} \geq \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{a(b^2+c)+b(c^2+a)+c(a^2+b)}$$

$$= \frac{1}{ab^2+bc^2+ca^2+ab+bc+ca}$$

Vậy ta chỉ cần chứng minh $ab^2+bc^2+ca^2+ab+bc+ca \leq \frac{3+\sqrt{3}}{3}$.

Sử dụng bất đẳng thức AM – GM ta có $ab+bc+ca \leq a^2+b^2+c^2 = 1$.

$$a+b+c=(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2\right)$$
$$=\left(a^3+ac^2\right)+\left(b^3+ba^2\right)+\left(c^3+cb^2\right)+ab^2+bc^2+ca^2$$
$$\ge 2\left(a^2c+b^2a+c^2b\right)+ab^2+bc^2+ca^2=3\left(ab^2+bc^2+ca^2\right)$$

Suy ra $ab^2+bc^2+ca^2\le\dfrac{a+b+c}{3}\le\dfrac{\sqrt{3\left(a^2+b^2+c^2\right)}}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Cộng theo vế 2 bất đẳng thức trên ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Bài 30. Do tính thuần nhất của bất đẳng thức chuẩn hoá cho $a+b+c=\dfrac{3}{2}$.

Ta cần chứng minh $\dfrac{a}{\sqrt{b+c}}+\dfrac{b}{\sqrt{c+a}}+\dfrac{c}{\sqrt{a+b}}\ge\dfrac{3}{2}$.

Sử dụng bất đẳng thức C –S và gọi P là biểu thức vế trái ta có

$$P\ge\frac{(a+b+c)^2}{a\sqrt{b+c}+b\sqrt{c+a}+c\sqrt{a+b}}=\frac{9}{4\left(a\sqrt{b+c}+b\sqrt{c+a}+c\sqrt{a+b}\right)}.$$

Vậy ta chỉ cần chứng minh

$$a\sqrt{b+c}+b\sqrt{c+a}+c\sqrt{a+b}\le\frac{3}{2}.$$

Thật vậy sử dụng bất đẳng thức C –S ta có

$$a\sqrt{b+c}+b\sqrt{c+a}+c\sqrt{a+b}\le\sqrt{(a+b+c)\left[a(b+c)+b(c+a)+c(a+b)\right]}$$
$$=\sqrt{3(ab+bc+ca)}\le a+b+c=\frac{3}{2}$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bài 31. Bất đẳng tương đương với

$$\frac{a+b}{a+b+4}+\frac{b+c}{b+c+4}+\frac{c+a}{c+a+4}\ge 1.$$

Gọi P là biểu thức vế trái và sử dụng bất đẳng thức C –S ta có

$$P\ge\frac{\left(\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a}\right)^2}{2(a+b+c)+12}.$$

Vậy ta cần chứng minh

$$\left(\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a}\right)^2 \ge 2(a+b+c)+12$$
$$\Leftrightarrow \sum \sqrt{(a+b)(a+c)} \ge 6$$

Sử dụng bất đẳng thức C –S ta có

$$\sum \sqrt{(a+b)(a+c)} \ge \sum\left(a+\sqrt{bc}\right) = (a+b+c)+\left(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\right)$$
$$\ge 3\sqrt[3]{abc}+3\sqrt[3]{abc}=6$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài 32. Đặt $abc=k^3, k>0$ và $a=\frac{ky}{z}, b=\frac{kz}{x}, c=\frac{kx}{y}$.

Bất đẳng thức trở thành: $\sum_{cyc} \frac{z}{x+k^2y+kz} \ge \frac{3}{k^2+k+1}$.

Theo bất đẳng thức C –S ta có:

$$\sum_{cyc} \frac{z}{x+k^2y+kz} \ge \frac{(x+y+z)^2}{k(x^2+y^2+z^2)+(k^2+1)(xy+yz+zx)}.$$

Vì vậy ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{(x+y+z)^2}{k(x^2+y^2+z^2)+(k^2+1)(xy+yz+zx)} \ge \frac{3}{k^2+k+1}$$
$$\Leftrightarrow (k-1)^2(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx) \ge 0$$
$$\Leftrightarrow (k-1)^2\left[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\right] \ge 0$$

Bất đẳng thức cuối đúng ta có đpcm.

Bài 33. Đặt $x=\frac{b+c}{2a}; y=\frac{a+c}{2b}; z=\frac{a+b}{2c}$ ta có: $x+y+z+1=4xyz; xyz \ge 1$.

Bất đẳng thức đã cho trở thành:

$$\sum \frac{x^2}{x+1} \ge \frac{xy+yz+zx}{2xyz}.$$

Áp dụng bất đẳng thức C –S ta có:

$$\sum \frac{x^2}{x+1} \ge \frac{(x+y+z)^2}{x+y+z+3} \ge \frac{3(xy+yz+zx)}{6xyz} = \frac{xy+yz+zx}{2xyz}.$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bài 34. Ta có $\frac{x^2}{y+1}+\frac{y^2}{x+1} \ge \frac{(x+y)^2}{x+y+2} = \frac{1}{3}$.

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = \dfrac{1}{2}$.

Bài 35.

Ta có:

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{4}{x^2+y^2}=\frac{\left(x^2+y^2\right)^2+4x^2y^2}{x^2y^2\left(x^2+y^2\right)}\ge\frac{\left(x^2+y^2+2xy\right)^2}{2x^2y^2\left(x^2+y^2\right)}=\frac{\left(x+y\right)^4}{2x^2y^2\left(x^2+y^2\right)}.$$

Ta chứng minh

$$\frac{\left(x+y\right)^4}{2x^2y^2\left(x^2+y^2\right)}\ge\frac{32\left(x^2+y^2\right)}{\left(x+y\right)^4}\Leftrightarrow\left(x+y\right)^8\ge 64x^2y^2\left(x^2+y^2\right)^2.$$

$$\Leftrightarrow\left(x+y\right)^4\ge 8xy\left(x^2+y^2\right)\Leftrightarrow\left(\left(x^2+y^2\right)+2xy\right)^2\ge 8xy\left(x^2+y^2\right).$$

$$\Leftrightarrow\left(x^2+y^2\right)^2-4xy\left(x^2+y^2\right)+4x^2y^2\ge 0\Leftrightarrow\left(x-y\right)^4\ge 0 \text{ (luôn đúng).}$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y$.

Nhận xét. Ta có thể biến đổi tương đương bất đẳng thức như sau:

$$\left(x+y\right)^2\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{4}{x^2+y^2}\right)\ge\frac{32\left(x^2+y^2\right)}{\left(x+y\right)^2}.$$

Đặt $t=\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x},\left(t\ge 2\right)$ và đưa về chứng minh bất đẳng thức:

$$x^2+2x+\frac{8}{x}+4\ge\frac{32x}{x+2}\Leftrightarrow\left(x-2\right)^2\left(x^2+8x+4\right)\ge 0 \text{ (luôn đúng).}$$

Bài 36. Ta có

$$5xy+y^2=3xy+2xy+y^2\le 3xy+y^2+\left(x^2+y^2\right)=\left(x+y\right)\left(x+2y\right).$$

Vậy ta có

$$\left(x+2y-3\right)\sqrt{2\left(x^2+y^2\right)}+\left(x+y\right)\left(x+2y\right)\ge 3\left(x+y\right)$$

$$\Leftrightarrow\left(x+2y-3\right)\left(\sqrt{2\left(x^2+y^2\right)}+x+y\right)\ge 0\Leftrightarrow x+2y\ge 3$$

Sử dụng bất đẳng thức C –S ta có

$$P\ge\frac{\left(x+y\right)^2}{y+x}+x+3y=2x+4y\ge 6.$$

Bài 37. Sử dụng bất đẳng thức C –S ta có

$$\frac{x}{ay+bz}+\frac{y}{az+bx}+\frac{z}{ax+by}\ge\frac{(x+y+z)^2}{x(ay+bz)+y(zx+bx)+z(ax+by)}$$

$$=\frac{(x+y+z)^2}{(a+b)(xy+yz+zx)}\ge\frac{3(xy+yz+zx)}{(a+b)(xy+yz+zx)}=\frac{3}{a+b}$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z$.

Bài 38. Gọi P là biểu thức vế trái và đặt $c=\frac{y}{x};a=\frac{z}{y};b=\frac{x}{z}\Rightarrow abc=1$.

Suy ra $P=\frac{1}{12a^2+25a+12}+\frac{1}{12b^2+25b+12}+\frac{1}{12c^2+25c+12}$.

Chú ý: $12t^2+25t+12\le\frac{49}{3}(t^2+t+1)$.

Thay t lần lượt bởi a,b,c và sử dụng bất đẳng thức quen thuộc:

$$\frac{1}{a^2+a+1}+\frac{1}{b^2+b+1}+\frac{1}{c^2+c+1}\ge 1.$$

Vì vậy $P\ge\frac{3}{49}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z$.

Bài 39. Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$a^3+b^3\ge ab(a+b)\Rightarrow a^3+2b^3\ge ab(a+b)+b^3=b\left(a^2+ab+b^2\right)\ge 3ab^2.$$

Suy ra $\frac{a^3+2b^3}{4ab+3a^2}\ge\frac{3ab^2}{4ab+3a^2}=\frac{3b^2}{3a+4b}$.

Tương tự ta có: $\frac{b^3+2c^3}{4bc+3b^2}\ge\frac{3c^2}{3b+4c};\frac{c^3+2a^3}{4ca+3c^2}\ge\frac{3a^2}{3c+4a}$.

Suy ra $P\ge 3\left(\frac{a^2}{4a+3c}+\frac{b^2}{4b+3a}+\frac{c^2}{4c+3b}\right)$.

Sử dụng bất đẳng thức C-S ta có:

$$\frac{a^2}{4a+3c}+\frac{b^2}{4b+3a}+\frac{c^2}{4c+3b}\ge\frac{(a+b+c)^2}{7(a+b+c)}=\frac{a+b+c}{7}=\frac{1}{7}.$$

Vậy $P\ge\frac{3}{7}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\frac{3}{7}$ đạt tại $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Bài 40. Gọi P là biểu thức vế trái bất đẳng thức ta có

$$P=\frac{a^2}{a(b+2c)}+\frac{b^2}{b(c+2a)}+\frac{c^2}{c(c+2a)}.$$

Sử dụng bất đẳng thức C-S dạng phân thức ta có

$$P\geq\frac{(a+b+c)^2}{a(b+2c)+b(c+2a)+c(a+2b)}=\frac{(a+b+c)^2}{3(ab+bc+ca)}\geq 1.$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

CHỦ ĐỀ 6: KỸ THUẬT THAM SỐ HÓA

A. NỘI DUNG PHƯƠNG PHÁP

Khi áp dụng các bất đẳng thức cơ bản như AM-GM, C-S cái khó nhất của bài toán là dự đoán dấu bằng. Để khắc phục điều này ta lựa chọn kỹ thuật tham số hóa tức giả sử dấu bằng của bất đẳng thức đạt tại các điểm cho trước và đi tìm các điểm xảy ra dấu bằng bằng cách giải phương trình và hệ phương trình ta có kết quả của bài toán.

Ta xét bài toán sau đây

Cho x,y,z là các số thực thoả mãn điều kiện $xy+yz+zx=1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=kx^2+ly^2+z^2$ với k,l là các số thực không âm.

Ta có 2 cách cân bằng hệ số cho bài toán trên cũng chính là 2 phương pháp cơ bản ta hay sử dụng để xử lý các bài toán phải sử dụng đến tham số hoá.

B. BÀI TẬP CHỌN LỌC

Bài 1. Cho x,y,z là các số thực thoả mãn điều kiện $xy+yz+3zx=1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x^2+y^2+z^2$.

Lời giải

<u>Phân tích tìm lời giải:</u>

Với điều kiện đã cho ta thấy vai trò của x và z như nhau vậy giả sử P đạt min tại $x=z=k.y,\left(k\in\mathbb{R}\right)$.

Với a dương sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$$\begin{cases}a\left(x^2+z^2\right)\geq 2azx\\ x^2+k^2y^2\geq 2kxy\\ z^2+k^2y^2\geq 2kyz\end{cases}.$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được:

$$(a+1)(x^2+z^2)+2k^2y^2 \geq 2ky(z+x)+2azx$$

$$\Leftrightarrow x^2+z^2+\frac{2k^2}{a+1}y^2 \geq \frac{2a}{3(a+1)}\left(\frac{3k}{a}(yz+xy)+3zx\right)$$

Ta cần chọn a và k thoả mãn

$$\begin{cases} \dfrac{2k^2}{a+1}=1 \\ \dfrac{3k}{a}=1 \\ a>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>0 \\ a=3k \\ 2k^2-3k-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{3\left(3+\sqrt{33}\right)}{4} \\ k=\dfrac{3+\sqrt{33}}{4} \end{cases}$$

Với a và k chọn được từ trên ta có $P \geq \dfrac{2a}{3(a+1)}=\dfrac{15-\sqrt{33}}{16}$.

Lời giải chi tiết:

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$\frac{3\left(3+\sqrt{33}\right)}{4}(x^2+z^2) \geq \frac{3\left(3+\sqrt{33}\right)}{2}zx$$

$$x^2+\left(\frac{3+\sqrt{33}}{4}\right)^2 \geq \frac{3+\sqrt{33}}{2}yz$$

$$z^2+\left(\frac{3+\sqrt{33}}{4}\right)y^2 \geq \frac{3+\sqrt{33}}{2}xy$$

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên ta được

$$\left[\frac{3\left(3+\sqrt{33}\right)}{4}+1\right](x^2+z^2)+2.\left(\frac{3+\sqrt{33}}{4}\right)^2y^2$$

$$\geq \frac{3+\sqrt{33}}{2}(xy+yz+3zx)=\frac{3+\sqrt{33}}{2}$$

hay $\dfrac{10+3\sqrt{33}}{4}.P \geq \dfrac{3+\sqrt{33}}{2} \Leftrightarrow P \geq \dfrac{2\left(3+\sqrt{33}\right)}{10+3\sqrt{33}}=\dfrac{15-\sqrt{33}}{16}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=z=\dfrac{3+\sqrt{33}}{2}y=\pm\sqrt{6-\sqrt{33}}$.

Bài 2. Cho *x,y,z* là các số thực dương có tổng bằng 3.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2 + y^2 + z^3$.

Lời giải

Vai trò của x và y như nhau cho phép ta giả sử P đạt min tại $x = y = a, z = b$.

Theo giả thiết ta có $2a + b = 3$.

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$x^2 + a^2 \geq 2ax$

$y^2 + a^2 \geq 2ay$

$z^3 + b^3 + b^3 \geq 2b^2 z$

Cộng theo vế 3 bất đẳng thức trên ta được

$x^2 + y^2 + z^3 + \left(2a^2 + 2b^3\right) \geq 2a\left(x + y\right) + 3b^2 z$.

Ta chọn các hệ số a và b dương sao cho $2a = 3b^2$.

Vậy ta có hệ phương trình $\begin{cases} 2a + b = 3 \\ 2a = 3b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{3-b}{2} \\ 3b^2 - b - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{19-\sqrt{37}}{12} \\ b = \dfrac{-1+\sqrt{37}}{6} \end{cases}$.

Suy ra $P \geq 2a^2 + b^3 = 2\left(\dfrac{19-\sqrt{37}}{12}\right)^2 + \left(\dfrac{-1+\sqrt{37}}{6}\right)^3$.

Bài 3. Cho x,y là hai số thực không âm thoả mãn điều kiện $x^2 + y^2 = 5$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^3 + y^6$.

Lời giải

Giả sử P đạt min tại $x = a, y = b$ theo giả thiết ta có $a^2 + b^2 = 5$.

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$x^3 + x^3 + a^3 \geq 3ax^2$

$2\left(y^6 + b^6 + b^6\right) \geq 2.3b^4 y^2$

Cộng theo vế 2 bất đẳng thức trên ta được

$2x^3 + 2y^6 + a^3 + 4b^6 \geq 3\left(ax^2 + 2by^2\right)$.

Ta chọn các số dương a,b thoả mãn $a = 2b$.

Khi đó ta có hệ phương trình $\begin{cases} a = 2b \\ a^2 + b^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}$.

Do đó $P \geq a^3 + b^6 = 9$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 2, y = 1$.

Bài 4. Cho x,y,z là các số thực không âm thoả mãn điều kiện $x+y+z=3$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x^4+2y^4+3z^4$.

Lời giải

Giả sử P đạt min tại $x=a, y=b, z=c$ theo giả thiết ta có $a+b+c=3$.

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$$x^4+a^4+a^4+a^4 \ge 4a^3x$$

$$2\left(y^4+b^4+b^4+b^4\right) \ge 8b^3y$$

$$3\left(z^4+c^4+c^4+c^4\right) \ge 12c^3z$$

Cộng theo vế 3 bất đẳng thức trên ta được

$$x^4+2y^4+3z^4+3a^4+6b^4+9c^4 \ge 4\left(a^3x+2b^3y+3c^3z\right).$$

Ta chọn các số dương a,b,c sao cho $a^3=2b^3=3c^3$.

Vậy ta có hệ phương trình $\begin{cases} a+b+c=3 \\ a^3=2b^3=3c^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{3}{1+\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}} \\ b=\dfrac{3}{\sqrt[3]{2}\left(1+\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)} \\ c=\dfrac{\sqrt[3]{9}}{1+\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}} \end{cases}$.

Suy ra $P \ge a^4+2b^4+3c^4$ với a,b,c xác định như trên.

Tổng quát. Với các số thực không âm $x_1, x_2, ..., x_n$ có tổng bằng n. Và n số thực dương $k_1, k_2, ..., k_n$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=k_1x_1^m+k_2x_2^m+...+k_nx_n^m$ với $m>1$ là số nguyên dương cho trước.

Bài 5. Cho x,y,z là các số thực dương thoả mãn điều kiện $2x+4y+3z^2=68$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x^2+y^2+z^3$.

Lời giải

Giả sử P đạt min tại $x=a, y=b, z=c$ theo giả thiết ta có $2a+4b+3c^2=68$.

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$x^2 + a^2 \geq 2ax$

$y^2 + b^2 \geq 2by$

$z^3 + z^3 + c^3 \geq 3cz^2 \Leftrightarrow z^3 + \frac{c^3}{2} \geq \frac{3cz^2}{2}$

Cộng theo vế 3 bất đẳng thức trên ta được

$$x^2 + y^2 + z^3 + a^2 + b^2 + \frac{c^3}{2} \geq 2ax + 2by + \frac{3cz^2}{2}.$$

Chọn các số dương a,b,c sao cho $\frac{2a}{2} = \frac{2b}{4} = \frac{\frac{3c}{2}}{3} \Leftrightarrow b = c = 2a$.

Vậy ta có hệ phương trình $\begin{cases} 2a + 4b + 3c^2 = 68 \\ b = c = 2a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = c = 4 \end{cases}$.

Suy ra $P \geq a^2 + b^2 + c^3 = 84$.

Bài 6. Cho *x,y,z* là các số thực không âm thỏa mãn $x + y + z = 3$.

Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của biểu thức

$$P = \sqrt{x^2 - x + 1} + \sqrt{y^2 - y + 1} + \sqrt{z^2 - z + 1}.$$

Lời giải

Tìm giá trị lớn nhất của P

Nhận xét. Tìm một bất đẳng thức dạng $\sqrt{x^2 - x + 1} \leq mx + n$.

Công việc của ta là đi tìm m và n. Bất đẳng thức đối xứng với 3 biến x,y,z nên ta không thể quyết định xem biến nào bằng 0 và biến nào bằng 3. Vì vậy cách tốt nhất là tìm m và n sao cho dấu bằng đạt tại 0 và 1 đều thỏa mãn. Hay cách khác ta cần tìm m,n sao cho cả 0 và 3 là nghiệm của phương trình: $\sqrt{x^2 - x + 1} = mx + n$.

Vậy ta có hệ phương trình $\begin{cases} n = 1 \\ 3m + n = \sqrt{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{\sqrt{7} - 1}{3} \\ n = 1 \end{cases}$

Cuối cùng kiểm tra xem

$\sqrt{x^2 - x + 1} \leq 1 + \frac{\left(\sqrt{7} - 1\right)x}{3} \Leftrightarrow \frac{\left(1 + 2\sqrt{7}\right)x\left(x - 3\right)}{\sqrt{x^2 - x + 1} + 1 + \frac{\left(\sqrt{7} - 1\right)x}{3}} \leq 0$ (luôn đúng với $x \in \left[0; 3\right]$).

Vậy $P \le 3 + \dfrac{\left(\sqrt{7}-1\right)\left(x+y+z\right)}{3} = 3 + \sqrt{7} - 1 = 2 + \sqrt{7}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi 2 biến bằng 0 và một biến bằng 3.

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng $2+\sqrt{7}$ đạt tại $a=b=0, c=3$ hoặc các hoán vị.

Tìm giá trị nhỏ nhất của P

Ta có $\sqrt{x^2-x+1} = \sqrt{\dfrac{3\left(x-1\right)^2}{4} + \left(\dfrac{x+1}{2}\right)^2} \ge \dfrac{x+1}{2}$.

Tương tự ta có: $\sqrt{y^2-y+1} \ge \dfrac{y+1}{2}; \sqrt{z^2-z+1} \ge \dfrac{z+1}{2}$.

Cộng theo vế 3 bất đẳng thức trên ta được: $P \ge \dfrac{x+y+z+3}{2} = 3$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 3 đạt tại $x=y=z=1$.

Bài 7. Cho *x,y,z* là các số thực thỏa mãn điều kiện $xy+yz+zx=1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2+2y^2+5z^2$.

Lời giải

Ta chứng minh bất đẳng thức:

$x^2+2y^2+5z^2 \ge 2k\left(xy+yz+zx\right) = 2k$ với $k>0$ là số chọn sau.

Cộng thêm vào hai vế bất đẳng thức trên với $k\left(x^2+y^2+z^2\right)$ ta được:

$\left(k+1\right)x^2 + \left(k+2\right)y^2 + \left(k+5\right)z^2 \ge k\left(x+y+z\right)^2$.

Sử dụng bất đẳng thức C-S ta được:

$$\left(k+1\right)x^2+\left(k+2\right)y^2+\left(k+5\right)z^2 = \frac{x^2}{\frac{1}{k+1}} + \frac{y^2}{\frac{1}{k+2}} + \frac{z^2}{\frac{1}{k+5}} \ge \frac{\left(x+y+z\right)^2}{\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+5}}$$

Vậy ta chỉ cần chọn k dương sao cho:

$$\frac{1}{\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+5}} = k \Leftrightarrow \left(k-1\right)\left(k^2+5k+5\right) = 0 \xleftrightarrow{k>0} k=1.$$

Lời giải.

Ta có:

$$2x^2+3y^2+6z^2=\frac{x^2}{\frac{1}{2}}+\frac{y^2}{\frac{1}{3}}+\frac{z^2}{\frac{1}{6}}\ge\frac{\left(x+y+z\right)^2}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}=\left(x+y+z\right)^2$$

$$\Rightarrow P=x^2+2y^2+5z^2\ge 2\left(xy+yz+zx\right)=2$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x:y:z=\frac{1}{2}:\frac{1}{3}:\frac{1}{6}=3:2:1\Leftrightarrow x=3z,y=2z$

thay vào điều kiện ta có

$$3z^2+6z^2+2z^2=1\Leftrightarrow z=\pm\frac{1}{\sqrt{11}}\Rightarrow\left(x;y;z\right)=\left(\pm\frac{3}{\sqrt{11}};\pm\frac{2}{\sqrt{111}};\pm\frac{1}{\sqrt{11}}\right).$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 2 đạt tại $\left(x;y;z\right)=\left(\pm\frac{3}{\sqrt{11}};\pm\frac{2}{\sqrt{111}};\pm\frac{1}{\sqrt{11}}\right)$.

Bài 8. Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a^2+b^2+c^2=1$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=a^2b^3c^3$.

Lời giải

Phân tích chọn điểm rơi:

Giả sử P đạt giá trị nhỏ nhất tại $a=x,b=y,c=z$.

Khi đó theo điều kiện ta có: $x^2+y^2+z^2=1$.

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$\frac{2a}{x}+\frac{3b}{y}+\frac{4c}{z}\ge 9\sqrt[9]{\frac{a^2b^3c^4}{x^2y^3z^4}}.$$

Sử dụng bất đẳng thức C-S ta có:

$$\left(\frac{2a}{x}+\frac{3b}{y}+\frac{4c}{z}\right)^2\le\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(\frac{4}{x^2}+\frac{9}{y^2}+\frac{16}{z^2}\right)=\frac{4}{x^2}+\frac{9}{y^2}+\frac{16}{z^2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$a:b:\mathrm{c}=\frac{2}{x}:\frac{3}{y}:\frac{4}{z}\Leftrightarrow\frac{ax}{2}=\frac{by}{3}=\frac{cz}{4}\Leftrightarrow\frac{x^2}{2}=\frac{y^2}{3}=\frac{z^2}{4}.$$

Vậy ta chọn $x,y,z>0$ sao cho $\begin{cases}\frac{x^2}{2}=\frac{y^2}{3}=\frac{z^2}{4}\\ x^2+y^2+z^2=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{\sqrt{2}}{3}\\ y=\frac{\sqrt{3}}{3}\\ z=\frac{2}{3}\end{cases}$.

Lời giải chi tiết:

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$\frac{2a}{\frac{\sqrt{2}}{3}}+\frac{3b}{\frac{\sqrt{3}}{3}}+\frac{4c}{\frac{2}{3}}\ge 9\sqrt[9]{\frac{a^2b^3c^4}{\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^4}}.$$

Sử dụng bất đẳng thức C-S ta có:

$$\frac{2a}{\frac{\sqrt{2}}{3}}+\frac{3b}{\frac{\sqrt{3}}{3}}+\frac{4c}{\frac{2}{3}}\le\sqrt{\left(a^2+b^2+c^2\right)\left[\left(\frac{2}{\frac{\sqrt{2}}{3}}\right)^2+\left(\frac{3}{\frac{\sqrt{3}}{3}}\right)^2+\left(\frac{4}{\frac{2}{3}}\right)^2\right]}=9\cdot$$

Suy ra: $P=a^2b^3c^4\le\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{32\sqrt{3}}{6561}\cdot$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=\frac{\sqrt{2}}{3},b=\frac{\sqrt{3}}{3},\text{c}=\frac{2}{3}$.

Bài 9. Cho *x,y, z* là các số thực dương. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{2xy+4yz+3zx}{\left(x+y+z\right)^2}.$$

Lời giải

Ta có

$$P=2.\frac{x}{x+y+z}.\frac{y}{x+y+z}+4.\frac{y}{x+y+z}.\frac{z}{x+y+z}+3.\frac{z}{x+y+z}.\frac{x}{x+y+z}.$$

Đặt $a=\frac{x}{x+y+z},b=\frac{y}{x+y+z},c=\frac{z}{x+y+z},\left(a,b,c>0\right)$ ta có $a+b+c=1$.

Ta cần tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=2ab+4bc+3ca \text{ với } a+b+c=1.$$

Ta chọn các hằng số m,n,p dương sao cho

$$2ab+4bc+3ca=ma\left(b+c\right)+nb\left(c+a\right)+pc\left(a+b\right)$$

$$\Leftrightarrow\left(m+n\right)ab+\left(n+p\right)bc+\left(p+m\right)ca=2ab+4bc+3ca$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}m+n=2\\n+p=4\\p+m=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=\frac{1}{2}\\n=\frac{3}{2}\\p=\frac{5}{2}\end{cases}$$

Khi đó

$$P=\frac{1}{2}a\left(b+c\right)+\frac{3}{2}b\left(c+a\right)+\frac{5}{2}c\left(a+b\right)$$

$$=\frac{1}{2}a\left(1-a\right)+\frac{3}{2}b\left(1-b\right)+\frac{5}{2}c\left(1-c\right)$$

$$=\frac{9}{8}-\frac{1}{2}\left[\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+3\left(b-\frac{1}{2}\right)^2+5\left(c-\frac{1}{2}\right)^2\right]$$

$$=\frac{9}{8}-\frac{1}{2}\left[\frac{\left(a-\frac{1}{2}\right)^2}{1}+\frac{\left(b-\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{1}{3}}+\frac{\left(c-\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{1}{5}}\right]$$

$$\le\frac{9}{8}-\frac{\left(a-\frac{1}{2}+b-\frac{1}{2}+c-\frac{1}{2}\right)^2}{2\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)}=\frac{24}{23}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases}a+b+c=1\\ \left(a-\frac{1}{2}\right):\left(b-\frac{1}{2}\right):\left(c-\frac{1}{2}\right)=1:\frac{1}{3}:\frac{1}{5}\end{cases}\Rightarrow x=3y-1=5z-2.$$

Bài tập tương tự

1) Cho x,y,z là các số thực

Bằng cách tương tự ta tổng quát bài toán sau đây

Cho a,b,c là các số thực không âm thoả mãn $a+b+c=k,\left(k>0\right)$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$P=m.ab+n.bc+p.ca,\left(m,n,p>0\right)$.

Bài 10. Chứng minh với mọi $0\le x\le 1$ ta có $x\left(9\sqrt{1+x^2}+13\sqrt{1-x^2}\right)\le 16$.

Lời giải

Ta có

$$VT=\frac{9ax\sqrt{1+x^2}}{a}+\frac{13bx\sqrt{1-x^2}}{b}\le\frac{9\left(a^2x^2+1+x^2\right)}{2a}+\frac{13\left(b^2x^2+1-x^2\right)}{2b}.$$

Ta chọn a và b dương sao cho hệ số của x^2 triệt tiêu và thoả mãn dấu bằng của bất đẳng thức AM – GM

$$\begin{cases}\dfrac{9\left(a^2+1\right)}{2a}+\dfrac{13\left(b^2-1\right)}{2b}=0\\ a^2x^2=1+x^2\\ b^2x^2=1-x^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2-1=b^2+1\\ \dfrac{9\left(a^2+1\right)}{2a}+\dfrac{13\left(b^2-1\right)}{2b}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{3}{2}\\ b=\dfrac{1}{2}\end{cases}.$$

Lời giải chi tiết:

$$x\left(9\sqrt{1+x^2}+13\sqrt{1-x^2}\right)=6.\frac{3}{2}x\sqrt{1+x^2}+26.\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}$$

$$\le 3\left(\frac{9x^2}{4}+1+x^2\right)+13\left(\frac{x^2}{4}+1-x^2\right)=16$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}\dfrac{9x^2}{4}=1+x^2\\ \dfrac{x^2}{4}=1-x^2\end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

C. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1. Cho x,y,z là các số thực không âm thoả mãn điều kiện $xy+yz+zx=1$.

Chứng minh rằng $10x^2+10y^2+z^2\ge 4$.

Bài 2. Cho *x,y,z* là các số thực dương có tổng bằng 3. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{15}{x}+\dfrac{5}{y^3}+\dfrac{3}{z^5}$.

Bài 3. Cho ba số thực *x,y,z* thuộc đoạn $[0;1]$ và $x+y+z=2$.

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\sqrt{x^2-4x+5}+\sqrt{y^2-4y+5}+\sqrt{z^2-4z+5}.$$

Bài 4. Cho *a,b,c* là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$10a^2+10b^2+c^2\ge 4\left(ab+bc+ca\right).$$

Bài 5. Cho x,y,z là các số thực không âm thoả mãn điều kiện $x^2+y^2+z^2=1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x^3+2y^3+3z^3$.

Bài 6. Cho *x,y,z* là các số thực không âm thỏa mãn $x+y+z=1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x^3+y^3+\dfrac{1}{2}z^3$.

D. HƯỚNG DẪN GIẢI – ĐÁP SỐ

Bài 1. Cách 1: Ta cần chứng minh

$$10x^2 + 10y^2 + z^2 \geq 4(xy + yz + zx)$$

$$\Leftrightarrow 12x^2 + 12y^2 + 3z^2 \geq 2(x + y + z)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{\frac{1}{12}} + \frac{y^2}{\frac{1}{12}} + \frac{z^2}{\frac{1}{3}} \geq 2(x + y + z)^2$$

Bất đẳng thức luôn đúng theo C-S, thật vậy

$$\frac{x^2}{\frac{1}{12}} + \frac{y^2}{\frac{1}{12}} + \frac{z^2}{\frac{1}{3}} \geq \frac{(x + y + z)^2}{\frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{3}} = 2(x + y + z)^2$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} x : y : z = \frac{1}{12} : \frac{1}{12} : \frac{1}{3} \\ xy + yz + zx = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = \frac{1}{3} \\ z = \frac{4}{3} \end{cases}$.

<u>**Cách 2:**</u> Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$$2x^2 + 2y^2 \geq 4xy$$

$$8x^2 + \frac{z^2}{2} \geq 4xz$$

$$8y^2 + \frac{z^2}{2} \geq 4yz$$

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên ta được

$$10x^2 + 10y^2 + z^2 \geq 4(xy + yz + zx) = 4.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} x = y \\ 4x = z \\ 4y = z \\ xy + yz + zx = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = \frac{1}{3} \\ z = \frac{4}{3} \end{cases}$.

Bài 2. Giả sử P đạt min tại $x = a, y = b, z = c$ theo giả thiết ta có $a + b + c = 3$.

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$$15\left(\frac{1}{x}+\frac{x}{a^2}\right)\ge\frac{30}{a};$$

$$5\left(\frac{1}{y^3}+\frac{y}{b^4}+\frac{y}{b^4}+\frac{y}{b^4}\right)\ge\frac{20}{b^3};$$

$$3\left(\frac{1}{z^5}+\frac{z}{c^6}+\frac{z}{c^6}+\frac{z}{c^6}+\frac{z}{c^6}+\frac{z}{c^6}\right)\ge\frac{18}{c^5}.$$

Cộng theo vế 3 bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{15}{x}+\frac{5}{y^3}+\frac{3}{z^5}+\frac{15x}{a^2}+\frac{15y}{b^4}+\frac{15z}{c^6}\ge\frac{30}{a}+\frac{20}{b^3}+\frac{18}{c^5}.$$

Ta chọn các số dương a,b,c thoả mãn $\frac{1}{a^2}=\frac{1}{b^4}=\frac{1}{c^6}$.

Vậy ta có hệ phương trình $\begin{cases}a+b+c=3\\ \frac{1}{a^2}=\frac{1}{b^4}=\frac{1}{c^6}\end{cases}\Leftrightarrow a=b=c=1$.

Suy ra $P\ge\frac{15}{a}+\frac{5}{b^3}+\frac{3}{c^5}=23$.

Bài 4. Cộng thêm vào hai vế của bất đẳng thức đại lượng $2\left(a^2+b^2+c^2\right)$ ta cần chứng minh: $12a^2+12b^2+3c^2\ge 2\left(a+b+c\right)^2$.

Sử dụng bất đẳng thức C-S ta có:

$$12a^2+12b^2+3c^2=\frac{a^2}{\frac{1}{12}}+\frac{b^2}{\frac{1}{12}}+\frac{c^2}{\frac{1}{3}}\ge\frac{\left(a+b+c\right)^2}{\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{3}}=2\left(a+b+c\right)^2.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a:b:c=\frac{1}{12}:\frac{1}{12}:\frac{1}{3}\Leftrightarrow a=b=\frac{1}{4}c$.

Bài 6. Phân tích tìm điểm rơi

Biểu thức của P đối xứng với x,y nên dấu bằng xảy ra tại $x=y=a,z=b$. Khi đó theo điều kiện ta có: $2a+b=1$.

Khi đó áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta được:

$$b^2\left(a^3+a^3+x^3\right)\ge 3a^2b^2x$$

$$b^2\left(a^3+a^3+y^3\right)\ge 3a^2b^2y$$

$$a^2\left(b^3+b^3+z^3\right)\ge 3a^2b^2z$$

Cộng theo vế 3 bất đẳng thức trên ta được:

$$b^2\left(x^3+y^3\right)+a^2z^3+4a^3b^2+2a^2b^3\ge 3a^2b^2\left(x+y+z\right)=3a^2b^2$$

$$\Rightarrow b^2\left(x^3+y^3\right)+a^2z^3\ge 3a^2b^2-4a^3b^2-2a^2b^3 \ (1)$$

Ta chọn a,b không âm sao cho: $\dfrac{b^2}{1}=\dfrac{a^2}{\frac{1}{2}}\Leftrightarrow b^2=2a^2$.

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} b^2=2a^2 \\ 2a+b=1 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{2-\sqrt{2}}{2} \\ b=\sqrt{2}-1 \end{cases}$.

Lời giải.

Thay a,b vào bất đẳng thức (1) ta được:

$$\left(3-2\sqrt{2}\right)\left(x^3+y^3\right)+\frac{3-2\sqrt{2}}{2}z^3\ge\frac{17-12\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow x^3+y^3+\frac{1}{2}z^3\ge\frac{3-2\sqrt{2}}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}, z=\sqrt{2}-1$.

<u>Cách 2:</u> Đây là dạng toán quen thuộc sử dụng tính đơn điệu hàm số.

Ta có:

$$P=\left(x+y\right)^3-3xy\left(x+y\right)+\frac{1}{2}z^3\ge\left(x+y\right)^3-\frac{3}{4}\left(x+y\right)^2\left(x+y\right)+\frac{1}{2}z^3$$

$$\Rightarrow f(z)=\frac{1}{4}\left(1-z\right)^3+\frac{1}{2}z^3$$

Xét hàm số $f(z)=\dfrac{1}{4}\left(1-z\right)^3+\dfrac{1}{2}z^3$ liên tục trên đoạn $\left[0;1\right]$ ta có:

$$f'(z)=-\frac{3}{4}\left(1-z\right)^2+\frac{3}{2}z^2;\ f'(z)=0\xleftrightarrow{z\in[0;1]}z=\sqrt{2}-1.$$

Ta có f'(z) đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua $z=\sqrt{2}-1$ nên f(z) đạt cực tiểu tại $z=\sqrt{2}-1$ hay $P\ge f(z)\ge f(\sqrt{2}-1)=\dfrac{3-2\sqrt{2}}{2}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\dfrac{3-2\sqrt{2}}{2}$ đạt tại $x=y=\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}, z=\sqrt{2}-1$.

CHỦ ĐỀ 7: BẤT ĐẲNG THỨC HOLDER VÀ ỨNG DỤNG

A. NỘI DUNG PHƯƠNG PHÁP

Dưới đây tôi trình bày bất đẳng thức Holder cho 3 dãy số mỗi dãy gồm 3 số dương.

Cho a, b, c, x, y, z, m, n, p là các số thực dương ta có

$$\left(a^3+b^3+c^3\right)\left(x^3+y^3+z^3\right)\left(m^3+n^3+p^3\right)\ge\left(axm+byn+czp\right)^3.$$

Chứng minh. Sử dụng bất đẳng thức AM – GM ta có

$$\frac{a^3}{a^3+b^3+c^3}+\frac{x^3}{x^3+y^3+z^3}+\frac{m^3}{m^3+n^3+p^3}$$
$$\ge\frac{3axm}{\sqrt[3]{\left(a^3+b^3+c^3\right)\left(x^3+y^3+z^3\right)\left(m^3+n^3+p^3\right)}}$$

Tương tự ta có

$$\frac{b^3}{a^3+b^3+c^3}+\frac{y^3}{x^3+y^3+z^3}+\frac{n^3}{m^3+n^3+p^3}$$
$$\ge\frac{3byn}{\sqrt[3]{\left(a^3+b^3+c^3\right)\left(x^3+y^3+z^3\right)\left(m^3+n^3+p^3\right)}}$$
$$\frac{c^3}{a^3+b^3+c^3}+\frac{z^3}{x^3+y^3+z^3}+\frac{p^3}{m^3+n^3+p^3}$$
$$\ge\frac{3czp}{\sqrt[3]{\left(a^3+b^3+c^3\right)\left(x^3+y^3+z^3\right)\left(m^3+n^3+p^3\right)}}$$

Cộng lại theo vế 3 bất đẳng thức trên ta có điều phải chứng minh.

Hệ quả 1. Cho a,b,c là các số thực dương ta có

$$\left(1+a\right)\left(1+b\right)\left(1+c\right)\ge\left(1+\sqrt[3]{abc}\right)^3.$$

B. BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Chứng minh với mọi a,b,c là các số thực dương ta có

$$2\left(a^2+1\right)\left(b^2+1\right)\left(c^2+1\right)\ge\left(a+1\right)\left(b+1\right)\left(c+1\right)\left(abc+1\right).$$

Lời giải

Nhận xét. Với $a=b=c$ bất đẳng thức trở thành

$$2\left(a^2+1\right)^3\ge\left(a^3+1\right)\left(a+1\right)^3\Leftrightarrow\left(a-1\right)^4\left(a^2+a+1\right)\ge 0 \text{ (luôn đúng).}$$

Vậy ta có

$$2\left(a^2+1\right)^3 \ge (a+1)^3\left(a^3+1\right)$$

$$2\left(b^2+1\right)^3 \ge (b+1)^3\left(b^3+1\right)$$

$$2\left(c^2+1\right)^3 \ge (c+1)^3\left(c^3+1\right)$$

Nhân theo vế 3 bất đẳng thức trên ta được

$$8\left(a^2+1\right)^3\left(b^2+1\right)^3\left(c^2+1\right)^3 \ge (a+1)^3(b+1)^3(c+1)^3\left(a^3+1\right)\left(b^3+1\right)\left(c^3+1\right).$$

Vậy ta chỉ cần chứng minh $\left(a^3+1\right)\left(b^3+1\right)\left(c^3+1\right) \ge (1+abc)^3$.

Đây chính là bất đẳng thức Holder. Bất đẳng thức được chứng minh đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài 2. Chứng minh với mọi a,b,c là các số thực dương ta có

$$\frac{a}{\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}}+\frac{b}{\sqrt{2c^2+2a^2-b^2}}+\frac{c}{\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}} \ge \sqrt{3}.$$

Lời giải

Gọi P là biểu thức vế trái và đặt

$$S=a\left(2b^2+2c^2-a^2\right)+b\left(2c^2+2a^2-b^2\right)+c\left(2a^2+2b^2-c^2\right).$$

Sử dụng bất đẳng thức Holder ta có $P.P.S \ge (a+b+c)^3 \Rightarrow P^2 \ge \frac{(a+b+c)^3}{S}$.

Vậy ta chứng minh

$$\frac{(a+b+c)^3}{S} \ge 3$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)^3 \ge 3\left[a\left(2b^2+2c^2-a^2\right)+b\left(2c^2+2a^2-b^2\right)+c\left(2a^2+2b^2-c^2\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow 4\left(a^3+b^3+c^3\right)+6abc \ge 4\left[ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)\right]$$

Chú ý $a^3+b^3+c^3+3abc \ge ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)$

$$a^3+b^3+c^3 \ge 3abc$$

Cộng theo vế 2 bất đẳng thức trên ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bài 3. Cho a,b,c là độ dài 3 cạnh một tam giác thoả mãn điều kiện

$$a^2+b^2+c^2=3.$$

Chứng minh rằng $\frac{a}{\sqrt{b+c-a}}+\frac{b}{\sqrt{c+a-b}}+\frac{c}{\sqrt{a+b-c}} \ge 3$.

Lời giải

Gọi P là biểu thức vế trái và đặt $S=a(b+c-a)+b(c+a-b)+c(a+b-c)$.

Sử dụng bất đẳng thức Holder ta có $P.P.S\geq(a+b+c)^3$.

Vậy ta cần chứng minh $(a+b+c)^3\geq 9S$

$\Leftrightarrow(a+b+c)^3\geq 9\left[2(ab+bc+ca)-3\right]$.

Đặt $x=a+b+c,\left(x\in\left[\sqrt{3};3\right]\right)$ ta có $2(ab+bc+ca)=x^2-3$ ta cần chứng minh

$$x^3\geq 9\left(x^2-6\right)\Leftrightarrow(x-3)\left(x^2-6x-18\right)\geq 0,\forall x\in\left[\sqrt{3};3\right].$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài 4. Cho a,b,c là các số thực dương có tích bằng 1.

Chứng minh rằng $\dfrac{a}{\sqrt{b+c+7}}+\dfrac{b}{\sqrt{c+a+7}}+\dfrac{c}{\sqrt{a+b+7}}\geq 1$.

Lời giải

Gọi P là biểu thức vế trái và đặt $S=a(b+c+7)+b(c+a+7)+c(a+b+7)$.

Sử dụng bất đẳng thức Holder ta có $P.P.S\geq(a+b+c)^3$.

Vậy ta cần chứng minh $(a+b+c)^3\geq S$

$\Leftrightarrow(a+b+c)^3\geq 2(ab+bc+ca)+7(a+b+c)$.

Ta có $ab+bc+ca\leq\dfrac{(a+b+c)^2}{3}$.

Vậy ta chứng minh $(a+b+c)^3\geq\dfrac{2}{3}(a+b+c)^2+7(a+b+c)$

$$\Leftrightarrow 3(a+b+c)^2-2(a+b+c)-21\geq 0$$
$$\Leftrightarrow(a+b+c-3)\left[3(a+b+c)+7\right]\geq 0$$

Bất đẳng thức cuối luôn đúng do $a+b+c\geq 3\sqrt[3]{abc}=3$.

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài 5. Cho x,y,z là độ dài 3 cạnh một tam giác.

Chứng minh rằng $\dfrac{1}{\sqrt{x+y-z}}+\dfrac{1}{\sqrt{y+z-x}}+\dfrac{1}{\sqrt{z+x-y}}\geq\dfrac{x+y+z}{\sqrt{xyz}}$.

Lời giải

Gọi P là biểu thức vế trái và đặt $S=x^3(y+z-x)+y^3(z+x-y)+z^3(x+y-z)$.

Sử dụng bất đẳng thức Holder ta có $P.P.S \ge \left(x+y+z\right)^3$.

Vậy ta cần chứng minh $\dfrac{\left(x+y+z\right)^3}{S} \ge \left(\dfrac{x+y+z}{\sqrt{xyz}}\right)^2$

$\Leftrightarrow xyz\left(x+y+z\right) \ge x^3\left(y+z-x\right)+y^3\left(z+x-y\right)+z^3\left(x+y-z\right)$

$\Leftrightarrow x^4+y^4+z^4+xyz\left(x+y+z\right) \ge xy\left(x^2+y^2\right)+yz\left(y^2+z^2\right)+zx\left(z^2+x^2\right)$

Bất đẳng thức cuối luôn đúng(xem thêm chủ đề biến đổi tương đương).

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z$.

Bài 6. Cho a,b,c là các số thực không âm thoả mãn $ab+bc+ca>0$.

Chứng minh rằng $\sqrt{\dfrac{a}{b+c}}+\sqrt{\dfrac{b}{c+a}}+\sqrt{\dfrac{c}{a+b}} \ge 2$.

Lời giải

Nhận xét. Bất đẳng thức trên đã được chứng minh đơn giản bằng bất đẳng thức AM – GM dưới đây ta tiếp cận bài toán theo bất đẳng thức Holder.

Gọi P là biểu thức vế trái và đặt $S=a^2\left(b+c\right)+b^2\left(c+a\right)+c^2\left(a+b\right)$.

Sử dụng bất đẳng thức Holder ta có $P.P.S \ge \left(a+b+c\right)^3$.

Vậy ta cần chứng minh $\left(a+b+c\right)^3 \ge 4S$

$\Leftrightarrow a^3+b^3+c^3+6abc \ge ab\left(a+b\right)+bc\left(b+c\right)+ca\left(c+a\right)$

Bất đẳng thức cuối luôn đúng do

$a^3+b^3+c^3+3abc \ge ab\left(a+b\right)+bc\left(b+c\right)+ca\left(c+a\right)$

$3abc \ge 0$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi có 1 số bằng 0 và 2 số còn lại bằng nhau.

Bài 7. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện $a^2+b^2+c^2=a+b+c$.

Chứng minh rằng $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 \le ab+bc+ca$.

Lời giải

Ta có

$\left(a^2+b^2+c^2\right)^2=\left(a+b+c\right)^2$

$\Rightarrow 2\left(ab+bc+ca-a^2b^2-b^2c^2-c^2a^2\right)=a^4+b^4+c^4-a^2-b^2-c^2$

Vậy ta chứng minh $a^4+b^4+c^4 \ge a^2+b^2+c^2$.

Sử dụng bất đẳng thức Holder ta có

$$(a+b+c)^2\left(a^4+b^4+c^4\right)\ge\left(a^2+b^2+c^2\right)^3\Rightarrow a^4+b^4+c^4\ge a^2+b^2+c^2.$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài 8. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện $a^2+b^2+c^2=3$.

Chứng minh rằng $\sqrt{\dfrac{a^5}{a^3+2bc}}+\sqrt{\dfrac{b^5}{b^3+2ca}}+\sqrt{\dfrac{c^5}{c^3+2ab}}\ge\sqrt{3}$.

Lời giải

Gọi P là biểu thức vế trái và đặt $S=a\left(a^3+2bc\right)+b\left(b^3+2ca\right)+c\left(c^3+2ab\right)$.

Sử dụng bất đẳng thức Holder ta có $P^2S\ge\left(a^2+b^2+c^2\right)^3=27$.

Vậy ta chỉ cần chứng minh

$$a\left(a^3+2bc\right)+b\left(b^3+2ca\right)+c\left(c^3+2ab\right)\le 9$$

$$\Leftrightarrow a^4+b^4+c^4+6abc\le\left(a^2+b^2+c^2\right)^2$$

$$\Leftrightarrow a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\ge 3abc$$

Bất đẳng thức cuối đúng bởi vì theo AM – GM ta có

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\ge\sqrt{3a^2b^2c^2\left(a^2+b^2+c^2\right)}=3abc.$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

C. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1. Chứng minh với mọi a,b,c là các số thực dương ta có

$$3\left(a^3+b^3+c^3\right)^2\ge\left(a^2+b^2+c^2\right)^2.$$

Bài 2. Cho a,b,c là các số thực dương có tổng bằng 1.

Chứng minh rằng $\dfrac{a}{\sqrt{b+c}}+\dfrac{b}{\sqrt{c+a}}+\dfrac{c}{\sqrt{a+b}}\ge\sqrt{\dfrac{3}{2}}$.

Bài 3. Chứng minh với mọi a,b,c là các số thực dương ta có

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\ge 1.$$

Bài 4. Cho a,b,c là các số thực dương có tích bằng 1.

Chứng minh rằng $\dfrac{a}{\sqrt{b^2+c^2+7}}+\dfrac{b}{\sqrt{c^2+a^2+7}}+\dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2+7}}\ge 1$.

Bài 5. Cho a,b,c là các số thực không âm có tổng bằng 3.

Chứng minh rằng $\sqrt{\frac{a}{1+b+bc}}+\sqrt{\frac{b}{1+c+ca}}+\sqrt{\frac{c}{1+a+ab}}\ge\sqrt{3}$.

Bài 6. Cho a,b,c là các số thực dương chứng minh rằng

$$\left(a^5-a^2+3\right)\left(b^5-b^2+3\right)\left(c^5-c^2+3\right)\ge(a+b+c)^3.$$

Bài 7. Cho x,y,z là các số thực dương thoả mãn điều kiện $x+y+z=xy+yz+zx$.

Chứng minh rằng $(x+y+z)\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)^2\ge 27$.

Bài 8. Cho a,b,c là các số thực dương có tổng bằng 3.

Chứng minh rằng $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\ge ab+bc+ca$.

Bài 9. Cho x,y,z là các số thực dương.

Chứng minh rằng $\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}\ge 3\sqrt[4]{\frac{x^4+y^4+z^4}{3}}$.

Bài 10. Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\left(1+a^3\right)\left(1+b^3\right)\left(1+c^3\right)\ge\left(1+ab^2\right)\left(1+bc^2\right)\left(1+ca^2\right).$$

Bài 11. Cho a,b,c,x,y,z là các số thực dương. Chứng minh

$$\frac{a^3}{x}+\frac{b^3}{y}+\frac{c^3}{z}\ge\frac{(a+b+c)^3}{3(x+y+z)}.$$

Bài 12. Cho *a,b,c* là các số thực dương.

Chứng minh rằng $\frac{1}{(1+a)^3}+\frac{1}{(1+b)^3}+\frac{1}{(1+c)^3}\ge\frac{3}{4(1+abc)}$.

Bài 13. Cho a,b,c là các số thực dương có tổng bằng 1. Chứng minh

$$\frac{a}{\sqrt[3]{a+2b}}+\frac{b}{\sqrt[3]{b+2c}}+\frac{c}{\sqrt[3]{c+2a}}\ge 1.$$

Bài 14. Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh

$$9\left(a^4+1\right)\left(b^4+1\right)\left(c^4+1\right)\ge 8\left(a^2b^2c^2+abc+1\right)^2.$$

Bài 15. Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh

$$\sqrt{\frac{a+b}{c}}+\sqrt{\frac{b+c}{a}}+\sqrt{\frac{c+a}{b}}\ge 4(a+b+c)\sqrt{\frac{a+b+c}{3(a+b)(b+c)(c+a)}}.$$

Bài 16. Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh

$$\frac{a}{(b+c)^3}+\frac{b}{(a+c)^3}+\frac{c}{(a+b)^2}\ge\frac{27}{8(a+b+c)^2}.$$

Bài 17. Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh

$$\sqrt{\frac{(a+b)^3}{8ab(4a+4b+c)}}+\sqrt{\frac{(b+c)^3}{8bc(4b+4c+a)}}+\sqrt{\frac{(c+a)^3}{8ca(4c+4a+b)}}\ge 1.$$

Bài 18. Cho a,b,c là các số thực không âm. Chứng minh

$$\frac{a}{\sqrt{(b+c)^2+5c^2}}+\frac{b}{\sqrt{(c+a)^2+5a^2}}+\frac{c}{\sqrt{(a+b)^2+5b^2}}\ge 1.$$

Bài 19. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện $ab+bc+ca=1$.

Chứng minh rằng $abc\left(\sqrt[3]{6a+\frac{1}{c}}+\sqrt[3]{6b+\frac{1}{a}}+\sqrt[3]{6c+\frac{1}{b}}\right)\le 1$.

Bài 20. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện

$$a^3+b^3+c^3=a^4+b^4+c^4.$$

Chứng minh rằng $\frac{a}{a^2+b^3+c^3}+\frac{b}{a^3+b^2+c^3}+\frac{c}{a^3+b^3+c^2}\ge 1$.

Bài 21. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện

$$a+b+c=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}.$$

Chứng minh rằng $\sqrt[3]{7a^2b+1}+\sqrt[3]{7b^2c+1}+\sqrt[3]{7c^2a+1}\le 2(a+b+c)$.

Bài 22. Cho a,b,c là các số thực dương có tổng bằng 1. Chứng minh

$$4abc\left[\frac{a}{(a+1)^2}+\frac{b}{(b+1)^2}+\frac{c}{(c+1)^2}\right]+1\ge\frac{13}{4}(ab+bc+ca).$$

D. HƯỚNG DẪN GIẢI – ĐÁP SỐ

Bài 1. Sử dụng bất đẳng thức Holder ta có

$$3\left(a^3+b^3+c^3\right)^2=(1+1+1)\left(a^3+b^3+c^3\right)^2\ge\left(a^2+b^2+c^2\right)^3.$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bài 2. Gọi P là biểu thức vế trái và đặt $S=a(b+c)+b(c+a)+c(a+b)$.

Sử dụng bất đẳng thức Holder ta có $P.P.S\ge(a+b+c)^3=1$.

Mặt khác $S=2(ab+bc+ca)\le\frac{2}{3}(a+b+c)^2=\frac{2}{3}\Rightarrow P\ge\sqrt{\frac{3}{2}}$.

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Bài 3. Gọi P là biểu thức vế trái và đặt

$$S=a\left(a^2+8bc\right)+b\left(b^2+8ca\right)+c\left(c^2+8ab\right).$$

Sử dụng bất đẳng thức Holder ta có $P.P.S\ge(a+b+c)^3$

Vậy ta cần chứng minh $(a+b+c)^3\ge S$

$$\Leftrightarrow(a+b+c)^3\ge a\left(a^2+8bc\right)+b\left(b^2+8ca\right)+c\left(c^2+8ab\right)$$

$$\Leftrightarrow(a+b)(b+c)(c+a)\ge 8abc$$

Bất đẳng thức hiển nhiên đúng theo AM – GM. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bài 4. Gọi P là biểu thức vế trái và đặt

$$S=a\left(b^2+c^2+7\right)+b\left(c^2+a^2+7\right)+c\left(a^2+b^2+7\right).$$

Sử dụng bất đẳng thức Holder ta có $P.P.S\ge(a+b+c)^3$.

Vậy ta cần chứng minh $(a+b+c)^3\ge S$

$$\Leftrightarrow(a+b+c)^3\ge 7(a+b+c)+ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)$$

$$\Leftrightarrow(a+b+c)^3\ge 7(a+b+c)+(a+b+c)(ab+bc+ca)-3abc$$

$$\Leftrightarrow(a+b+c)^3\ge 7(a+b+c)+(a+b+c)(ab+bc+ca)-3$$

Luôn đúng. Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài 5. Gọi P là biểu thức vế trái và đặt

$$S=a(1+b+bc)+b(1+c+ca)+c(1+a+ab).$$

Sử dụng bất đẳng thức Holder ta có $P.P.S\ge\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}+c^{\frac{2}{3}}\right)^3$.

Vậy ta cần chứng minh $\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}+c^{\frac{2}{3}}\right)^3\ge 3(3+ab+bc+ca+3abc)$

$$\Leftrightarrow\sum a^2+3\sum a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{2}{3}}\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)+6(abc)^{\frac{2}{3}}\ge 9+3(ab+bc+ca)+9abc.$$

Sử dụng bất đẳng thức AM – GM ta có $\sum a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{2}{3}}\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)\ge 2(ab+bc+ca)$.

Vậy ta cần chứng minh $ab+bc+ca+6(abc)^{\frac{2}{3}}\ge 9abc$.

Bất đẳng thức cuối luôn đúng do

$$ab+bc+ca+6(abc)^{\frac{2}{3}}\ge 9(abc)^{\frac{2}{3}}\ge 9abc \text{ vì } abc\le\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3=1.$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$ hoặc $a=3, b=c=0$ và các hoán vị.

Bài 6. Chú ý $a^5-a^2+3-(a^3+2)=(a-1)^2(a+1)(a^2+a+1)\ge 0$.

Thiết lập tương tự và ta chứng minh

$$(a^3+1+1)(1+b^3+1)(1+1+c^3)\ge(a+b+c)^3.$$

Đây chính là bất đẳng thức Holder.

Bài 7. Sử dụng bất đẳng thức Holder ta có

$$(x^2+y^2+z^2)(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})^2\ge(x+y+z)^3.$$

Vậy ta cần chứng minh $\dfrac{(x+y+z)^4}{x^2+y^2+z^2}\ge 27$

$\Leftrightarrow (x+y+z)^4\ge 27(x+y+z)(x+y+z-2)$

$\Leftrightarrow (x+y+z)^3+54\ge 27(x+y+z)$

$\Leftrightarrow (x+y+z-3)^2(x+y+z+6)\ge 0$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$.

Bài 8. Sử dụng bất đẳng thức Holder ta có

$$(a^2+b^2+c^2)(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})^2\ge(a+b+c)^3=27.$$

Vậy ta cần chứng minh $27\ge(ab+bc+ca)^2(a^2+b^2+c^2)$.

Bất đẳng thức cuối đúng theo AM – GM

$$(ab+bc+ca)^2(a^2+b^2+c^2)\le\left(\frac{2(ab+bc+ca)+a^2+b^2+c^2}{3}\right)^3=27.$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài 9. Gọi P là biểu thức vế trái và đặt $S=x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2$.

Sử dụng bất đẳng thức Holder ta có $P.P.S\ge(x^2+y^2+z^2)^3$.

Ta cần chứng minh

$$\frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}{x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2} \geq 9\sqrt{\frac{x^4+y^4+z^4}{3}}$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2+y^2+z^2\right)^3 \geq 3\left(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2\right)\sqrt{3\left(x^4+y^4+z^4\right)}$$

Đặt $a=x^2+y^2+z^2, b=x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2 \Rightarrow x^4+y^4+z^4=a^2-2b$.

Bất đẳng thức trở thành $a^3 \geq 3b\sqrt{3\left(a^2-2b\right)}$

$$\Leftrightarrow a^6-27a^2b+54b^3 \geq 0 \Leftrightarrow \left(a^2-3b\right)^2\left(a^2+6b\right) \geq 0.$$

Luôn đúng. Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z$.

Bài tập tương tự

Chứng minh x,y,z là các số thực dương thoả mãn $x^4+y^4+z^4=3$ ta có

$$\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x} \geq 3.$$

Bài 10. Sử dụng bất đẳng thức Holder ta có

$$\left(1+a^3\right)\left(1+b^3\right)\left(1+b^3\right) \geq \left(1+ab^2\right)^3$$

$$\left(1+b^3\right)\left(1+c^3\right)\left(1+c^3\right) \geq \left(1+bc^2\right)^3.$$

$$\left(1+c^3\right)\left(1+a^3\right)\left(1+a^3\right) \geq \left(1+ca^2\right)^3$$

Nhân theo vế 3 bất đẳng thức trên ta có điều phải chứng minh.

Bài 11. Sử dụng bất đẳng thức Holder ta có

$$(1+1+1)(x+y+z)\left(\frac{a^3}{x}+\frac{b^3}{y}+\frac{c^3}{z}\right) \geq (a+b+c)^3$$

$$\Rightarrow \frac{a^3}{x}+\frac{b^3}{y}+\frac{c^3}{z} \geq \frac{(a+b+c)^3}{3(x+y+z)}$$

Bất đẳng thức được chứng minh.

Bài 12. Bất đẳng thức tương đương với:

$$\frac{1+abc}{(1+a)^3}+\frac{1+abc}{(1+b)^3}+\frac{1+abc}{(1+c)^3} \geq \frac{3}{4}.$$

Sử dụng bất đẳng thức Holder ta được:

$$(1+abc)\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{a}{c}\right)\ge(1+a)^3\Rightarrow\frac{1+abc}{(1+a)^3}\ge\frac{bc}{(a+b)(a+c)}.$$

Tương tự: $\dfrac{1+abc}{(1+b)^3}\ge\dfrac{ac}{(b+a)(b+c)};\dfrac{1+abc}{(1+c)^3}\ge\dfrac{ab}{(c+a)(c+b)}$.

Cộng theo vế 3 bất đẳng thức trên và cần chứng minh

$$\frac{bc}{(a+b)(a+c)}+\frac{ac}{(b+a)(b+c)}+\frac{ab}{(c+a)(c+b)}\ge\frac{3}{4}.$$

$$\Leftrightarrow ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)\ge\frac{3}{4}(a+b)(b+c)(c+a).$$

$$\Leftrightarrow ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)\ge 6abc.$$

Bất đẳng thức cuối theo AM-GM.

Bài toán được chứng minh đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bài 13. Gọi P là biểu thức vế trái và đặt

$$S=a(a+2b)+b(b+2c)+c(c+2a)=(a+b+c)^2=1.$$

Sử dụng bất đẳng thức Holder ta có $P.P.P.S\ge(a+b+c)^4\Leftrightarrow P^3\ge1\Leftrightarrow P\ge1$.

Bất đẳng thức được chứng minh đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\dfrac{1}{3}$.

Bài 14. Với $a=b=c$ bất đẳng thức trở thành

$$9\left(a^4+1\right)^3\ge8\left(a^6+a^3+1\right)^2$$

$$\Leftrightarrow 9\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)^3\ge8\left(a^3+\frac{1}{a^3}+1\right)^2.$$

Đặt $x=a+\dfrac{1}{a},(x\ge2)$ bất đẳng thức trở thành

$$9\left(x^2-2\right)^3\ge8\left(x^3-3x+1\right)^2\Leftrightarrow(x-2)^2\left(x\left(x^3-8\right)+4\left(x^3-5\right)+6x^2\right)\ge0.$$

Bất đẳng thức luôn đúng với $x\ge2$.

Áp dụng ta có $9\left(a^4+1\right)^3\ge8\left(a^6+a^3+1\right)^2$

$$9\left(b^4+1\right)^3\ge8\left(b^6+b^3+1\right)^2$$

$$9\left(c^4+1\right)^3\ge8\left(c^6+c^3+1\right)^2$$

Nhân theo vế 3 bất đẳng thức trên ta được

$$9^3\left(a^4+1\right)^3\left(b^4+1\right)^3\left(c^4+1\right)^3\ge 8^3\left(a^6+a^3+1\right)^2\left(b^6+b^3+1\right)^2\left(c^6+c^3+1\right)^2.$$

Mặt khác theo bất đẳng thức Holder ta có

$$\left(a^6+a^3+1\right)\left(b^6+b^3+1\right)\left(c^6+c^3+1\right)\ge\left(a^2b^2c^2+abc+1\right)^3.$$

Từ đó ta có điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài 15. Gọi P là biểu thức vế trái và đặt $S=c\left(a+b\right)^2+b\left(c+a\right)^2+a\left(b+c\right)^2$.

Sử dụng bất đẳng thức Holder ta có $P.P.S\ge\left(a+b+b+c+c+a\right)^3=8\left(a+b+c\right)^3$.

Vậy ta cần chứng minh

$$\frac{8\left(a+b+c\right)^3}{a\left(b+c\right)^2+b\left(c+a\right)^2+c\left(a+b\right)^2}\ge\frac{16\left(a+b+c\right)^3}{3\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)}$$

$$\Leftrightarrow 3\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)\ge 2\left[a\left(b+c\right)^2+b\left(c+a\right)^2+c\left(a+b\right)^2\right].$$

$$\Leftrightarrow\left(a+b+c\right)\left(ab+bc+ca\right)\ge 9abc$$

Luôn đúng theo AM – GM.

Bài 16. Gọi P là biểu thức vế trái và đặt $S=a+b+c$.

Sử dụng bất đẳng thức Holder ta có

$$P.S.S\ge\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)^3\ge\left(\frac{3}{2}\right)^3\Rightarrow P\ge\frac{27}{8\left(a+b+c\right)^2}.$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bài 17. Gọi P là biểu thức vế trái và đặt

$$\begin{aligned}S&=8ab\left(4a+4b+c\right)+8bc\left(4b+4c+a\right)+8ca\left(4c+4a+b\right)\\&=32\left(a+b+c\right)\left(ab+bc+ca\right)-72abc\end{aligned}.$$

Sử dụng bất đẳng thức Holder ta có

$$P.P.S\ge\left(a+b+b+c+c+a\right)^3=8\left(a+b+c\right)^3.$$

Vậy ta chứng minh $8\left(a+b+c\right)^3\ge S$

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow 8\left(a+b+c\right)^3\ge 32\left(a+b+c\right)\left(ab+bc+ca\right)-72abc\\&\Leftrightarrow\left(a+b+c\right)^3+9abc\ge 4\left(a+b+c\right)\left(ab+bc+ca\right)\end{aligned}.$$

Đây chính là bất đẳng thức Schur bậc 3. Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bài 18. Gọi P là biểu thức vế trái và đặt

$$S=a\left[\left(b+c\right)^2+5c^2\right]+b\left[\left(c+a\right)^2+5a^2\right]+c\left[\left(a+b\right)^2+5b^2\right].$$

Sử dụng bất đẳng thức Holder ta có $P^2.S\ge\left(a+b+c\right)^3$.

Vậy ta cần chứng minh

$$\left(a+b+c\right)^3\ge a\left[\left(b+c\right)^2+5c^2\right]+b\left[\left(c+a\right)^2+5a^2\right]+c\left[\left(a+b\right)^2+5b^2\right]$$

$$\Leftrightarrow a\left(a-b\right)^2+b\left(b-c\right)^2+c\left(c-a\right)^2\ge 0$$

Bất đẳng thức cuối luôn đúng ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bài 19. Sử dụng bất đẳng thức Holder ta có

$$\sqrt[3]{6a+\frac{1}{c}}+\sqrt[3]{6b+\frac{1}{a}}+\sqrt[3]{6c+\frac{1}{b}}=\sqrt[3]{\frac{1}{a}\left(6ab+1\right)}+\sqrt[3]{\frac{1}{b}\left(6bc+1\right)}+\sqrt[3]{\frac{1}{c}\left(6ca+1\right)}$$

$$\le\sqrt[3]{3\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\left(6ab+1+6bc+1+6ca+1\right)}=\frac{3}{\sqrt[3]{abc}}\le\frac{1}{abc}$$

Vì theo AM – GM ta có $abc\le\sqrt{\left(\frac{ab+bc+ca}{3}\right)^3}=\frac{1}{3\sqrt{3}}$.

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Bài 20. Sử dụng bất đẳng thức C –S ta có

$$\frac{a}{a^2+b^3+c^3}+\frac{b}{a^3+b^2+c^3}+\frac{c}{a^3+b^3+c^2}$$

$$=\frac{a^2}{a^3+ab^3+ac^3}+\frac{b^2}{a^3b+b^3+bc^3}+\frac{c^2}{ca^3+cb^3+c^3}$$

$$\ge\frac{\left(a+b+c\right)^2}{a^3+b^3+c^3+ab\left(a^2+b^2\right)+bc\left(b^2+c^2\right)+ca\left(c^2+a^2\right)}.$$

$$=\frac{\left(a+b+c\right)^2}{a^4+b^4+c^4+ab\left(a^2+b^2\right)+bc\left(b^2+c^2\right)+ca\left(c^2+a^2\right)}$$

$$=\frac{\left(a+b+c\right)^2}{\left(a+b+c\right)\left(a^3+b^3+c^3\right)}=\frac{a+b+c}{a^3+b^3+c^3}$$

Ta chứng minh $a+b+c\ge a^3+b^3+c^3$.

$$\Leftrightarrow\left(a+b+c\right)\left(a^4+b^4+c^4\right)^2\ge\left(a^3+b^3+c^3\right)^3$$

Đúng theo bất đẳng thức Holder.

Bài 21. ọi P là biểu thức vế trái sử dụng bất đẳng thức Holder ta có

$$P^3=\left(\sqrt[3]{\frac{7a^2b+1}{a^2}.a.a}+\sqrt[3]{\frac{7b^2c+1}{b^2}.b.b}+\sqrt[3]{\frac{7c^2a+1}{c^2}.c.c}\right)^3$$

$$\le\left(\frac{7a^2b+1}{a^2}+\frac{7b^2c+1}{b^2}+\frac{7c^2a+1}{c^2}\right)(a+b+c)^2=8(a+b+c)^3$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài 22. Sử dụng bất đẳng thức Holder ta có

$$\frac{a}{(a+1)^2}+\frac{b}{(b+1)^2}+\frac{c}{(c+1)^2}\ge\frac{(a+b+c)^3}{\left(a(a+1)+b(b+1)+c(c+1)\right)^2}=\frac{1}{(t+1)^2}.$$

Với $t=a^2+b^2+c^2\ge\frac{1}{3}(a+b+c)^2=\frac{1}{3}$.

Đặt $p=a+b+c=1;q=ab+bc+ca=\frac{p^2-t}{2}=\frac{1-t}{2};r=abc$.

Mặt khác theo bất đẳng thức Schur bậc ba ta có

$abc\ge(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$

$\Rightarrow abc\ge(1-2a)(1-2b)(1-2c)\Rightarrow 9r+1-4q\ge0\Leftrightarrow r\ge\frac{4q-1}{9}=\frac{1-2t}{9}\cdot$

Vậy ta chỉ cần chứng minh

$$4.\frac{1-2t}{9}.\frac{1}{(t+1)^2}+1\ge\frac{13}{8}(1-t)\Leftrightarrow(3t-1)\left(39t^2+76t+13\right)\ge0.$$

Bất đẳng thức cuối đúng ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{3}$.

CHỦ ĐỀ 8: *KỸ THUẬT SỬ DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC CHEBYSHEV*

A. NỘI DUNG PHƯƠNG PHÁP

1. Bất đẳng thức Chebyshev với hai dãy đơn điệu cùng chiều

Nếu có $\begin{cases}a_1\ge a_2\ge...\ge a_n\\ b_1\ge b_2\ge...\ge b_n\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}a_1\le a_2\le...\le a_n\\ b_1\le b_2\le...\le b_n\end{cases}$ thì ta có

$$n(a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n)\ge(a_1+a_2+...+a_n)(b_1+b_2+...+b_n).$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}a_1=a_2=...=a_n\\ b_1=b_2=...=b_n\end{cases}$.

Chứng minh. Ta có đẳng thức

$$n\left(a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n\right)-\left(a_1+a_2+...+a_n\right)\left(b_1+b_2+...+b_n\right)=\sum_{1\le i\ne j}^{n}\left(a_i-a_j\right)\left(b_i-b_j\right)\ge 0.$$

Vì $\left(a_i-a_j\right)\left(b_i-b_j\right)\ge 0,\forall i,j=\overline{1,n}$.

2. Bất đẳng thức Chebyshev với hai dãy đơn điệu ngược chiều

Nếu có $\begin{cases}a_1\ge a_2\ge ...\ge a_n\\ b_1\le b_2\le ...\le b_n\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}a_1\le a_2\le ...\le a_n\\ b_1\ge b_2\ge ...\ge b_n\end{cases}$ thì ta có

$$n\left(a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n\right)\le\left(a_1+a_2+...+a_n\right)\left(b_1+b_2+...+b_n\right).$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}a_1=a_2=...=a_n\\ b_1=b_2=...=b_n\end{cases}$.

Chứng minh tương tự cho dãy đơn điệu cùng chiều.

Bất đẳng thức Chebyshev được áp dụng cho các bất đẳng thức đối xứng ba biến và bài toán được giải theo cách này khá đơn giản.

B. BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện $a^2+b^2+c^2=1$.

Chứng minh rằng $\dfrac{a^3}{b+c}+\dfrac{b^3}{a+c}+\dfrac{c^3}{a+b}\ge\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Do a,b,c đối xứng, không mất tính tổng quát giả sử $a\ge b\ge c$

$\Rightarrow\begin{cases}a^2\ge b^2\ge c^2\\ \dfrac{a}{b+c}\ge\dfrac{b}{a+c}\ge\dfrac{c}{a+b}\end{cases}$ tức là hai dãy đơn điệu cùng chiều.

Áp dụng bất đẳng thức Chebyshev ta có :

$$a^2.\frac{a}{b+c}+b^2.\frac{b}{a+c}+c^2.\frac{c}{a+b}\ge\frac{a^2+b^2+c^2}{3}.\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\right)\ge\frac{1}{3}.\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Dấu bằng xảy ra khi a = b = c= $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

Chú ý. Ta có thể chứng minh bằng C –S

$$\frac{a^3}{b+c}+\frac{b^3}{a+c}+\frac{c^3}{a+b}\ge\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{a\left(b+c\right)+b\left(c+a\right)+c\left(a+b\right)}$$

$$=\frac{1}{2\left(ab+bc+ca\right)}\ge\frac{1}{2\left(a^2+b^2+c^2\right)}=\frac{1}{2}$$

Bài 2. Chứng minh với mọi số thực dương x,y,z ta có

$$\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}\le\frac{x+y+z}{xy+yz+x}+\frac{3}{2\left(x+y+z\right)}.$$

Lời giải

Bất đẳng thức đã cho tương đương với:

$$\left(xy+yz+zx\right)\left(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}\right)\le x+y+z+\frac{3\left(xy+yz+zx\right)}{2\left(x+y+z\right)}$$

$$\Leftrightarrow\frac{xy}{x+y}+\frac{yz}{y+z}+\frac{zx}{z+x}\le\frac{3\left(xy+yz+zx\right)}{2\left(x+y+z\right)}$$

$$\Leftrightarrow\left[\left(x+y\right)+\left(y+z\right)+\left(z+x\right)\right].\left(\frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}+\frac{1}{\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}+\frac{1}{\frac{1}{z}+\frac{1}{x}}\right)\le3\left(xy+yz+zx\right)$$

Không mất tính tổng quát giả sử

$$x\ge y\ge z\Rightarrow x+y\ge x+z\ge y+z;\frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}\ge\frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{z}}\ge\frac{1}{\frac{1}{z}+\frac{1}{y}}.$$

Sử dụng bất đẳng thức cho hai dãy đơn điệu cùng chiều trên ta có ngay điều phải chứng minh.

Bất đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z$.

Bài 3. Cho x,y,z là các số thực có tổng bằng 1. Chứng minh

$$\frac{x}{x^2+1}+\frac{y}{y^2+1}+\frac{z}{z^2+1}\le\frac{9}{10}.$$

Lời giải

Trước hết chuyển bài toán về đánh giá với các số dương

$$\frac{x}{x^2+1}+\frac{y}{y^2+1}+\frac{z}{z^2+1}\le\frac{|x|}{x^2+1}+\frac{|y|}{y^2+1}+\frac{|z|}{z^2+1}.$$

Nên ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức trong trường hợp cả ba số đều không âm.

Vì bất đẳng thức đối xứng với ba biến nên không mất tính tổng quát giả sử $x\ge y\ge z$ khi đó

$$x^2+1\ge y^2+1\ge z^2+1;\frac{x}{x^2+1}\ge\frac{y}{y^2+1}\ge\frac{z}{z^2+1}.$$

Thật vậy ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{x}{x^2+1}\ge\frac{y}{y^2+1}\Leftrightarrow xy^2+x\ge x^2y+y\Leftrightarrow\left(x-y\right)\left(1-xy\right)\ge0.$$

Bất đẳng thức đúng do $x-y\ge 0; 1-xy\ge 1-\left(\frac{x+y}{2}\right)^2\ge 1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}>0$.

Vậy ta có hai dãy đơn điệu cùng chiều

$$\left(x^2+1; y^2+1; z^2+1\right); \left(\frac{x}{x^2+1}; \frac{y}{y^2+1}; \frac{z}{z^2+1}\right).$$

Áp dụng bất đẳng thức Chebyshev ta có

$$\left(x^2+1+y^2+1+z^2+1\right)\left(\frac{x}{x^2+1}+\frac{y}{y^2+1}+\frac{z}{z^2+1}\right)$$

$$\le 3\left[\left(x^2+1\right).\frac{x}{x^2+1}+\left(y^2+1\right).\frac{y}{y^2+1}+\left(z^2+1\right).\frac{z}{z^2+1}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{x}{x^2+1}+\frac{y}{y^2+1}+\frac{z}{z^2+1}\le \frac{3(x+y+z)}{x^2+y^2+z^2+3}$$

Vậy ta chứng minh $\frac{3(x+y+z)}{x^2+y^2+z^2+3}\le \frac{9}{10}\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2\ge \frac{1}{3}$.

Bất đẳng thức đúng vì $x^2+y^2+z^2\ge \frac{1}{3}(x+y+z)^2=\frac{1}{3}$.

Bài toán được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=\frac{1}{3}$.

Bài 3. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện $a+b+c\ge \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$.

Chứng minh rằng $2(a+b+c)\ge \sqrt{a^2+3}+\sqrt{b^2+3}+\sqrt{c^2+3}$.

Lời giải

Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$\left(2a-\sqrt{a^2+3}\right)+\left(2b-\sqrt{b^2+3}\right)+\left(2c-\sqrt{c^2+3}\right)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3\left(a^2-1\right)}{2a+\sqrt{a^2+3}}+\frac{3\left(b^2-1\right)}{2b+\sqrt{b^2+3}}+\frac{3\left(c^2-1\right)}{2c+\sqrt{c^2+3}}\ge 0$$

Chú ý điều kiện $a+b+c\ge \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\Leftrightarrow \frac{a^2-1}{a}+\frac{b^2-1}{b}+\frac{c^2-1}{c}\ge 0$.

Nên ta biến đổi bất đẳng thức về dạng

$$\frac{\frac{a^2-1}{a}}{2+\sqrt{1+\frac{3}{a^2}}}+\frac{\frac{b^2-1}{b}}{2+\sqrt{1+\frac{3}{b^2}}}+\frac{\frac{c^2-1}{c}}{2+\sqrt{1+\frac{3}{c^2}}}\ge 0.$$

Không mất tính tổng quát giả sử $a \ge b \ge c$, khi đó

$$\frac{1}{2+\sqrt{1+\frac{3}{a^2}}} \ge \frac{1}{2+\sqrt{1+\frac{3}{b^2}}} \ge \frac{1}{2+\sqrt{1+\frac{3}{c^2}}}$$

$$\frac{a^2-1}{a} \ge \frac{b^2-1}{b} \ge \frac{c^2-1}{c}$$

Khi đó sử dụng bất đẳng thức Chebyshev ta có

$$\frac{\frac{a^2-1}{a}}{2+\sqrt{1+\frac{3}{a^2}}} + \frac{\frac{b^2-1}{b}}{2+\sqrt{1+\frac{3}{b^2}}} + \frac{\frac{c^2-1}{c}}{2+\sqrt{1+\frac{3}{c^2}}}$$

$$\ge \frac{1}{3}\left(\frac{a^2-1}{a}+\frac{b^2-1}{b}+\frac{c^2-1}{c}\right)\left(\frac{1}{2+\sqrt{1+\frac{3}{a^2}}}+\frac{1}{2+\sqrt{1+\frac{3}{b^2}}}+\frac{1}{2+\sqrt{1+\frac{3}{c^2}}}\right) \ge 0$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài tập tương tự

Cho n số thực dương thoả mãn điều kiện $a_1+a_2+...+a_n \ge \frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}$.

Chứng minh rằng $2\left(a_1+a_2+...+a_n\right) \ge \sqrt{a_1^2+3}+\sqrt{a_2^2+3}+...+\sqrt{a_n^2+3}$.

Bài 4. Cho x,y,z là các số thực dương. Chứng minh

$$\sqrt{\frac{x+y}{z}}+\sqrt{\frac{y+z}{x}}+\sqrt{\frac{z+x}{y}} \ge \frac{\sqrt{6}\left(x+y+z\right)}{\sqrt{xy+yz+zx}}.$$

Lời giải

Ta có $\sqrt{\frac{x+y}{z}}+\sqrt{\frac{y+z}{x}}+\sqrt{\frac{z+x}{y}} = \frac{x+y}{\sqrt{z\left(x+y\right)}}+\frac{x+z}{\sqrt{y\left(x+z\right)}}+\frac{y+z}{\sqrt{x\left(y+z\right)}}$.

Không mất tính tổng quát giả sử $x \ge y \ge z \Rightarrow x+y \ge x+z \ge z+y$ và

$$\frac{x+y}{\sqrt{z\left(x+y\right)}} \ge \frac{x+z}{\sqrt{y\left(x+z\right)}} \ge \frac{y+z}{\sqrt{x\left(y+z\right)}}$$

$$\sqrt{z\left(x+y\right)} \le \sqrt{y\left(z+x\right)} \le \sqrt{x\left(y+z\right)}$$

Khi đó sử dụng bất đẳng thức Chebyshev cho hai dãy đơn điệu ngược chiều nên ta có

$$\left(\frac{x+y}{\sqrt{z(x+y)}}+\frac{x+z}{\sqrt{y(x+z)}}+\frac{y+z}{\sqrt{x(y+z)}}\right)\left(\sqrt{z(x+y)}+\sqrt{y(z+x)}+\sqrt{x(y+z)}\right)$$

$$\geq 3(x+y+x+z+y+z)=6(x+y+z)$$

Kết hợp sử dụng bất đẳng thức C–S ta có

$$\frac{x+y}{\sqrt{z(x+y)}}+\frac{x+z}{\sqrt{y(x+z)}}+\frac{y+z}{\sqrt{x(y+z)}}\geq\frac{6(x+y+z)}{\sqrt{z(x+y)}+\sqrt{y(z+x)}+\sqrt{x(y+z)}}$$

$$\geq\frac{6(x+y+z)}{\sqrt{6(xy+yz+zx)}}=\frac{\sqrt{6}(x+y+z)}{\sqrt{xy+yz+zx}}$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z$.

Bài tập tương tự

Chứng minh rằng với mọi x,y,z dương ta có

$$\frac{3}{2}\left(\sqrt{\frac{x+y}{z}}+\sqrt{\frac{y+z}{x}}+\sqrt{\frac{z+x}{y}}\right)^2\geq\frac{8(x+y+z)^2}{(x+y)(y+z)(z+x)}.$$

Bài 5. Cho a,b,c là các số thực không âm chứng minh

$$3(a+b+c)\geq\sqrt{a^2+8bc}+\sqrt{b^2+8ca}+\sqrt{c^2+8ab}.$$

Lời giải

+ Nếu tồn tại một số bằng 0 bất đẳng thức có dạng $2(x+y)\geq 2\sqrt{2xy}$ luôn đúng.

+ Ta xét cả ba số đều dương khi đó viết lại bất đẳng thức dưới dạng

$$\left(3a-\sqrt{a^2+8bc}\right)+\left(3b-\sqrt{b^2+8ca}\right)+\left(3c-\sqrt{c^2+8ab}\right)\geq 0$$

$$\Leftrightarrow\frac{8\left(a^2-bc\right)}{3a+\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{8\left(b^2-ca\right)}{3b+\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{8\left(c^2-ab\right)}{3c+\sqrt{c^2+8ab}}\geq 0$$

$$\Leftrightarrow\frac{\left(a^2-bc\right)(b+c)}{\left(3a+\sqrt{a^2+8bc}\right)(b+c)}+\frac{\left(b^2-ca\right)(c+a)}{\left(3b+\sqrt{b^2+8ca}\right)(c+a)}+\frac{\left(c^2-ab\right)(a+b)}{\left(3c+\sqrt{c^2+8ab}\right)(a+b)}\geq 0$$

Chú ý $\left(a^2-bc\right)(b+c)+\left(b^2-ca\right)(c+a)+\left(c^2-ab\right)(a+b)=0$.

Do vậy sử dụng bất đẳng thức Chebyshev ta chỉ cần chứng minh hai dãy sau đơn điệu ngược chiều

$$\left(a^2-bc\right)(b+c),\left(b^2-ca\right)(c+a),\left(c^2-ab\right)(a+b)$$

$$\left(3a+\sqrt{a^2+8bc}\right)(b+c),\left(3b+\sqrt{b^2+8ca}\right)(c+a),\left(3c+\sqrt{c^2+8ab}\right)(a+b)$$

Không mất tính tổng quát giả sử $a \ge b \ge c$ ta có

$$\left(a^2 - bc\right)\left(b + c\right) - \left(b^2 - ca\right)\left(c + a\right) = \left(a - b\right)\left(c^2 + ab + bc + ca\right) \ge 0$$

$$\left(b^2 - ca\right)\left(c + a\right) - \left(c^2 - ab\right)\left(a + b\right) = \left(b - c\right)\left(a^2 + ab + bc + ca\right) \ge 0$$

Và $\left(3a + \sqrt{a^2 + 8bc}\right)\left(b + c\right) \le \left(3b + \sqrt{b^2 + 8ca}\right)\left(c + a\right)$

$$\Leftrightarrow 3c\left(a - b\right) + \left(b + c\right)\sqrt{a^2 + 8bc} - \left(c + a\right)\sqrt{b^2 + 8ca} \le 0$$

$$\Leftrightarrow 3c\left(a - b\right) + \frac{\left(b + c\right)^2\left(a^2 + 8bc\right) - \left(c + a\right)^2\left(b^2 + 8ca\right)}{\left(b + c\right)\sqrt{a^2 + 8bc} + \left(c + a\right)\sqrt{b^2 + 8ca}} \le 0$$

$$\Leftrightarrow 3c\left(a - b\right)\left[1 - \frac{8\left(a^2 + b^2 + c^2\right) + 6ab + 15c\left(a + b\right)}{\left(b + c\right)\sqrt{a^2 + 8bc} + \left(c + a\right)\sqrt{b^2 + 8ca}}\right] \le 0$$

Bất đẳng thức cuối đúng vì

$$\sqrt{a^2 + 8bc} \le a + b + c; \sqrt{b^2 + 8ca} \le a + b + c$$

$$\Rightarrow \left(b + c\right)\sqrt{a^2 + 8bc} + \left(c + a\right)\sqrt{b^2 + 8ca} \le \left(a + b + c\right)\left(a + b + 2c\right)$$

$$< 8\left(a^2 + b^2 + c^2\right) + 6ab + 15c\left(a + b\right)$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

C. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện $a + b + c \le 3abc$.

Chứng minh rằng $\dfrac{1}{1 + 2bc} + \dfrac{1}{1 + 2ca} + \dfrac{1}{1 + 2ab} \le 1$.

Bài 2. Cho các số thực $a, b, c > 1$ thoả mãn điều kiện $\dfrac{1}{a^2 - 1} + \dfrac{1}{b^2 - 1} + \dfrac{1}{c^2 - 1} = 1$.

Chứng minh rằng $\dfrac{1}{a + 1} + \dfrac{1}{b + 1} + \dfrac{1}{c + 1} \le 1$.

Bài 3. Cho x,y,z là các số thực dương có tổng bằng 1. Chứng minh

$$\frac{x}{xyz + x^2 + 1} + \frac{y}{xyz + y^2 + 1} + \frac{z}{xyz + z^2 + 1} \le \frac{27}{31}.$$

Bài 4. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện $ab + bc + ca = 3$.

Chứng minh rằng $\dfrac{1}{1 + a^2\left(b + c\right)} + \dfrac{1}{1 + b^2\left(c + a\right)} + \dfrac{1}{1 + c^2\left(a + b\right)} \le \dfrac{3}{1 + 2abc}$.

Bài 5. Cho x,y,z là các số thực dương. Chứng minh

$$\sqrt{1+\frac{16x}{y+z}}+\sqrt{1+\frac{16y}{z+x}}+\sqrt{1+\frac{16z}{x+y}}\ge 9.$$

D. HƯỚNG DẪN GIẢI – ĐÁP ÁN

Bài 1. Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$\frac{a}{a+2abc}+\frac{b}{b+2abc}+\frac{c}{c+2abc}\le 1.$$

Không mất tính tổng quát giả sử $a\ge b\ge c.$ Khi đó ta có

$$a+2abc\ge b+2abc\ge c+2abc$$

$$\frac{1}{1+2bc}\ge\frac{1}{1+2ca}\ge\frac{1}{1+2ab}\Rightarrow\frac{a}{a+2abc}\ge\frac{b}{b+2abc}\ge\frac{c}{c+2abc}$$

Sử dụng bất đẳng thức Chebyshev cho hai dãy đơn điệu cùng chiều

$$\left(a+2abc;b+2abc;c+2abc\right);\left(\frac{a}{a+2abc};\frac{b}{b+2abc};\frac{c}{c+2abc}\right)$$

ta có

$$3\left(a+b+c\right)\ge\left(a+b+c+6abc\right)\left(\frac{a}{a+2abc}+\frac{b}{b+2abc}+\frac{c}{c+2abc}\right)$$

$$\Rightarrow\frac{a}{a+2abc}+\frac{b}{b+2abc}+\frac{c}{c+2abc}\le\frac{3\left(a+b+c\right)}{a+b+c+6abc}\le 1$$

Bởi vì $a+b+c\le 3abc$.

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài tập tương tự

Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện $\frac{1}{1+2bc}+\frac{1}{1+2ca}+\frac{1}{1+2ab}\ge 1$.

Chứng minh rằng $a+b+c\ge 3abc$.

Bài 2. Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{a+1}+\frac{1}{3}-\frac{1}{b+1}+\frac{1}{3}-\frac{1}{c+1}\ge 0\Leftrightarrow\frac{a-2}{a+1}+\frac{b-2}{b+1}+\frac{c-2}{c+1}\ge 0.$$

Chú ý điều kiện được viết lại thành

$$\frac{1}{a^2-1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{b^2-1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{c^2-1}-\frac{1}{3}=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{4-a^2}{a^2-1}+\frac{4-b^2}{b^2-1}+\frac{4-c^2}{c^2-1}=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{a-2}{a+1}.\frac{a+2}{a-1}+\frac{b-2}{b+1}.\frac{b+2}{b-1}+\frac{c-2}{c+1}.\frac{c+2}{c-1}=0$$

Không mất tính tổng quát $a \ge b \ge c \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{a-2}{a+1} \ge \dfrac{b-2}{b+1} \ge \dfrac{c-2}{c+1} \\ \dfrac{a+2}{a-1} \le \dfrac{b+2}{b-1} \le \dfrac{c+2}{c-1} \end{cases}$.

Sử dụng bất đẳng thức Chebyshev cho hai dãy đơn điệu ngược chiều trên ta có ngay đpcm.

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 2$.

Tổng quát cho n số thực $a_1, a_2, ..., a_n > 1$ thoả mãn điều kiện

$$\frac{1}{a_1^2 - 1} + \frac{1}{a_2^2 - 1} + ... + \frac{1}{a_n^2 - 1} = 1.$$

Chứng minh rằng $\dfrac{1}{a_1 + 1} + \dfrac{1}{a_1 + 1} + ... + \dfrac{1}{a_n + 1} \le \sqrt{n+1} - 1$.

Bài 3. Không mất tính tổng quát giả sử

$$x \ge y \ge z \Rightarrow \begin{cases} xyz + x^2 + 1 \ge xyz + y^2 + 1 \ge xyz + z^2 + 1 \\ \dfrac{x}{xyz + x^2 + 1} \ge \dfrac{y}{xyz + y^2 + 1} \ge \dfrac{z}{xyz + z^2 + 1} \end{cases}$$

Sử dụng bất đẳng thức Chebyshev cho hai dãy đơn điệu cùng chiều trên ta được

$$\frac{x}{xyz + x^2 + 1} + \frac{y}{xyz + y^2 + 1} + \frac{z}{xyz + z^2 + 1} \le \frac{3(x + y + z)}{3xyz + 3 + x^2 + y^2 + z^2}$$
$$= \frac{3}{3xyz + 3 + x^2 + y^2 + z^2}$$

Do đó ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{3}{3xyz + 3 + x^2 + y^2 + z^2} \le \frac{27}{31} \Leftrightarrow 3xyz + x^2 + y^2 + z^2 \ge \frac{4}{9}.$$

Chú ý theo bất đẳng thức Schur bậc ba ta có

$$\frac{9xyz}{x + y + z} \ge 4(xy + yz + zx) - (x + y + z)^2$$

$$\Rightarrow 3xyz \ge \frac{4}{3}(xy + yz + zx) - \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow 3xyz + x^2 + y^2 + z^2 \ge \frac{4}{3}(xy + yz + zx) - \frac{1}{3} + x^2 + y^2 + z^2$$

$$= \frac{3(x + y + z)^2 - 2(xy + yz + zx) - 1}{3} \ge \frac{3 - 2.\frac{1}{3} - 1}{3} = \frac{4}{9}$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=\frac{1}{3}$.

Bài 4. Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$\frac{1}{1+2abc}-\frac{1}{1+a^2\left(b+c\right)}+\frac{1}{1+2abc}-\frac{1}{1+b^2\left(c+a\right)}+\frac{1}{1+2abc}-\frac{1}{1+c^2\left(a+b\right)}\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{a\left(ab+ac-2bc\right)}{1+a^2\left(b+c\right)}+\frac{b\left(bc+ab-2ca\right)}{1+b^2\left(c+a\right)}+\frac{c\left(ca+bc-2ab\right)}{1+c^2\left(a+b\right)}\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{a\left(1-bc\right)}{1+a\left(3-bc\right)}+\frac{b\left(1-ca\right)}{1+b\left(3-ca\right)}+\frac{c\left(1-ab\right)}{1+c\left(3-ab\right)}\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-bc}{bc+abc\left(3-bc\right)}+\frac{1-ca}{ca+abc\left(3-ca\right)}+\frac{1-ab}{ab+abc\left(3-ab\right)}\geq 0$$

Giả sử $a\geq b\geq c\Rightarrow \begin{cases}\dfrac{1-bc}{bc+abc\left(3-bc\right)}\geq\dfrac{1-ca}{ca+abc\left(3-ca\right)}\geq\dfrac{1-ab}{ab+abc\left(3-ab\right)}\\ bc+abc\left(3-bc\right)\leq ca+abc\left(3-ca\right)\leq ab+abc\left(3-ab\right)\end{cases}$.

Sử dụng bất đẳng thức Chebyshev cho hai dãy đơn điệu ngược chiều trên ta có ngay điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài 5. Bất đẳng thức đã cho tương đương với:

$$\left(\sqrt{1+\frac{16x}{y+z}}-3\right)+\left(\sqrt{1+\frac{16y}{z+x}}-3\right)+\left(\sqrt{1+\frac{16z}{x+y}}-3\right)\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{8\left(\frac{2x}{y+z}-1\right)}{\sqrt{1+\frac{16x}{y+z}}+3}+\frac{8\left(\frac{2y}{z+x}-1\right)}{\sqrt{1+\frac{16y}{z+x}}+3}+\frac{8\left(\frac{2z}{x+y}-1\right)}{\sqrt{1+\frac{16z}{x+y}}+3}\geq 0$$

Không mất tính tổng quát giả sử

$$x\geq y\geq z\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{2x}{y+z}-1\geq\dfrac{2y}{z+x}-1\geq\dfrac{2z}{x+y}-1\\ \dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{16x}{y+z}}+3}\geq\dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{16y}{z+x}}+3}\geq\dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{16z}{x+y}}+3}\end{cases}$$

Sử dụng bất đẳng thức Chebyshev cho hai dãy đơn điệu cùng chiều trên và đưa về chứng minh

$$\frac{2x}{y+z}-1+\frac{2y}{z+x}-1+\frac{2z}{x+y}-1\geq 0\Leftrightarrow\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}\geq\frac{3}{2}.$$

Bất đẳng thức cuối đúng. Bài toán được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z$.

Bài tập tương tự

Cho x,y,z là các số thực không âm thoả mãn điều kiện $xy+yz+zx>0$.

Chứng minh rằng $\sqrt{1+\frac{48x}{y+z}}+\sqrt{1+\frac{48y}{z+x}}+\sqrt{1+\frac{48z}{x+y}}\ge 15$.

CHỦ ĐỀ 9: BẤT ĐẲNG THỨC BERNOULLI VÀ ỨNG DỤNG

A. NỘI DUNG PHƯƠNG PHÁP

Với mọi số thực $a\ge -1,\alpha\ge 1$ ta luôn có $(1+a)^{\alpha}\ge 1+\alpha.\text{a}$ (1).

Chứng minh.

\+ Với $\alpha=1$ bất đẳng thức trở thành đẳng thức.

\+ Với $\alpha>1$ Xét hàm số $f(a)=(1+a)^{\alpha}-1-\alpha.\text{a}$ với $a\ge -1$ ta có

$$f'(a)=\alpha\left[(a+1)^{\alpha-1}-1\right];\ f'(a)=0\Leftrightarrow a=0.$$

Ta có f'(a) đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua $a=0$ nên f(a) đạt cực tiểu tại $a=0$.

Vì vậy $f(a)\ge f(0)\Leftrightarrow (1+a)^{\alpha}\ge 1+\alpha.\text{a}$.

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=0$ hoặc $\alpha=1$.

Chú ý. Với $0<\alpha\le 1$ bất đẳng thức đổi chiều.

Một dạng phát biểu khác của bất đẳng thức Bernoulli hay được sử dụng

$x^a\ge \frac{a}{b}x^b+1-\frac{a}{b}$ với $x\ge 0, a\ge b>0$.

Chứng minh.

$$x^a=\left[1+\left(x^b-1\right)\right]^{\frac{a}{b}}\ge 1+\frac{a}{b}\left(x^b-1\right)=\frac{a}{b}x^b+1-\frac{a}{b}.$$

Áp dụng ta chứng minh được bất đẳng thức AM – GM dạng luỹ thừa

$$\frac{a_1^m+a_2^m+...+a_n^m}{n}\ge\left(\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}\right)^m.$$

Chứng minh.

Viết lại bất đẳng thức dưới dạng

$$\left(\frac{na_1}{a_1+a_2+...+a_n}\right)^m+\left(\frac{na_2}{a_1+a_2+...+a_n}\right)^m+...+\left(\frac{na_n}{a_1+a_2+...+a_n}\right)^m\geq n.$$

Chú ý

$$\left(\frac{na_k}{a_1+a_2+...+a_n}\right)^m=\left(1+\frac{(n-1)a_k-\sum\limits_{1\leq i\neq k}^{n}a_i}{a_1+a_2+...+a_n}\right)^m\geq 1-m.\frac{(n-1)a_k-\sum\limits_{1\leq i\neq k}^{n}a_i}{a_1+a_2+...+a_n},k=\overline{1,n}$$

Lấy tổng tất n bất đẳng thức trên ta có điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1=a_2=...=a_n$.

Xét hai bất đẳng thức AM – GM

$$\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}\geq\sqrt[n]{a_1a_2...a_n}.$$

Chứng minh.

Đặt $A_n=\dfrac{a_1+a_2+...+a_n}{n};G_n=\sqrt[n]{a_1a_2...a_n}$.

Sử dụng bất đẳng thức Bernoulli ta có

$$\left(\frac{A_n}{A_{n-1}}\right)^n=\left(1+\frac{A_n}{A_{n-1}}-1\right)^n\geq n+n\left(\frac{A_n}{A_{n-1}}-1\right)=\frac{nA_n-(n-1)A_{n-1}}{A_{n-1}}=\frac{a_n}{A_{n-1}}.$$

$$\Rightarrow A_n^n\geq a_nA_{n-1}^{n-1}$$

Sử dụng liên tiếp bất đẳng thức trên ta được

$$A_n^n\geq a_nA_{n-1}^{n-1}\geq a_na_{n-1}A_{n-2}^{n-2}\geq...\geq a_na_{n-1}...a_2.A_1=a_1a_2...a_n=G_n^n\Rightarrow A_n\geq G_n.$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Ta có một dạng suy rộng của Bernoulli hay được sử dụng như sau

Với n số thực cùng dấu và lớn hơn hoặc bằng -1 ta có

$$(1+a_1)(1+a_2)...(1+a_n)\geq 1+a_1+a_2+...+a_n\ (1).$$

Chú ý. (1) dễ chứng minh bằng quy nạp toán học.

B. BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Cho a, b là các số thực thay đổi thỏa mãn điều kiện $0<a,b<1$.

Chứng minh rằng $a^b+b^a>1$.

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức Bernoulli ta có

$$\frac{1}{a^b}=\left(1+\frac{1-a}{a}\right)^b\leq 1+b.\frac{1-a}{a}=\frac{a+b-ab}{a}\Rightarrow a^b\geq\frac{a}{a+b-ab}$$

$$\frac{1}{b^a} = \left(1+\frac{1-b}{b}\right)^a \le 1 + a.\frac{1-b}{b} = \frac{a+b-ab}{b} \Rightarrow b^a \ge \frac{b}{a+b-ab}.$$

Cộng theo vế hai bất đẳng thức trên ta được $a^b + b^a \ge \frac{a+b}{a+b-ab} > \frac{a+b}{a+b} = 1$.

Bất đẳng thức được chứng minh.

Chú ý. Bất đẳng thức trên đúng với mọi a,b dương.

Bài 2. Cho a,b là các số thực dương thay đổi thỏa mãn điều kiện $a+b=ab$.

Chứng minh rằng $a^b + b^a > 6$.

Lời giải

Từ giả thiết ta có: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1 \Rightarrow a>1, b>1$ và $b=\frac{a}{a-1}$.

Ta cần chứng minh $a^{\frac{a}{a-1}} + \left(\frac{a}{a-1}\right)^a > 6$.

Ta có: $$\begin{cases} a^{\frac{a}{a-1}} = (1+a-1)^{\frac{a}{a-1}} \ge 1 + (a-1).\frac{a}{a-1} = 1+a \\ \left(\frac{a}{a-1}\right)^a = \left(1+\frac{1}{a-1}\right)^a \ge 1 + \frac{a}{a-1} \end{cases}.$$

Suy ra: $a^{\frac{a}{a-1}} + \left(\frac{a}{a-1}\right)^a \ge 2 + a + \frac{a}{a-1} = 4 + (a-1) + \frac{1}{a-1} \ge 4 + 2\sqrt{(a-1).\frac{1}{a-1}} = 6$.

Dấu đẳng thức không xảy ra nên $a^b + b^a > 6$.

Bài 3. Cho hai số thực a,b thoả mãn điều kiện $0 < a, b \le 1$.

Chứng minh rằng $a^{b-a} + b^{a-b} \le 2$.

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức Bernoulli ta có

$$a^{b-a} = (1+a-1)^{b-a} \le 1 + (a-1)(b-a)$$

$$b^{a-b} = (1+b-1)^{a-b} \le 1 + (b-1)(a-b)$$

Cộng theo vế hai bất đẳng thức trên ta được

$$a^{b-a} + b^{a-b} \le 2 + (b-1)(a-b) + (a-1)(b-a) = 2 - (a-b)^2 \le 2.$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b$.

Bài tập tương tự

Cho a,b,c là các số thực dương có tổng bằng 1. Chứng minh

$$\sqrt{a^{1-a}b^{1-b}c^{1-c}} \le \frac{1}{3}.$$

Bài 4. Chứng minh với mọi số thực a,b,c thuộc đoạn $[0;1]$ ta luôn có

$$a^{2b}+b^{2c}+c^{2a}\ge \frac{3}{4}.$$

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức Bernoulli ta có:

$$\frac{1}{x^y}=\left(1+\frac{1-x}{x}\right)^y\le 1+y.\frac{1-x}{x}=\frac{x+y-xy}{x}\Rightarrow x^y\ge \frac{x}{x+y-xy}.$$

Áp dụng bất đẳng thức trên suy ra:

$$a^{2b}+b^{2c}+c^{2a}\ge \left(\frac{a}{a+b-ab}\right)^2+\left(\frac{b}{b+c-bc}\right)^2+\left(\frac{c}{c+a-ac}\right)^2$$

$$\ge \left(\frac{a}{a+b}\right)^2+\left(\frac{b}{b+c}\right)^2+\left(\frac{c}{c+a}\right)^2\ge \frac{3}{4}$$

Bài toán được chứng minh.

Bài 5. Chứng minh với mọi số nguyên dương n ta có $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\le 3-\frac{3}{n+2}$.

Lời giải

Ta chứng minh bài toán bằng quy nạp kết hợp sử dụng bất đẳng thức Bernoulli.

+ Với $n=1$ bất đẳng thức trở thành đẳng thức.

+ Giả sử bất đẳng thức đúng với $n=k$ tức $\left(1+\frac{1}{k}\right)^k\le 3-\frac{3}{k+2}$.

+ Ta cần chứng minh $\left(1+\frac{1}{k+1}\right)^{k+1}\le 3-\frac{3}{(k+1)+2}$.

Chú ý

$$\frac{\left(1+\frac{1}{k+1}\right)^{k+1}}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k}=\frac{k+2}{k+1}\left(\frac{k^2+2k}{k^2+2k+1}\right)^k=\frac{k+2}{k+1}.\frac{1}{\left(1+\frac{1}{k^2+2k}\right)^k}$$

$$\le \frac{k+2}{k+1}.\frac{1}{1+\frac{k}{k^2+2k}}=\frac{(k+2)^2}{(k+1)(k+3)}$$

Suy ra

$$\left(1+\frac{1}{k+1}\right)^{k+1}\le \left(1+\frac{1}{k}\right)^k\frac{(k+2)^2}{(k+1)(k+3)}\le \left(3-\frac{3}{k+2}\right)\frac{(k+2)^2}{(k+1)(k+3)}=3-\frac{3}{(k+1)+2}.$$

Điều đó chứng tỏ bất đẳng thức đúng với $n = k+1$.

Vậy theo nguyên lý quy nạp ta có điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $n = 1, n = 2$.

Bài tập tương tự

Chứng minh với mọi số nguyên dương n ta có $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$.

Ta cùng xét các bài toán đã được đề cập.

Bài 6. Cho a,b,c là các số thực không âm thoả mãn điều kiện $ab+bc+ca>0$ chứng minh với mọi số nguyên dương $n \geq 2$ ta có

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b+c}}+\sqrt[n]{\frac{b}{c+a}}+\sqrt[n]{\frac{c}{a+b}} \geq 2.$$

Lời giải

+ Nếu tồn tại một số bằng 0 giả sử là khi đó sử dụng bất đẳng thức AM – GM cho hai số ta có ngay điều phải chứng minh.
+ Xét cả 3 số đều dương sử dụng bất đẳng thức Bernoulli ta có

$$\sqrt[n]{\frac{a}{(n-1)(b+c)}} = \left(\frac{a}{(n-1)(b+c)}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\left(\frac{(n-1)(b+c)}{a}\right)^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\left(1+\frac{(n-1)(b+c)-a}{a}\right)^{\frac{1}{n}}} \quad (1)$$

$$\geq \frac{1}{1+\frac{1}{n}.\frac{(n-1)(b+c)-a}{a}} = \frac{na}{(n-1)(a+b+c)}$$

Tương tự ta có $\sqrt[n]{\frac{b}{(n-1)(c+a)}} \geq \frac{nb}{(n-1)(a+b+c)}$

$$\sqrt[n]{\frac{c}{(n-1)(a+b)}} \geq \frac{nc}{(n-1)(a+b+c)}$$

Gọi P là biểu thức vế trái và cộng theo vế ba bất đẳng thức trên ta được

$$P \geq \frac{n}{n-1}\sqrt[n]{n-1} \geq 2.$$

Bài toán được chứng minh.

Chú ý trong (1) ta dùng phép nghịch đảo trước khi sử dụng Bernoulli bởi với số mũ nhỏ hơn 1 nếu đánh giá ngay sẽ có chiều bất đẳng thức ngược lại. Vì vậy cần nghịch đảo để có chiều bất đẳng thức cần chứng minh.

Bài 7. Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh

$$\sqrt[3]{\frac{a}{2b+25c}}+\sqrt[3]{\frac{b}{2c+25a}}+\sqrt[3]{\frac{c}{2a+25b}}\ge 1.$$

Lời giải

Áp dụng BĐT Bernoulli ta có

$$\sqrt[3]{\frac{27a}{2b+25c}}=\frac{1}{\left(\frac{2b+25c}{27a}\right)^{\frac{1}{3}}}\ge\frac{1}{1+\frac{1}{3}\left(\frac{2b+25c}{27a}-1\right)}=\frac{81a}{2b+25c+54a}.$$

Tương tự ta có $\sqrt[3]{\frac{27b}{2c+25a}}\ge\frac{81b}{2c+25a+54b};\sqrt[3]{\frac{27c}{2a+25b}}\ge\frac{81c}{2a+25b+54c}$.

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên và kết hợp sử dụng bất đẳng thức C – S ta được $\sqrt[3]{\frac{a}{2b+25c}}+\sqrt[3]{\frac{b}{2c+25a}}+\sqrt[3]{\frac{c}{2a+25b}}\ge 27.\frac{(a+b+c)^2}{81(ab+bc+ac)}\ge 1$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bài 8. Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh

$$\sqrt[3]{\left(\frac{2a}{a+b}\right)^7}+\sqrt[3]{\left(\frac{2b}{b+c}\right)^7}+\sqrt[3]{\left(\frac{2c}{c+a}\right)^7}\ge 3.$$

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức Bernoulli dạng $x^a\ge 1+\frac{a}{b}\left(x^b-1\right)$ ta có

$$\sqrt[3]{\left(\frac{2a}{a+b}\right)^7}=\left(\frac{2a}{a+b}\right)^{\frac{7}{3}}\ge 1+\frac{7}{6}\left[\left(\frac{2a}{b+c}\right)^2-1\right];$$

$$\sqrt[3]{\left(\frac{2b}{b+c}\right)^7}=\left(\frac{2b}{b+c}\right)^{\frac{7}{3}}\ge 1+\frac{7}{6}\left[\left(\frac{2b}{b+c}\right)^2-1\right];\ .$$

$$\sqrt[3]{\left(\frac{2c}{c+a}\right)^7}=\left(\frac{2c}{c+a}\right)^{\frac{7}{3}}\ge 1+\frac{7}{6}\left[\left(\frac{2c}{c+a}\right)^2-1\right].$$

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên và gọi P là biểu thức vế trái ta được

$$P\ge 3+\frac{7}{6}\left[\left(\frac{2a}{a+b}\right)^2+\left(\frac{2b}{b+c}\right)^2+\left(\frac{2c}{c+a}\right)^2-3\right].$$

Chú ý.

$$\left(\frac{a}{a+b}\right)^2+\left(\frac{b}{b+c}\right)^2+\left(\frac{c}{c+a}\right)^2=\frac{1}{(1+x)^2}+\frac{1}{(1+y)^2}+\frac{1}{(1+z)^2},\left(x=\frac{b}{a},y=\frac{c}{b},z=\frac{a}{c}\right)$$

$$\geq\frac{1}{1+xy}+\frac{1}{(1+z)^2}=\frac{z}{z+1}+\frac{1}{(z+1)^2}\geq\frac{3}{4}$$

Vì vậy $P\geq 3$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Chú ý. Câu hỏi đặt ra là tại sao không sử dụng trực tiếp Bernoulli dạng suy rộng ban đầu bởi như vậy ta có

$$\sqrt[3]{\left(\frac{2a}{a+b}\right)^7}=\left(1+\frac{2a}{a+b}-1\right)^{\frac{7}{3}}\geq 1+\frac{7}{3}\left(\frac{2a}{a+b}-1\right).$$

Khi đó đưa về chứng minh $\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}\geq\frac{3}{2}$.

Tuy nhiên bất đẳng thức này không phải đúng với mọi a,b,c dương chẳng hạn $a=1,b=2,c=3$.

Bài tập tương tự

1) Cho a,b,c là các số thực không âm thoả mãn điều kiện $ab+bc+ca>0$.

Chứng minh rằng $\sqrt[3]{\frac{a}{b+c}}+\sqrt[3]{\frac{b}{c+a}}+\sqrt[3]{\frac{c}{a+b}}\geq 2$.

2) Cho bốn số thực dương a, b, c, d. Chứng minh

$$\sqrt[3]{\left(\frac{2a}{a+b}\right)^7}+\sqrt[3]{\left(\frac{2b}{b+c}\right)^7}+\sqrt[3]{\left(\frac{2c}{c+d}\right)^7}+\sqrt[3]{\left(\frac{2d}{d+a}\right)^7}\geq 4.$$

Bài 9. Cho a,b,c là các số thực dương chứng minh $a^{b+c}+b^{c+a}+c^{a+b}\geq 1$.

Lời giải

Ta cần so sánh các số $(b+c),(c+a),(a+b)$ với số 1.

\+ Nếu tồn tại một trong ba số lớn hơn 1 thì rõ ràng bất đẳng thức luôn đúng.

\+ Ta chỉ cần xét khi a,b,c cùng thuộc nửa khoảng $(0;1]$, không mất tính tổng quát ta giả sử $a\geq b\geq c$ suy ra $\min\{(a+b),(b+c),(c+a)\}=b+c$.

Đến đây ta lại chia trường hợp để xử lý

\- Nếu $b+c\geq 1$ sử dụng bất đẳng thức Bernoulli ta có

$$a^{b+c}=\left[1+(a-1)\right]^{b+c}\geq 1+(a-1)(b+c)$$

$$b^{c+a}=\left[1+(b-1)\right]^{c+a}\geq 1+(b-1)(c+a).$$

$$c^{a+b}=\left[1+(c-1)\right]^{a+b}\geq 1+(c-1)(a+b)$$

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên đưa về chứng minh

$1+ab+bc+ca-a-b-c\ge 0 \Leftrightarrow (1-a)(1-b)(1-c)+abc\ge 0$.

Bất đẳng thức đúng.

- Nếu $b+c<1$ ta lại chia thành các trường hợp sau đây:

Khả năng 1: $b+c\le c+a\le a+b\le 1$ sử dụng bất đẳng thức Bernoulli ta có

$$a^{b+c}=\frac{a}{\left(1+(a-1)\right)^{1-(b+c)}}\ge \frac{a}{1+(a-1)(1-b-c)}=\frac{a}{a+b+c-a(b+c)}\ge \frac{a}{a+b+c}.$$

Tương tự cho 2 bất đẳng thức còn lại rồi cộng lại theo vế ta có điều phải chứng minh.

Khả năng 2: $b+c\le c+a\le 1\le a+b$ ta có

$$a^{b+c}\ge a;b^{c+a}\ge b\Rightarrow a^{b+c}+b^{c+a}+c^{a+b}\ge a+b+c^{a+b}$$
$$\ge a+b+1+(c-1)(a+b)=c(a+b)+1\ge 1$$

Ta có điều phải chứng minh.

Khả năng 3: $b+c\le 1\le a+c\le a+b$ ta có

$$a^{b+c}\ge a$$
$$b^{c+a}\ge 1+(b-1)(c+a)$$
$$c^{a+b}\ge 1+(c-1)(a+b)$$

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên và đưa về chứng minh

$1+bc+(ab+bc+bc-a-b-c)\ge 0\Leftrightarrow (1-a)(1-b)(1-c)+abc+bc\ge 0$.

Bất đẳng thức đúng.

Vậy với mọi số thực dương a,b,c ta luôn có $a^{b+c}+b^{c+a}+c^{a+b}\ge 1$.

Bài tập tương tự

Cho a,b,c là các số thực dương chứng minh $(a+b)^c+(b+c)^a+(c+a)^b\ge 2$.

Bài 10. Cho a,b là các số thực không âm có tổng bằng 2 chứng minh

$$a^{2b}+b^{2a}+\left(\frac{a-b}{2}\right)^2\le 2.$$

Lời giải

Không mất tính tổng quát giả sử $a\ge b\Rightarrow 0\le a-1\le 1;0\le b\le 1$ sử dụng bất đẳng thức Bernoulli ta có

$$a^b=\left[1+(a-1)\right]^b\le 1+(a-1)b=-b^2+b+1$$
$$b^a=b.\left[1+(b-1)\right]^{a-1}\le b\left[1+(a-1)(b-1)\right]=b^2(2-b)$$

Vậy ta chỉ cần chứng minh

$$\left(-b^2+b+1\right)^2+b^4\left(2-b\right)^2+\left(\frac{a-b}{2}\right)^2\le 2$$

$$\Leftrightarrow\left(-b^2+b+1\right)^2+b^4\left(2-b\right)^2+\left(b-1\right)^2\le 2\Leftrightarrow b^3\left(b-1\right)^2\left(b-2\right)\le 0$$

Bất đẳng thức cuối đúng do đó ta có đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=1$.

Bài tập tương tự

Cho a,b là các số thực không âm có tổng bằng 2. Chứng minh

$$a^{3b}+b^{3a}+\left(\frac{a-b}{2}\right)^4\le 2.$$

C. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1. Cho n số thực thoả mãn điều kiện $0<x_1,x_2,...,x_n\le 1$. Chứng minh rằng

$$\left(1+x_1\right)^{\frac{1}{x_2}}\left(1+x_2\right)^{\frac{1}{x_3}}...\left(1+x_n\right)^{\frac{1}{x_1}}\ge 2^n.$$

Bài 2. Chứng minh rằng với mọi số thực $0<x<\frac{\pi}{4}$ ta có

$$\left(\cos^2 x\right)^{\cot x}>\sin^2 x.$$

Bài 3. Chứng minh với mọi số thực $0<x<\frac{\pi}{2}$ ta có

$$\left(2+\sin x\right)^{2+\tan x}>\left(3+\tan x\right)^{1+\sin x}.$$

Bài 4. Cho a,b là các số thực thuộc khoảng (0;1). Chứng minh

$$\left(\frac{a}{b}\right)^a+\left(\frac{b}{a}\right)^b\ge 2.$$

Bài 5. Cho a,b là các số thực dương thoả mãn điều kiện $b\ge\frac{4}{3},a+b=2.$ Chứng minh $a^b b^a+2\ge 3ab$.

Bài 6. Cho x,y là hai số thực dương. Chứng minh $x^y+y^x>1$.

Bài 7. Cho a,b,c là các số thực không âm thoả mãn điều kiện $ab+bc+ca>0$.

Chứng minh rằng $\sqrt[3]{\frac{a}{b+c}}+\sqrt[3]{\frac{b}{c+a}}+\sqrt[3]{\frac{c}{a+b}}\ge 2$.

D. HƯỚNG DẪN GIẢI – ĐÁP SỐ

Bài 1. Chú ý $\left(1+x_k\right)^{\frac{1}{x_{k+1}}} \ge 1+\frac{x_k}{x_{k+1}} \ge 2\sqrt{\frac{x_k}{x_{k+1}}}, k=\overline{1,n}; x_{n+1}=x_1$.

Nhân theo vế n bất đẳng thức trên ta có điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2 = ... = x_n = 1$.

Bài 2. Chú ý với $0 < x < \frac{\pi}{4}$ ta có $\cot x > 1$ khi đó sử dụng bất đẳng thức Bernoulli ta có

$$\left(\cos^2 x\right)^{\cot x} = \left(1-\sin x\right)^{\cot x}\left(1+\sin x\right)^{\cot x} \ge \left(1-\sin x\cot x\right)\left(1+\sin x\cot x\right)$$

$$= \left(1-\cos x\right)\left(1+\cos x\right) = 1-\cos^2 x = \sin^2 x$$

Đẳng thức không xảy ra nên bài toán được chứng minh.

Bài 3. Đặt $a = 1+\sin x, b = 2+\tan x \Rightarrow 1 < a < b$ ta cần chứng minh

$$\left(1+a\right)^b > \left(1+b\right)^a \Leftrightarrow \left(1+a\right)^{\frac{b}{a}} > 1+b.$$

Bất đẳng thức cuối đúng theo Bernoulli.

Bài 4. Sử dụng bất đẳng thức Bernoulli ta có:

$$\left(\frac{b}{a}\right)^a = \left(1+\frac{b-a}{a}\right)^a \le 1+a.\frac{b-a}{a} = b+1-a \Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^a \ge \frac{1}{b+1-a}.$$

Tương tự ta có: $\left(\frac{b}{a}\right)^b \ge \frac{1}{a+1-b}$.

Cộng theo vế hai bất đẳng thức trên và chú ý

$$\frac{1}{b+1-a}+\frac{1}{a+1-b} \ge \frac{4}{b+1-a+a+1-b} = 2.$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b$.

Bài 5. Sử dụng bất đẳng thức Bernoulli ta có

$$a^b b^a = \left[1+\left(a-1\right)\right]^b.\frac{1}{\left(1+\frac{1}{b}-1\right)^a} \ge \frac{1+b\left(a-1\right)}{1+a\left(\frac{1}{b}-1\right)}.$$

Vậy ta chứng minh $\frac{1+b\left(a-1\right)}{1+a\left(\frac{1}{b}-1\right)}+2 \ge 3ab \Leftrightarrow b.\frac{1+b\left(1-b\right)}{2-b\left(2-b\right)}+2 \ge 3b\left(2-b\right)$

$\Leftrightarrow \left(b-1\right)\left(3b-4\right) \ge 0$ đúng.

Bất đẳng thức được chứng minh.

Bài 6. Ta xét ba trường hợp sau:

+ Nếu $x>1, y>1 \Rightarrow x^y + y^x > x + y > 2$, bất đẳng thức luôn đúng.

+ Nếu $x>1, y<1 \Rightarrow x^y + y^x > 1 + y^x > 1$, bất đẳng thức luôn đúng.

+ Nếu $x, y \le 1,$ áp dụng bài tập mẫu ta có đpcm.

Bài 7. Nếu một số bằng 0 sử dụng bất đẳng thức AM – GM ta có ngay điều phải chứng minh.

Ta xét cả ba số đều dương khi đó sử dụng bất đẳng thức Bernoulli ta có

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b+c}} = \frac{1}{\left(\frac{b+c}{a}\right)^{\frac{1}{3}}} \ge \frac{1}{\frac{1}{2}\left(\frac{b+c}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{2}} = \frac{2a^{2/3}}{(b+c)^{2/3} + a^{2/3}} \ge \frac{2a^{2/3}}{a^{2/3} + b^{2/3} + c^{2/3}}.$$

Tương tự ta có $\sqrt[3]{\frac{b}{c+a}} \ge \frac{2b^{2/3}}{a^{2/3} + b^{2/3} + c^{2/3}}; \sqrt[3]{\frac{c}{a+b}} \ge \frac{2c^{2/3}}{a^{2/3} + b^{2/3} + c^{2/3}}$.

Cộng lại theo vế ba bất đẳng thức trên ta có đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi có một số bằng 0 và hai số bằng nhau.

Chương 3:

PHƯƠNG PHÁP HÀM SỐ TRONG GIẢI TOÁN BẤT ĐẲNG THỨC VÀ CỰC TRỊ

CHỦ ĐỀ 1: KỸ THUẬT SỬ DỤNG TÍNH ĐƠN ĐIỆU VỚI BÀI TOÁN CỰC TRỊ VÀ BẤT ĐẲNG THỨC MỘT BIẾN SỐ

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa 1. Giả sử K là một khoảng, nửa khoảng, một đoạn.

Hàm số $y = f(x)$ xác định trên D được gọi là:

+ Đồng biến trên K nếu với mọi $x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

+ Nghịch biến trên K nếu với mọi $x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

2. Điều kiện cần để hàm số đơn điệu

Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên K

+ Nếu hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên K thì $f'(x) \geq 0$ với mọi x thuộc K.

+ Nếu hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên K thì $f'(x) \leq 0$ với mọi x thuộc K.

3. Điều kiện đủ để hàm số đơn điệu

Định lý. Giả sử K là một khoảng, nửa khoảng, một đoạn. Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên K và có đạo hàm tại mọi điểm trong của K(tức các điểm thuộc K nhưng không phải đầu mút của K). Khi đó

+ Nếu $f'(x) > 0, \forall x \in K$ thì hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên K.

+ Nếu $f'(x) < 0, \forall x \in K$ thì hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên K.

+ Nếu $f'(x) = 0, \forall x \in K$ thì hàm số $y = f(x)$ không đổi trên K.

Chú ý. Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn [a;b] và có đạo hàm $f'(x) > 0\left(f'(x) < 0\right)$ với mọi x thuộc khoảng (a;b) thì hàm số $y = f(x)$ đồng biến (nghịch biến) trên đoạn [a;b].

4. Định nghĩa 2.

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên K.

+ Số M được gọi là giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên K khi và chỉ khi

$$\begin{cases} f(x) \leq M, \forall x \in K \\ \exists x_0 \in K \mid f(x_0) = M \end{cases}.$$

+ Số m được gọi là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên K khi và chỉ khi

$$\begin{cases} f(x) \geq m, \forall x \in K \\ \exists x_0 \in K \mid f(x_0) = m \end{cases}.$$

B. NỘI DUNG PHƯƠNG PHÁP

1) Kỹ thuật tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số

Để tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên D ta tính y' rồi tìm các điểm tới hạn(các điểm mà tại đó y' triệt tiêu hoặc không tồn tại) lập bảng biến thiên. Từ bảng biến thiên suy ra max, min.

Chú ý. Nếu hàm số $y = f(x)$ luôn tăng hoặc luôn giảm trên đoạn [a;b] thì

$$y_{\max} = \max\left\{ f(a); f(b) \right\}; y_{\min} = \min\left\{ f(a); f(b) \right\}.$$

\+ Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $\left[a;b\right]$ luôn tồn tại giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trên đoạn đó và ta tìm max, min đơn giản như sau:

Bước 1. Tính đạo hàm y', tìm các điểm tới hạn của hàm số giả sử là $x_1, x_2, ..., x_n$.

Bước 2. Tính các giá trị $f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n)$.

Bước 3. Kết luận

$$y_{\max} = \max\left\{ f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n) \right\}; y_{\min} = \min\left\{ f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n) \right\}.$$

Ví dụ 1. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^6 + 4\left(1 - x^2\right)^3$ trên đoạn $\left[-1;1\right]$.

Lời giải

Xét hàm số $y = x^6 + 4\left(1 - x^2\right)^3$ liên tục trên đoạn $\left[-1;1\right]$.Ta có

$$y' = 6x^5 - 24x\left(1 - x^2\right)^2; y' = 0 \Leftrightarrow 6x\left[x^4 - 4\left(1 - x^2\right)^2\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^4 = 4\left(1 - x^2\right)^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = 2\left(1 - x^2\right) \\ x^2 = -2\left(1 - x^2\right) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{\dfrac{2}{3}} \\ x = \pm\sqrt{2} \end{array}\right.$$

Suy ra $y(0) = 4; y\left(\pm\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right) = \dfrac{4}{9}; y(\pm 1) = 1$.

Vì vậy $y_{\min} = y\left(\pm\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right) = \dfrac{4}{9}; y_{\max} = y(0) = 4$.

Ví dụ 2. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số

$$y = \sqrt{1 + x^{2015}} + \sqrt{1 + (1 - x)^{2015}} \text{ với } x \in [0;1].$$

Lời giải

Ta có $y' = \frac{2015x^{2014}}{2\sqrt{1+x^{2015}}} - \frac{2015(1-x)^{2014}}{2\sqrt{1+(1-x)^{2015}}}$;

Suy ra

$y' = 0 \Leftrightarrow x^{2014}\sqrt{1+(1-x)^{2015}} = (1-x)^{2014}\sqrt{1+x^{2015}}$

$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{1+x^{2015}}}{x^{2014}} = \frac{\sqrt{1+(1-x)^{2015}}}{(1-x)^{2014}}$ (1)

Xét hàm số $f(t) = \frac{\sqrt{1+t^{2015}}}{t^{2014}}$ trên đoạn [0;1] ta có

$f'(t) = -\frac{2013t^{2015}+4028}{2t^{2015}\sqrt{1+t^{2015}}} < 0$.

Vì vậy f(t) là hàm nghịch biến trên đoạn [0;1], do đó

(1) $\Leftrightarrow f(x) = f(1-x) \Leftrightarrow x = 1-x \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.

Tính các giá trị: $y(0) = y(1) = 1+\sqrt{2}; y\left(\frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\right)^{2015}}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng $2\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\right)^{2015}}$; giá trị lớn nhất bằng $1+\sqrt{2}$.

Bài tập tương tự

Cho a,b là hai số thực không âm có tổng bằng 1. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \sqrt{1+a^{2014}} + \sqrt{1+b^{2014}}$.

Ví dụ 3. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y = 5|\cos x + \sin x| + |7\cos x + \sin x|.$$

Lời giải

Ta đưa về chung một biểu thức bằng cách sử dụng đẳng thức:

$$|a| + |b| = \sqrt{a^2 + b^2 + 2|ab|}.$$

Khi đó

$$y=\sqrt{25(\sin x+\cos x)^2+(7\cos x+\sin x)^2+10\left|(\sin x+\cos x)(7\cos x+\sin x)\right|}$$

$$=\sqrt{50+32\sin 2x+24\cos 2x+10\left|\sin^2 x+7\cos^2 x+4\sin 2x\right|}$$

$$=\sqrt{50+32\sin 2x+24\cos 2x+10\left|4+3\cos 2x+4\sin 2x\right|}$$

$$=\sqrt{8(3\cos 2x+4\sin 2x)+10\left|4+3\cos 2x+4\sin 2x\right|+50}$$

$$=\sqrt{40\sin(2x+\alpha)+\left|40+50\sin(2x+\alpha)\right|+50}$$

Với $\cos\alpha=\frac{4}{5},\sin\alpha=\frac{3}{5}$.

Giờ chỉ cần khảo sát hàm số $y=4\sin t+\left|4+5\sin t\right|\Rightarrow y_{\max}=13; y_{\min}=-\frac{16}{5}$.

Từ đó suy ra giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho là

$$y_{\max}=6\sqrt{5}; y_{\min}=3\sqrt{2}.$$

2) Kỹ thuật đổi biến

Sử dụng khi hàm một biến có chứa căn phức tạp; dạng lượng giác; mũ hoặc đa thức có chứa bậc cao.

Ví dụ 1. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{x-\sqrt{x(x-1)}+2}{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}+1}$.

Lời giải

Tập xác định: $D=[1;+\infty)$.

Đặt $t=\sqrt{x}-\sqrt{x-1}=\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}\le 1,\forall x\ge 1\Rightarrow t\in(0;1]$.

Chú ý. $t^2=2x-2\sqrt{x(x-1)}-1\Rightarrow x-\sqrt{x(x-1)}=\dfrac{t^2+1}{2}$.

Khi đó $y=\dfrac{t^2+5}{2t+2}$.

Ta có $y'=\dfrac{t^2+2t-5}{2(t+1)^2}<0,\forall t\in(0;1]$. Do đó $y_{\min}=y(1)=\dfrac{3}{2}$. Không tồn tại giá trị lớn nhất.

Ví dụ 2. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n > 1 ta có

$$\sqrt[n]{1+\frac{\sqrt[n]{n}}{n}}+\sqrt[n]{1-\frac{\sqrt[n]{n}}{n}}<2.$$

Lời giải

Đặt $x=\frac{\sqrt[n]{n}}{n}\in(0;1), \forall n\in N^*$. BĐT cần chứng minh trở thành

$\sqrt[n]{1+x}+\sqrt[n]{1-x}<2, \forall x\in(0;1)$.

Xét hàm số $f(x)=\sqrt[n]{1+x}+\sqrt[n]{1-x}$ liên tục $x\in[0;1)$ có

$$f'(x)=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{\sqrt[n]{(1+x)^{n-1}}}-\frac{1}{\sqrt[n]{(1-x)^{n-1}}}\right)<0,\quad \forall x\in(0;1)$$

Vậy f(x) nghịch biến [0; 1) nên f(x) < f(0) = 2, $\forall x\in(0;1)$ (đpcm).

Ví dụ 3. Cho hàm số f xác định trên tập số thực, lấy giá trị trên R và thỏa mãn điều kiện $f(\cot x)=\sin 2x+\cos 2x,\quad \forall x\in(0;\pi)$.

Hãy tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)=f(\sin^2 x).f(\cos^2 x)$ trên R.

Lời giải

Ta có $f(\cot x)=\sin 2x+\cos 2x,\quad \forall x\in(0;\pi)$

$$\Leftrightarrow f(\cot x)=\frac{2\cot x}{\cot^2 x+1}+\frac{\cot^2 x-1}{\cot^2 x+1}=\frac{\cot^2 x+2\cot x-1}{\cot^2 x+1},\quad \forall x\in(0;\pi)$$

Từ đó với chú ý rằng với mỗi $t\in R$ đều tồn tại $x\in(0;\pi)$ sao cho cot x = t ta được $f(t)=\frac{t^2+2t-1}{t^2+1},\quad \forall t\in R$.

Suy ra $g(x)=f(\sin^2 x).f(\cos^2 x)=\frac{\sin^4 2x+32\sin^2 2x-32}{\sin^4 2x-8\sin^2 2x+32}, \forall x\in R\quad (1)$.

Đặt $u=\frac{1}{4}\sin^2 2x$ ta có u thuộc đoạn $\left[0;\frac{1}{4}\right]$.

Vì vậy từ (1) ta được

$$\min_{x\in R} g(x)=\min_{\left[0;\frac{1}{4}\right]} h(u)\quad \text{và}\quad \max_{x\in R} g(x)=\max_{\left[0;\frac{1}{4}\right]} h(u)$$

trong đó $h(u)=\frac{u^2+8u-2}{u^2-2u+2}$.

Ta có $h'(u)=\frac{2(-5u^2+4u+6)}{(u^2-2u+2)^2}$.

Dễ dàng chứng minh được $h'(u) > 0, \forall u \in \left[0;\frac{1}{4}\right]$.

Do đó hàm h(u) đồng biến trên $\left[0;\frac{1}{4}\right]$.

Vì vậy trên $\left[0;\frac{1}{4}\right]$ ta có $\min h(u) = h(0) = -1$ và $\max h(u) = h\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{25}$.

Vậy $\min g(x) = -1$, đạt được chẳng hạn khi x = 0 và $\max g(x) = \frac{1}{25}$, đạt được chẳng hạn khi $x = \frac{\pi}{4}$.

3) Kỹ thuật khảo sát trực tiếp

Trong một số bài toán có thể phải đạo hàm nhiều lần liên tiếp thậm chí phải khảo sát thêm hàm số phụ. Ta thường sử dụng

❖ *f(x)* đồng biến trên [*a*; *b*] thì *f(x)* > *f(a)* với mọi *x* > *a*.

❖ *f(x)* nghịch biến trên [*a*; *b*] thì *f(x)* > *f(b)* với mọi *x* < *b*.

Chú ý. Lập bảng biến thiên nếu cần thiết hoặc sử dụng tính chất về điểm cực đại, cực tiểu.

Ví dụ 1. Chứng minh rằng với mọi $x > 0$ ta có $x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x$.

Lời giải

Xét hàm số $f(x) = -x + \frac{x^3}{6} + \sin x$ trên nửa khoảng $[0;+\infty)$. Ta có

$$f'(x) = \frac{x^2}{2} - 1 + \cos x$$
$$f''(x) = x - \sin x$$
$$f'''(x) = 1 - \cos x$$

Ta có $f'''(x) = 1 - \cos x \geq 0, \forall x \in [0;+\infty) \Rightarrow f''(x) \geq f''(0) = 0$, nên *f'(x)* đồng biến trên $[0;+\infty)$. Suy ra $f'(x) \geq f'(0) = 0 \Rightarrow f(x)$ đồng biến trên $[0;+\infty)$.

Do đó $f(x) \geq f(0) = 0, \forall x \geq 0$ và $f(x) > f(0) = 0, \forall x > 0$.

Tức là $\frac{x^3}{6} - x + \sin x > 0 \Leftrightarrow x - \frac{x^3}{6} < \sin x$ với x > 0 (1)

Lưu ý $f''(x) > f''(0) = 0$ với x > 0 ta có $\sin x < x$ (2)

Từ (1) và (2) ta có đpcm.

Ví dụ 2. Chứng minh với mọi x dương và n là số nguyên dương ta có

$$e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} ... + \frac{x^n}{n!}.$$

Lời giải

Xét hàm số $f_n(x) = e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} ... + \frac{x^n}{n!}\right)$ trên khoảng $(0;+\infty)$ ta có

$$f'_n(x) = e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right).$$

Từ đó suy ra $f^{(n)}{}_n(x) = e^x - 1 > 0, \forall x > 0 \Rightarrow f^{(n-1)}{}_n(x) > f^{(n-1)}{}_n(0) = 0$.

Sử dụng liên tiếp ta có $f'_n(x) > f'_n(0) = 0 \Rightarrow f_n(x) > f_n(0) = 0$ (đpcm).

Chú ý. Số thực dương a để bất đẳng thức sau luôn đúng với mọi số thực x là e.

$$a^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2} + ... + \frac{x^n}{n!}, \forall x \in \mathbb{R}; n \in \mathbb{N}^*.$$

Thật vậy, Bất đẳng thức đã cho tương đương với:

$$x \ln a \geq \ln\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + ... + \frac{x^n}{n!}\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \ln a \geq \dfrac{\ln\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + ... + \frac{x^n}{n!}\right)}{x}, x > 0 \\ \ln a \leq \dfrac{\ln\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + ... + \frac{x^n}{n!}\right)}{x}, x < 0 \end{cases}.$$

Chú ý

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + ... + \frac{x^n}{n!}\right)}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{\ln\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + ... + \frac{x^n}{n!}\right)}{x} = 1.$$

Do đó $\begin{cases} \ln a \geq 1 \\ \ln a \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow a = e$.

Ngược lại với a là e thì bất đẳng thức đúng.

Ví dụ 3. Cho n là số lẻ lớn hơn 3. Chứng minh rằng với mọi $x \neq 0$ ta có

$$\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!}\right)\left(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!}\right) < 1.$$

Lời giải

Đặt $\begin{cases} u(x) = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + ... + \dfrac{x^n}{n!} \\ v(x) = 1 - x + \dfrac{x^2}{2!} - \dfrac{x^3}{3!} + ... + \dfrac{x^n}{n!} \end{cases}$.

Ta cần chứng minh $f(x) = u(x).v(x) < 1$.

Ta có

$$\begin{cases} u'(x) = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + ... + \dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!} = u(x) - \dfrac{x^n}{n!} \\ v'(x) = -1 + x - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + ... + \dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!} = -v(x) - \dfrac{x^n}{n!} \end{cases}$$

Vì vậy

$$f'(x) = \left[u(x).v(x)\right]' = u'(x)v(x) + u(x).v'(x)$$

$$= \left[u(x) - \frac{x^n}{n!}\right].v(x) + u(x)\left[-v(x) - \frac{x^n}{n!}\right] = -\frac{x^n}{n!}\left[u(x) + v(x)\right]$$

$$= -\frac{2x^n}{n!}\left[1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ... + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right]$$

Vì n là số lẻ lớn hơn 3 nên $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm khi đi qua $x = 0$.

Do đó tại $x = 0$ thì hàm số đạt cực đại vì vậy $f(x) < f(0) = 1, \forall x \neq 0$. (đpcm).

Ví dụ 4. Chứng minh với mọi a, b, x > 0 và $a \neq b$ ta có $\left(\dfrac{a+x}{b+x}\right)^{b+x} > \left(\dfrac{a}{b}\right)^b$.

Lời giải

Xét hàm số $f(x) = \left(\dfrac{a+x}{b+x}\right)^{b+x}$, $x \geq 0$. Khi đó $\ln f(x) = (b+x)\ln\left(\dfrac{a+x}{b+x}\right)$.

Suy ra $\left[\ln f(x)\right]' = \left[(b+x)\ln\dfrac{a+x}{b+x}\right]'$

$$\Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \ln\frac{a+x}{b+x} + (b+x)\frac{b+x}{a+x}.\left(\frac{a+x}{b+x}\right)' = \ln\frac{a+x}{b+x} + \frac{b-a}{a+x}$$

$$\Rightarrow f'(x) = f(x)\left(\ln\frac{a+x}{b+x} + \frac{b-a}{a+x}\right) =$$

$$= \left(\frac{a+x}{b+x}\right)^{b+x}\left(\ln\frac{a+x}{b+x} + \frac{b-a}{a+x}\right) = \left(\frac{a+x}{b+x}\right)^{b+x}.g(x)$$

trong đó $g(x)=\ln\dfrac{a+x}{b+x}+\dfrac{b-a}{a+x}$. *Ta có*

$$g'(x)=\frac{b+x}{a+x}.\frac{b-a}{(b+x)^2}+\frac{a-b}{(a+x)^2}=-\frac{(a-b)^2}{(a+x)^2(b+x)}<0.$$

Do đó *g(x)* nghịch biến trên $(0;+\infty)$. Suy ra

$$g(x)>\lim_{x\to\infty}g(x)=\lim_{x\to\infty}\left(\ln\frac{a+x}{b+x}+\frac{b-a}{a+x}\right)=0.$$

Vậy $f'(x)>0,\ \forall x>0$, nên f(x) đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Suy ra *f(x) > f(0)* (đpcm).

Ví dụ 5. Cho $a,b\in[0;1]$. Chứng minh rằng

$$\frac{x}{a+b+1}+\frac{b}{x+a+1}+\frac{a}{x+b+1}+(1-x)(1-a)(1-b)\le 1,\ \forall x\in[0;1].$$

Lời giải

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{x}{a+b+1}+\dfrac{b}{x+a+1}+\dfrac{a}{x+b+1}+(1-x)(1-a)(1-b)$ liên tục trên đoạn [0;1] ta có

$$f'(x)=\frac{1}{a+b+1}-\frac{b}{(x+a+1)^2}-\frac{a}{(x+b+1)^2}-(1-a)(1-b)$$

$$f''(x)=\frac{2b}{(x+a+1)^3}+\frac{2a}{(x+b+1)^3}\ge 0,\quad \forall\in[0;1]$$

Nên hàm số f'(x) đồng biến trên [0; 1], suy ra phương trình f'(x) = 0 có nhiều nhất một nghiệm trên (0; 1).

- Nếu phương trình f'(x) = 0 vô nghiệm thì f(x) đơn điệu trên [0; 1], thì

$$f(x)\le\max_{[0;1]}f(x)=\max\{f(0);f(1)\}.$$

Ta có

$$f(0)=\frac{b}{a+1}+\frac{a}{b+1}+(1-a)(1-b)=\frac{a^2b^2+a+b+1}{(a+1)(b+1)}\le\frac{ab+a+b+1}{(a+1)(b+1)}=1;$$

$$f(1)=\frac{1}{a+b+1}+\frac{a}{b+2}+\frac{b}{a+2}\le\frac{1}{a+b+1}+\frac{a}{b+a+1}+\frac{b}{a+b+1}=1.$$

Suy ra $f(x)\le\max\limits_{[0;1]}f(x)=\max\{f(0);f(1)\}\le 1$.

- Nếu phương trình f'(x) = 0 có nghiệm duy nhất $x=x_0$. Khi đó do f'(x) đồng biến trên [0; 1], nên

$$f'(x)<0,\quad \forall x\in[0;x_0] \text{ và } f'(x)>0,\quad \forall x\in[x_0;1].$$

Do đó x_0 là điểm cực tiểu của hàm số, mà f(x) liên tục trên [0; 1] nên

$$f(x)\le \max_{[0;1]} f(x)=\max\{f(0);f(1)\}\le 1.$$

Từ hai trường hợp ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 6. Cho tam giác ABC có $A>B>C$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\sqrt{\frac{x-\sin A}{x-\sin C}}+\sqrt{\frac{x-\sin B}{x-\sin C}}.$$

Lời giải

Điều kiện xác định: $D=(-\infty;\sin C]\cup[\sin A;+\infty)$.

Xét hàm số $f(x)=\sqrt{\frac{x-\sin A}{x-\sin C}}+\sqrt{\frac{x-\sin B}{x-\sin C}}$ liên tục trên D ta có

$$f'(x)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x-\sin C}{x-\sin A}}.\frac{\sin A-\sin C}{(x-\sin C)^2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x-\sin C}{x-\sin B}}.\frac{\sin B-\sin C}{(x-\sin C)^2}>0,\forall xD.$$

Do đó f(x) đồng biến trên D và có $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2;\ f(\sin A)=\sqrt{\frac{\sin A-\sin B}{\sin A-\sin C}}<1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\sqrt{\frac{\sin A-\sin B}{\sin A-\sin C}}$ đạt tại $x=\sin A$.

Ví dụ 7. (VMC 2011) Cho $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ thỏa mãn $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha+n}<e<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\beta+n}$ với mọi n nguyên dương. Tìm $\min|\alpha-\beta|$.

Lời giải

Lấy logarit tự nhiên suy ra $\alpha<\dfrac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}-n<\beta,\forall n\in\mathbb{N}^*$.

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}-x, x\ge 1$. Khi đó

$$\min|\alpha-\beta|=\max_{x\ge1} f(x)-\min_{x\ge1} f(x).$$

Mặt khác $f'(x)=\dfrac{1}{x(x+1)}-1<0,\forall x\ge 1$.

Do đó $\max\limits_{x\ge1} f(x) - \min\limits_{x\ge1} f(x) = f(1) - \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \frac{1}{\ln 2} - 1 - \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} - x\right]$.

$$\frac{1}{\ln 2} - 1 - \lim_{x\to+\infty}\frac{1 - x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \frac{1}{\ln 2} - 1 - \lim_{x\to+\infty}\frac{-\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x+1}}{-\frac{1}{x(x+1)}}.$$

$$= \frac{1}{\ln 2} - 1 - \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x(x+1)} - \frac{1}{(x+1)^2}}{\frac{2x+1}{x^2(x+1)^2}} == \frac{1}{\ln 2} - 1 - \lim_{x\to+\infty}\frac{x(x+1) - x^2}{2x+1} = \frac{1}{\ln 2} - \frac{3}{2}.$$

Vậy $\min|\alpha - \beta| = \frac{1}{\ln 2} - \frac{3}{2}$.

Ví dụ 8. [MR No.4 2009] Cho các số thực .. thỏa mãn điều kiện

$$a_1^x + a_2^x + \ldots + a_n^x \ge b_1^x + b_2^x + \ldots + \mathrm{b}_n^x \quad \text{với mọi } x \in \mathbb{R}.$$

Chứng minh rằng $f : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$

$$f(x) = \left(\frac{a_1}{b_1}\right)^x + \left(\frac{a_2}{b_2}\right)^x + \ldots + \left(\frac{a_n}{b_n}\right)^x \quad \text{tăng trên } (0, +\infty).$$

Lời giải

Ta có $f'(x) = \left(\frac{a_1}{b_1}\right)^x \ln\left(\frac{a_1}{b_1}\right) + \left(\frac{a_2}{b_2}\right)^x \ln\left(\frac{a_2}{b_2}\right) + \ldots + \left(\frac{a_n}{b_n}\right)^x \ln\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$,

$$f''(x) = \left(\frac{a_1}{b_1}\right)^x \left[\ln\left(\frac{a_1}{b_1}\right)\right]^2 + \left(\frac{a_2}{b_2}\right)^x \left[\ln\left(\frac{a_2}{b_2}\right)\right]^2 + \ldots + \left(\frac{a_n}{b_n}\right)^x \left[\ln\left(\frac{a_n}{b_n}\right)\right]^2 \ge 0.$$

Suy ra $f'(x)$ là hàm tăng trên $\mathbb{R}$. Ta chứng minh $f'(0) = 0$, thật vậy.

Theo giả thiết ta có

$$b_1^x\left(\left(\frac{a_1}{b_1}\right)^x - 1\right) + b_2^x\left(\left(\frac{a_2}{b_2}\right)^x - 1\right) + \ldots + b_n^x\left(\left(\frac{a_n}{b_n}\right)^x - 1\right) \ge 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Với $x > 0$ ta có $b_1^x.\frac{\left(\frac{a_1}{b_1}\right)^x - 1}{x} + b_2^x.\frac{\left(\frac{a_2}{b_2}\right)^x - 1}{x} + \ldots + b_n^x.\frac{\left(\frac{a_n}{b_n}\right)^x - 1}{x} \ge 0, \forall x > 0$.

Cho $x \to 0^+$ ta được

$$\ln\frac{a_1}{b_1}+\ln\frac{a_2}{b_2}+...+\ln\frac{a_n}{b_n}\ge 0 \qquad (0.1)$$

Với $x<0$ ta có

$$b_1^x.\frac{\left(\frac{a_1}{b_1}\right)^x-1}{x}+b_2^x.\frac{\left(\frac{a_2}{b_2}\right)^x-1}{x}+...+b_n^x.\frac{\left(\frac{a_n}{b_n}\right)^x-1}{x}\le 0,\forall x<0 .$$

Cho $x\to 0^-$ ta được

$$\ln\frac{a_1}{b_1}+\ln\frac{a_2}{b_2}+...+\ln\frac{a_n}{b_n}\le 0 \qquad (0.2)$$

Từ (0.1) và (0.2) suy ra $f'(0)=\ln\frac{a_1}{b_1}+\ln\frac{a_2}{b_2}+...+\ln\frac{a_n}{b_n}=0$

$\Rightarrow f'(x)\ge f'(0)=0\Rightarrow$ điều phải chứng minh.

Ví dụ 9. Cho các số thực $a_1,a_2,...,a_n>0$ và hàm số $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ xác định bởi $f(x)=\left(\frac{a_1^x+a_2^x+...+a_n^x}{n}\right)^{1/x}$.

Chứng minh rằng f là hàm tăng và tính giới hạn của $f(x)$ khi $x\to+\infty$.

Lời giải

Xét hàm số $g:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ xác định bởi $g(x)=x^t$ là hàm lồi.

Xét $t=\frac{y}{x}>1$ tức $x<y$, khi đó ta có

$$g\left(\frac{a_1^x+a_2^x+...+a_n^x}{n}\right)=\left(\frac{a_1^x+a_2^x+...+a_n^x}{n}\right)^{\frac{y}{x}}\le\frac{1}{n}\left(g\left(a_1^x\right)+g\left(a_2^x\right)+...+g\left(a_n^x\right)\right)$$

$$=\frac{1}{n}\left(a_1^y+a_2^y+...+a_n^y\right)$$

Bất đẳng thức trên tương đương với

$$\left(\frac{a_1^x+a_2^x+...+a_n^x}{n}\right)^{1/x}\le\left(\frac{a_1^y+a_2^y+...+a_n^y}{n}\right)^{1/y}\Rightarrow f(x)\le f(y).$$

Vậy f là hàm tăng. Ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 10. (IMC 2006) So sánh $\sin(\tan x)$ và $\tan(\sin x)$ với $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

Lời giải

Xét hàm số $f(x) = \tan(\sin x) - \sin(\tan x)$ trên $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Ta có $f'(x) = \dfrac{\cos x}{\cos^2(\sin x)} - \dfrac{\cos(\tan x)}{\cos^2 x} = \dfrac{\cos^3 x - \cos(\tan x)\cos^2(\sin x)}{\cos^2 x \cos^2(\sin x)}$.

Nếu $0 < x < \arctan\dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \cos(\tan x) > 0$ sử dụng bất đẳng thức cô si ta được

$$\cos(\tan x)\cos^2(\sin x) \le \left[\frac{\cos(\tan x) + 2\cos(\sin x)}{3}\right]^3 \le \left[\cos\left(\frac{\tan x + 2\sin x}{3}\right)\right]^3 < \cos^3 x$$

do $\cos x$ là hàm lõm và $\tan x + 2\sin x > 3x, \forall x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Do đó $f'(x) > 0$ hay $f(x)$ là hàm tăng trên $\left(0; \arctan\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Vì vậy $f(x) > f(0) = 0 \Rightarrow \tan(\sin x) > \sin(\tan x)$.

Nếu $x = arc\tan\dfrac{\pi}{2}$ thì

$$\tan\left(\sin\left(arc\tan\frac{\pi}{2}\right)\right) = \tan\frac{\pi/2}{\sqrt{1+\pi^2/4}} > \tan\frac{\pi}{4} > 1 > \sin\left(\tan\left(arc\tan\frac{\pi}{2}\right)\right).$$

Nếu $x \in \left(arc\tan\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \tan(\sin x) > 1 > \sin x(\tan x)$.

Vậy với mọi $x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ thì $\tan(\sin x) > \sin(\tan x)$.

4) Vận dụng kết hợp các bất đẳng thức khác như AM – GM; C –S

Trước khi khảo sát tính đơn điệu của hàm số ta sử dụng các đánh giá cơ bản thông qua các bất đẳng thức cơ bản như AM – GM; C – S sẽ đưa về chứng minh một bất đẳng thức cơ bản hơn thuận lợi cho việc khảo sát hàm số.

Ví dụ 1. Chứng minh rằng nếu $0 \le x < \dfrac{\pi}{2}$ ta có $2^{\sin x} + 2^{\tan x} \ge 2^{x+1}$.

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức AM –GM ta có $2^{\sin x} + 2^{\tan x} \ge 2.\sqrt{2^{\sin x}.2^{\tan x}}$.

Ta chứng minh $2\sqrt{2^{\sin x}.2^{\tan x}} \ge 2^{x+1} \Leftrightarrow 2^{\sin x + \tan x} \ge 2^{2x} \Leftrightarrow \sin x + \tan x \ge 2x$.

Xét hàm số $f(x) = \sin x + \tan x - 2x$ liên tục trên $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$, ta có

$$f'(x)=\cos x+\frac{1}{\cos^2 x}-2>\cos^2 x+\frac{1}{\cos^2 x}-2\ge 0,\forall x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right].$$

(vì với $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ thì $\cos x>\cos^2 x$ và theo BĐT AM-GM ta có $\cos^2 x+\frac{1}{\cos^2 x}\ge 2$).

Do đó f(x) đồng biến trên $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

Suy ra $f(x)\ge f(0)=0$, hay $\sin x+\tan x\ge 2x$ với mọi $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ (đpcm).

Bài tập tương tự

Chứng minh rằng $4^{\sin x}+2^{\tan x}\ge 2^{\frac{3x+2}{2}}, \quad \forall x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right)$.

Ví dụ 2. Chứng minh rằng $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3>\cos x, \quad \forall x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

Lời giải

Bất đẳng thức tương đương với:

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3>\cos x\Leftrightarrow\frac{\sin^3 x}{x^3}>\cos x\Leftrightarrow \sin^2 x.\tan x\text{-}\ x^3>0 \quad (1).$$

Xét hàm số $f(x)=\sin^2 x.\tan x\text{-}\ x^3$ với $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

Ta có $f'(x)=2\sin^2 x+\tan^2 x-3x^2$.

Áp dụng BĐT $3(a^2+b^2+c^2)\ge(a+b+c)^2$ ta có

$$f'(x)=\sin^2 x+\sin^2 x+\tan^2 x-3x^2\ge\frac{1}{3}(2\sin x+\tan x)^2-3x^2.$$

Đặt $g(x)=2\sin x+\tan x-3x, \quad x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right)$, thì

$$g'(x)=2\cos x+\frac{1}{\cos^2 x}-3=\cos x+\cos x+\frac{1}{\cos^2 x}-3\ge 3\sqrt[3]{\cos^2 x.\frac{1}{\cos^2 x}}-3=0$$

với mọi $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right)$, nên g(x) đồng biến trên $\left[0;\frac{\pi}{2}\right)$.

Suy ra $g(x) \geq g(0) = 0, \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Do đó $f'(x) \geq \frac{1}{3}(3x)^2 - 3x^2 = 0$ nên f(x) đồng biến trên $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Suy ra

$f(x) > f(0) = 0, \quad \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Nhận xét: Khi trong BĐT có chứa các loại hàm số khác nhau ta thường cô lập mỗi loại hàm số để dễ xét dấu của đạo hàm, hoặc ta có thể đạo hàm liên tiếp để khử bớt một loại hàm số.

Cách 2: Ta có $x - \frac{x^3}{6} < \sin x$, suy ra

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 > \left(1 - \frac{x^2}{6}\right)^3 = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{216} > 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \quad (2)$$

Ta chứng minh được $\cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \quad (2)$

Từ (1) và (2) ta có đpcm.

5) Kỹ thuật vận dụng định lý Lagrange

Định lý. Nếu hàm số $y = f(x)$ là hàm liên tục trên đoạn $[a;\ b]$ và có đạo hàm trên khoảng $(a;\ b)$ thì tồn tại $c \in (a;\ b)$ sao cho $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Ví dụ 1. Chứng minh $(1 + \frac{1}{x})^x < (1 + \frac{1}{x+1})^{x+1}, \quad \forall x \in (0; +\infty)$.

Lời giải

Ta có: $(1 + \frac{1}{x})^x < (1 + \frac{1}{x+1})^{x+1} \Leftrightarrow x[\ln(x+1) - \ln x] < (x+1)[\ln(x+2) - \ln(x+1)]$

Xét hàm số $f(x) = x[\ln(x+1) - \ln x]$ ta có

$$f'(x) = \ln(x+1) - \ln x + \frac{x}{x+1} - 1 = \ln(x+1) - \ln x - \frac{1}{x+1}.$$

Áp dụng định lí Lagrange đối với hàm số: $y = \ln t$ trên $[x;\ x+1]$, thì tồn tại $c \in (x;\ x+1)$ sao cho: $f'(c) = \ln(x+1) - \ln x \Rightarrow \frac{1}{c} = \ln(x+1) - \ln x$.

Mặt khác $0 < x < c < x + 1 \Rightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{c} > \frac{1}{x+1}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{x} > \ln(x+1) - \ln x > \dfrac{1}{x+1} \Rightarrow \ln(x+1) - \ln x - \dfrac{1}{x+1} > 0$

$\Rightarrow f'(x) > 0, \quad \forall x \in (0;+\infty) \Rightarrow$ hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Từ (1) suy ra: $f'(x) > 0, \forall x \in (0;+\infty) \Rightarrow$ $f(x)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Suy ra: $f(x+1) > f(x), \forall x \in (0;+\infty) \Rightarrow$ điều phải chứng minh.

Chú ý. Ta có thể chứng minh trực tiếp hàm số $y = \left(1+\dfrac{1}{t}\right)^t$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

\+ Với mọi x dương ta có $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x < e < \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+1}$.

Ví dụ 2. Cho số nguyên dương n. Chứng minh rằng

$$x^n.\sqrt{1-x} < \frac{1}{\sqrt{2n.e}} \text{ với mọi } x \in (0;1).$$

Lời giải

Bất đẳng thức tương đương với

$$x^n.\sqrt{1-x} < \frac{1}{\sqrt{2n.e}} \Leftrightarrow x^{2n}(1-x) < \frac{1}{2ne} \quad (*)$$

Xét hàm số $f(x) = x^{2n}(1-x)$ với $x \in (0;1)$, ta có

$$f'(x) = x^{2n-1}\left[2n - (2n+1)x\right].$$

Suy ra f'(x) đổi dấu từ dương sang âm khi đi qua $x = \dfrac{2n}{2n+1}$.

Vì vậy $\max\limits_{(0;1)} f(x) = f\left(\dfrac{2n}{2n+1}\right) = \dfrac{(2n)^{2n}}{(2n+1)^{2n+1}}$.

Ta chứng minh $\dfrac{(2n)^{2n}}{(2n+1)^{2n+1}} < \dfrac{1}{2ne} \Leftrightarrow \left(\dfrac{2n}{2n+1}\right)^{2n+1} < \dfrac{1}{e}$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2n+1}{2n}\right)^{2n+1} > e \Leftrightarrow (2n+1)\left[\ln(2n+1) - \ln(2n)\right] > 1.$$

$$\Leftrightarrow \ln(2n+1) - \ln(2n) > \frac{1}{2n+1} \quad (2).$$

Áp dụng định lý Lagrange cho hàm số $f(x) = \ln x$ trên [2n; 2n+1] suy ra tồn tại $c \in \left[2n; 2n+1\right]$ thuộc sao cho $f'(x) = \dfrac{f(2n+1) - f(2n)}{2n+1-2n}$.

Suy ra $\ln(2n+1)-\ln(2n)=\frac{1}{e}>\frac{1}{2n+1}$ (3).

Từ (1), (2) và (3) suy ra đpcm.

C. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1. Chứng minh các bất đẳng thức sau

a) $x-\frac{x^3}{6}<\sin x<x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}$ với mọi $x>0$.

b) $1-\frac{x^2}{2}<\cos x<1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}$ với mọi x là số thực dương.

c) $\frac{1}{\sin^2 x}<\frac{1}{x^2}+1-\frac{4}{\pi^2}$ với mọi $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

d) $1<x.\cos^2 x<\frac{\pi+2}{4}$ với mọi $x\in\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$.

e) $1-x\le\frac{e^{-x^2}}{x+1}\le 1-x+\frac{x^4}{2(1+x)}$ với mọi x thuộc đoạn [0;1].

Bài 2. Chứng minh rằng

a) Với mọi $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ ta có $\sin x\le\frac{4}{\pi}x-\frac{4}{\pi^2}x^2$.

b) $3x-x^3<\frac{2}{\sin 2x}$ với $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

Bài 3. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=\frac{\sin^3 x}{\cos x}+\frac{\cos^3 x}{\sin x}$ trên khoảng $\left(0;\frac{\pi}{4}\right)$.

Bài 4. Cho số nguyên dương n. Chứng minh rằng $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(2k-1)}<2\ln 2$.

Bài 5. Chứng minh rằng: $1+\ln n>\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}>\ln(n+1),\forall n\in N^*$.

Bài 6. Tìm GTNN của hàm số $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}$.

Bài 7. Chứng minh rằng $x^{\frac{x}{1-x}}+x^{\frac{1}{1-x}}>\frac{2}{e},\quad\forall x\in(0;1)$.

Bài 8. Chứng minh rằng với mọi x ta có

$$\sqrt{17}\le\sqrt{\cos^2 x+4\cos x+6}+\sqrt{\cos^2 x-2\cos x+3}\le\sqrt{2}+\sqrt{11}.$$

Bài 9. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\frac{1+\sqrt{x+3}}{x-1}$ trên nửa khoảng $(1;6]$.

Bài 10. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=(x+1)\sqrt{1-x^2}$.

Bài 11. (TSĐH Khối D 2010) Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y=\sqrt{-x^2+4x+21}-\sqrt{-x^2+3x+10}.$$

Bài 12. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x+\frac{11}{2x}+2\sqrt{1+\frac{7}{x^2}}$ trên khoảng $(0;+\infty)$.

Bài 13. (TSĐH Khối B 2003) Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x+\sqrt{4-x^2}$.

Bài 14. (TN THPT 2014) Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y=\frac{1}{4}x^2-x-\sqrt{4x-x^2}$.

Bài 15. (TSĐH Khối D 2003) Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y=\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} \text{ trên đoạn } [-1;2].$$

Bài 16. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=e^x-1-x-\frac{x^2}{2}$ trên đoạn $[0;1]$.

Bài 17. Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số $y=\frac{\ln x}{x^2+1}$ trên đoạn $\left[\frac{1}{2};1\right]$.

Bài 18. (TSĐH Khối B 2004) Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\frac{\ln^2 x}{x}$ trên đoạn $\left[1;e^3\right]$.

Bài 19. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sin^5 x+\sqrt{3}\cos x$.

Bài 20. Chứng minh rằng $e^x+\cos x\geq 2+x-\frac{x^2}{2}$ với mọi số thực x.

Bài 21. Chứng minh rằng $1+x\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\geq\sqrt{x^2+1}$ với mọi số thực x.

Bài 22. Chứng minh rằng $\ln\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)<\ln x+\frac{1}{x}$ với mọi số thực dương x.

Bài 25. Cho hàm số $f(x)=\frac{(x+1)^2-2}{x^2+1}$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x).f(1-x)$ trên đoạn $[-1;1]$.

Bài 26. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\frac{\sin x+2\cos\frac{x}{2}}{\cos x+2\sin\frac{x}{2}}$ trên đoạn $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

Bài 27. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y=\frac{\sqrt{x+1}+2\sqrt{3-x}+2}{2\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}+1}.$$

Bài 28. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y=x\left(2013+\sqrt{2015-x^2}\right).$$

Bài 29. Chứng minh rằng với mọi số thực x ta có $3\leq 2^{|\sin x|}+2^{|\cos x|}\leq 2^{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}$.

Bài 30. Tìm tất cả các số thực a để bất đẳng thức sau luôn đúng với mọi x không âm $\ln(1+x)\geq x-ax^2$.

Bài 31. Tìm tất cả các giá trị của k để bất đẳng thức sau đúng với mọi số thực a và b không âm $e^{a+b}\geq 1+a+b+k(a-b)^2$.

Bài 31. Đáp số: $k=e-2$.

Bài 32. Chứng minh rằng với mọi $x>2$ ta có $(x+1)\cos\frac{\pi}{x+1}-x\cos\frac{\pi}{x}>1$.

Bài 33. Chứng minh rằng với mọi $0<x<1$ ta có $\frac{1}{x^2}\left[\ln\frac{x-x^2}{x^2-x+1}-\ln\frac{x}{1-x}\right]<-4$.

Bài 34. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương $n\geq 3$ ta có $n^{n+1}\geq(n+1)^n$.

Bài 35. Cho tam giác ABC có $A\leq B\leq C<90^0$.

Chứng minh $\frac{2\cos 3C-4\cos 2C+1}{\cos C}\geq 2$.

Bài 36. Cho a,b,c là các số thực thoả mãn điều kiện $a \le 6, b \le -8, c \le 3$. Chứng minh với mọi $x \ge 1$ ta có $x^4 - ax^2 - bx - c \ge 0$.

Bài 37. Cho $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x\tan^n x dx, n \ge 1$. Chứng minh $I_n > \frac{1}{n+2}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{n+2}$.

Bài 38. (*Đại học khối A, 2004*) Cho tam giác ABC không tù, thỏa mãn điều kiện

$\cos 2A + 2\sqrt{2}\cos B + 2\sqrt{2}\cos C = 3 \quad (1)$.

Tính các góc của tam giác ABC.

D. HƯỚNG DẪN GIẢI – ĐÁP

Bài 3. Ta có $f(x) = \frac{\sin^4 x + \cos^4 x}{\sin x \cos x} = \frac{1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x}{\frac{1}{2}\sin 2x} = \frac{2 - \sin^2 2x}{\sin 2x}$.

$$= \frac{(1-\sin 2x)(2+\sin 2x)}{\sin 2x} + 1 \ge 1, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của f(x) bằng 1 đặt tại $x = \frac{\pi}{4}$.

Bài 4. Xét hàm số $f(x) = \ln(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - ... + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \frac{x^{2n}}{2n}\right)$

trên $[0;+\infty)$. Hàm số đồng biến trên $[0;+\infty)$ suy ra $f(x) > f(0)$, đpcm.

Bài 5. Xét $f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$ và $f'(x)$ nghịch biến trên $(0:+\infty)$.

Tương tự bài toán trên ta có:

$$f(n) - f(1) + f'(1) > \sum_{i=1}^{n} f'(i) > f(n+1) - f(1), \forall n \in N^*$$

$$\Rightarrow 1 + \ln n > \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} > \ln(n+1), \forall n \in N^*$$

Bài 6. Xét hàm số $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 - x + 1}$ trên R. Ta có

$$f'(x)=\frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}}+\frac{x-\frac{1}{2}}{\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}}=\frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}}+\frac{\frac{1}{2}-x}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}-x\right)^2+\frac{3}{4}}}$$

$$=g\left(x+\frac{1}{2}\right)+g\left(\frac{1}{2}-x\right)$$

với mọi x, trong đó $g(t)=\frac{t}{\sqrt{t^2+\frac{3}{4}}}, t\in R.$

Vì hàm g đồng biến trên R nên $f'(x)=0\Leftrightarrow x=0$

$$f'(x)>0\Leftrightarrow g\left(x+\frac{1}{2}\right)>g\left(\frac{1}{2}-x\right)\Leftrightarrow x>0$$

Điều đó chứng tỏ f(x) đạt cực tiểu tại $x=0$. Vì vậy $\min f(x)=2\Leftrightarrow x=0$.

Bài tập tương tự

Tìm tập giá trị của hàm số $f(x)=\sqrt{x^2+2x+4}-\sqrt{x^2-2x+4}$.

Bài 7. HD: Xét hàm số

$$f(x)=x^{\frac{x}{1-x}}+x^{\frac{1}{1-x}}=x^{\frac{x}{1-x}}+x.x^{\frac{x}{1-x}}=(1+x)x^{\frac{x}{1-x}},\quad \forall x\in(0;1).$$

Bài 9. Ta có $y'=\frac{-x-7-2\sqrt{x+3}}{2\sqrt{x+3}(x-1)^2}<0,\forall x\in(1;6]$.

Do đó hàm số nghịch biến trên $(1;6]$.

Vì vậy $y_{\min}=y(6)=\frac{4}{5}$, không tồn tại max.

Bài 10. Tập xác định: $D=[-1;1]$.

Ta có $y'=\frac{-2x^2-x+1}{\sqrt{1-x^2}}; y'=0\Leftrightarrow 2x^2+x-1=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{1}{2} \\ x=-1 \end{array}\right.$.

Ta có $y(-1)=y(1)=0; y\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

Vậy $y_{\max}=y\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{4}; y_{\min}=y(\pm1)=0$.

Bài 11. Điều kiện: $\begin{cases}-x^2+4x+21\ge 0\\ -x^2+3x+10\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow -2\le x\le 5$.

Xét hàm số $y=\sqrt{-x^2+4x+21}-\sqrt{-x^2+3x+10}$ trên đoạn [-2;5] ta có

$$y'=\frac{-2x+4}{2\sqrt{-x^2+4x+21}}-\frac{-2x+3}{2\sqrt{-x^2+3x+10}};$$

$$y'=0\Leftrightarrow\left(-2x+4\right)\sqrt{-x^2+3x+10}=\left(-2x+3\right)\sqrt{-x^2+4x+21}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left(-2x+3\right)\left(-2x+4\right)\ge 0\\ \left(-2x+4\right)^2\left(-x^2+3x+10\right)=\left(-2x+3\right)^2\left(-x^2+4x+21\right)\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{1}{3}$$

Ta có $y(-2)=3; y\left(\frac{1}{3}\right)=\sqrt{2}; y(5)=4$.

Vậy $y_{\min}=y\left(\frac{1}{3}\right)=\sqrt{2}$.

Chú ý. $y>0; y^2=\left(\sqrt{\left(x+3\right)\left(5-x\right)}-\sqrt{\left(x+2\right)\left(7-x\right)}\right)^2+2\ge 2\Rightarrow y\ge\sqrt{2}$.

Khảo sát hàm số cho ta cả kết quả max.

Bài 12. Ta có

$$y'=1-\frac{11}{2x^2}-\frac{14}{x^3\sqrt{1+\frac{7}{x^2}}}=\frac{\left(2x^2-11\right)\sqrt{x^2+7}-28}{2x^2\sqrt{x^2+7}};$$

$$y'=0\Leftrightarrow\left(2x^2-11\right)\sqrt{x^2+7}-28=0\Leftrightarrow x=3$$

Ta có y' đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua $x=3$ nên y đạt cực tiểu tại $x=3$.

Vì vậy $y_{\min}=y(3)=\frac{15}{2}$.

Bài tập tương tự

Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=2x+\frac{1}{x}+\sqrt{2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}$ với $x>0$.

Bài 13. Tập xác định: $D=\left[-2;2\right]$.

Ta có $y'=1-\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}; y'=0\Leftrightarrow\sqrt{4-x^2}=x\Leftrightarrow x=\sqrt{2}$.

Suy ra $y(-2)=-2; y(\sqrt{2})=2\sqrt{2}; y(2)=2$.

Vậy $y_{\max}=y(\sqrt{2})=2\sqrt{2}; y_{\min}=y(-2)=-2$.

Bài 14. Tập xác định: $D=\left[0;4\right]$.

Ta có $y'=\frac{1}{2}x-1-\frac{2-x}{\sqrt{4x-x^2}}=(x-2)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{4x-x^2}}\right); y'=0\Leftrightarrow x=2$.

Suy ra $y(0)=0; y(2)=-3; y(4)=0$.

Vì vậy $y_{\max}=y(0)=y(4)=0; y_{\min}=y(2)=-3$.

Bài 15. Ta có $y'=\frac{1-x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}; y'=0\Leftrightarrow x=1$.

Suy ra $y(-1)=0; y(1)=\sqrt{2}; y(2)=\frac{3}{\sqrt{5}}$.

Vì vậy $y_{\max}=y(1)=\sqrt{2}; y_{\min}=y(-1)=0$.

Bài 16. Ta có

$$y'=e^x-1-x; y''=e^x-1\geq 0, \forall x\in[0;1]$$

$$\Rightarrow y'\geq y'(0)=0\Rightarrow y_{\max}=y(1)=e-\frac{5}{2}; y_{\min}=y(0)=0.$$

Chú ý. $e^x\geq 1+x+\frac{x^2}{2}+...+\frac{x^n}{n!}, \forall x\geq 0, n\in N^*$.

Bài 17. Ta có

$$y'=\frac{\frac{1}{x}(x^2+1)-2x\ln x}{(x^2+1)^2}=\frac{x+\frac{1}{x}-2x\ln x}{(x^2+1)^2}\geq\frac{2-2x\ln x}{(x^2+1)^2}>0, \forall x\in\left[\frac{1}{2};1\right].$$

Suy ra $y_{\min}=y\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{4\ln 2}{5}; y_{\max}=y(1)=0$.

Bài 18. Ta có $y'=\frac{\ln x(2-\ln x)}{x^2}; y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\ln x=0\\ \ln x=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=e^2\end{array}\right.$.

Suy ra $y(1)=0; y(e^2)=\frac{4}{e^2}; y(e^3)=\frac{9}{e^3}$.

Vì vậy $y_{\max}=y(e^2)=\frac{4}{e^2}; y_{\min}=y(1)=0$.

Bài 19. Vì hàm số đã cho tuần hoàn với chu kỳ $T=2\pi$ nên ta chỉ cần tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0;2\pi]$.

Ta có $y'=5\sin^4 x\cos x-\sqrt{3}\sin x=\sin x\left(5\sin^3 x\cos x-\sqrt{3}\right)$;

$$y'=0\Leftrightarrow\sin x\left(5\sin^3 x\cos x-\sqrt{3}\right)\ (1)$$

Chú ý.

$$\left(\sin^3 x\cos x\right)^2 = \frac{1}{3}3\cos^2 x.\sin^2 x.\sin^2 x.\sin^2 x \le \frac{1}{3}\left(\frac{3\cos^2 x + 3\sin^2 x}{4}\right)^3 < \frac{3}{27}.$$

Vì vậy $(1) \Leftrightarrow \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi \Rightarrow x = 0, x = \pi, x = 2\pi$.

Suy ra $y(0) = y(2\pi) = \sqrt{3}; y(\pi) = -\sqrt{3}$.

Vậy $y_{\max} = y(0) = y(2\pi) = \sqrt{3}; y_{\min} = y(\pi) = -\sqrt{3}$.

Bài 20. Xét hàm số $y = e^x + \cos x + \dfrac{x^2}{2} - x - 2$ ta có

$$y' = e^x - \sin x + x - 1; y'' = e^x - \cos x + 1 > 0, \forall x.$$

Mặt khác $y'(0) = 0$ nên $y' > 0, \forall x \in (0;+\infty); y' < 0, \forall x \in (-\infty;0)$.

Do đó hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$. Vì vậy $y \ge y(0) = 0$ (đpcm).

Bài 21. Xét hàm số $y = 1 + x\ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) - \sqrt{x^2+1}$ ta có

$$y' = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right); y' = 0 \Leftrightarrow x + \sqrt{x^2+1} = 1 \Leftrightarrow x = 0.$$

Ta có y' đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua $x = 0$ nên đạt cực tiểu tại $x = 0$.
Vì vậy $y \ge y(0) = 0$ (đpcm).

Bài 25. Tính được $y = \dfrac{x^2(1-x)^2 + 8x(1-x) - 2}{x^2(1-x)^2 - 2x(1-x) + 2}$.

Đặt $t = x(1-x) \in \left[-2;\dfrac{1}{4}\right], \forall x \in [-1;1]$ khi đó $y = \dfrac{t^2 + 8t - 2}{t^2 - 2t + 2}$.

Ta có $y' = -\dfrac{2\left(5t^2 - 4t - 6\right)}{\left(t^2 - 2t + 2\right)^2}; y' = 0 \Leftrightarrow 5t^2 - 4t - 6 = 0 \xleftrightarrow{t \in \left[-2;\frac{1}{4}\right]} t = \dfrac{2 - \sqrt{34}}{5}$.

Tính các giá trị suy ra $y_{\min} = y\left(\dfrac{2-\sqrt{34}}{5}\right) = 4 - \sqrt{34}; y_{\min} = y\left(\dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{1}{25}$.

Bài 26. Ta có $y' = \dfrac{\sin\frac{3x}{2} - 1}{\left(\cos x + 2\sin\frac{x}{2}\right)^2} \le 0, \forall x \in \left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Vì vậy $y_{\min} = y(0) = 2; y_{\max} = y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Bài 27. Tập xác định: $D=[-1;3]$.

Do $\left(\sqrt{x+1}\right)^2+\left(\sqrt{3-x}\right)^2=4\Rightarrow \exists t\in[0;1] \mid \sqrt{x+1}=\frac{4t}{t^2+1},\sqrt{3-x}=\frac{2\left(1-t^2\right)}{t^2+1}$.

Khi đó $y=\frac{2t^2-4t-6}{t^2-8t-3}$.

Từ đó dễ có $y_{\min}=y(1)=\frac{4}{5}; y_{\max}=y(0)=2$.

Bài 28. Tập xác định: $D=\left[-\sqrt{2015};\sqrt{2015}\right]$.

Ta có $y'=2013+\frac{2015-2x^2}{\sqrt{2015-x^2}}; y'=0\Leftrightarrow 2x^2-2015=2013\sqrt{2015-x^2}$.

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2x^2-2015\ge 0\\ \left(2x^2-2015\right)=2013^2\left(2015-x^2\right)\end{cases}\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{2014}$$

Suy ra $y_{\max}=y(\sqrt{2014})=2014\sqrt{2014}; y_{\min}=y(-\sqrt{2014})=-2014\sqrt{2014}$.

Bài 29. Đặt $y=2^{|\sin x|}+2^{|\cos x|}$ và $t=|\sin x|, t\in[0;1]$ khi đó $y=2^t+2^{\sqrt{1-t^2}}$

Ta có $y'=2^t\ln 2-\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}2^{\sqrt{1-t^2}}\ln 2; y'=0\Leftrightarrow 2^t=\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}2^{\sqrt{1-t^2}}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}0<t<1\\ \frac{2^t}{t}=\frac{2^{\sqrt{1-t^2}}}{\sqrt{1-t^2}}\ (1)\end{cases}$$

Xét hàm số $f(a)=\frac{2^a}{a}$ trên khoảng $(0;1)$ ta có

$f'(a)=\frac{2^a(a\ln 2-1)}{a^2}<0,\forall a\in(0;1)$. Do đó f(a) nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.

Vì vậy (1) $\Leftrightarrow f(t)=f\left(\sqrt{1-t^2}\right)\Leftrightarrow t=\sqrt{1-t^2}\Leftrightarrow t=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Ta có $y(0)=y(1)=3; y\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=2^{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}$.

Suy ra $y_{\min}=y(0)=y(1)=3; y_{\max}=y\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=2^{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}$ (đpcm).

Bài tập tương tự

Chứng minh rằng với mọi số thực x ta có $8 \le 4^{|\sin x|} + 4.2^{|\cos x|} \le 5.4^{\frac{1}{\sqrt{5}}}$.

Bài 30. Xét hàm số $f(x) = ax^2 - x + \ln(1+x)$ trên $[0;+\infty)$.

Ta cần tìm a để $f(x) \ge 0, \forall x \ge 0$.

Ta có $f'(x) = \dfrac{x}{x+1}(2ax + 2a - 1)$.

\+ Nếu $a \le 0 \Rightarrow f'(x) \le 0 \Rightarrow f(x) \le f(0) = 0$ không thoả mãn.

\+ Nếu $0 < a < \dfrac{1}{2} \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = \dfrac{1-2a}{2a}$.

Khi đó $f(x) \le f(0) = 0$ không thoả mãn.

\+ Nếu $a \ge \dfrac{1}{2} \Rightarrow 2ax + 2a - 1 \ge 0 \Rightarrow f'(x) \ge 0 \Rightarrow f(x) \ge f(0) = 0$ thoả mãn.

Vậy giá trị cần tìm của a là : $a \ge \dfrac{1}{2}$.

Bài 32. HD: Sử dụng định lý Lagrange cho hàm số $y = t\cos\dfrac{\pi}{t}$.

Bài 33. Hướng dẫn sử dụng định lý Lagrange cho hàm số $y = \ln\dfrac{x}{1-x}$.

Bài 34. Lấy logarit tự nhiên hai vế ta cần chứng minh $\dfrac{n+1}{\ln(n+1)} \ge \dfrac{n}{\ln n}$.

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$ với $x \ge 3$ ta có $f'(x) = \dfrac{\ln x - 1}{\ln^2 x} > 0, \forall x \ge 3$.

Từ đó suy ra $f(n+1) > f(n) \Rightarrow \square$.

Bài 35. Đưa về chứng minh $y = 8t^3 - 8t^2 - 8t + 5 \ge 0, t = \cos C \in \left(0;\dfrac{1}{2}\right]$.

Bài 37. Sử dụng $\tan x \ge x, \forall x \in \left[0;\dfrac{\pi}{4}\right] \Rightarrow I_n > \int_0^{\frac{\pi}{4}} x^{n+1}dx = \dfrac{1}{n+2}\left(\dfrac{\pi}{4}\right)^{n+2}$. (Xem thêm chủ đề Kỹ thuật đánh giá bất đẳng thức Tích phân).

Bài 38. Từ giả thiết $0 < A \le \dfrac{\pi}{2}$, suy ra $0 < \sin\dfrac{A}{2} \le \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Ta có $(1) \Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 A + 2\sqrt{2}(\cos B + \cos C) = 3$

$$\Leftrightarrow -\sin^2 A + 2\sqrt{2}\sin\frac{A}{2}.\cos\frac{B-C}{2} = 1 \qquad (2)$$

Lại có $2\sqrt{2}\sin\frac{A}{2}.\cos\frac{B-C}{2} \le 2\sqrt{2}\sin\frac{A}{2} \quad (3)$

Từ (2) và (3) ta có $-\sin^2 A + 2\sqrt{2}\sin\frac{A}{2} - 1 \ge 0$.

Đặt $t = \sin\frac{A}{2}$ thì bất đẳng thức trở thành: $-4t^2\left(1-t^2\right) + 2\sqrt{2}t - 1 \ge 0 \quad (4)$

Xét hàm $f(t) = 4t^4 - 4t^2 + 2\sqrt{2}t - 1$.

Ta phải có $f(t) \ge 0$ với $0 < t \le \frac{1}{\sqrt{5}}$ (5).

$$f'(t) = 16t^3 - 8t + 2\sqrt{2};\ f''(t) = 48t^2 - 8 \Rightarrow f''(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

Suy ra $f''(t) < 0 \Leftrightarrow 0 < t < \frac{1}{\sqrt{6}};\ f''(t) < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{6}} < t < \frac{1}{\sqrt{2}}$

Vì vậy $f'(t) \ge f'\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right) > 0$ nên f(t) đồng biến trên $\left(0;\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$.

Do đó $f(t) \le f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0$.

Vì vậy dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $t = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \sin\frac{A}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow A = \frac{\pi}{2}$

$$y = x^2 + x - 12, y \le 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 12 \le 0 \Leftrightarrow -4 \le x \le 3$$

Thay vào ta được $\cos\frac{B-C}{2} = 1 \Rightarrow B = C = \frac{\pi}{4}$.

CHỦ ĐỀ 2: KỸ THUẬT SỬ DỤNG TÍNH ĐƠN ĐIỆU CHO BÀI TOÁN CỰC TRỊ VÀ BẤT ĐẲNG THỨC HAI BIẾN SỐ

A. NỘI DUNG PHƯƠNG PHÁP

Nguyên tắc chung của kỹ thuật này là dùng phép thế(rút biến x theo y hoặc ngược lại) thay vào biểu thức cần tìm cực trị đưa về khảo sát hàm một biến. Tuy nhiên nếu tinh tế sử dụng các bất đẳng thức cơ bản(tổng và tích đối xứng với hai biến) và nhận ra các phép đặt đặc biệt đưa về một biến mới chung giữa hai biến sẽ giúp ta xử lý bài toán đơn giản hơn.

1. **Kỹ thuật thế biến đưa về khảo sát hàm một biến**

   Rút x theo y(hoặc rút y theo x) thay vào biểu thức cần tìm cực trị(bất đẳng thức) đưa về khảo sát hàm một biến(bất phương trình).

   Như vậy kỹ năng cần có là bài toán khảo sát tính đơn điệu của hàm một biến số.

Ví dụ 1. Cho *x,y* là hai số thực thỏa mãn điều kiện $y \le 0, x^2 + x - y - 12 = 0$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = xy + x + 2y + 17 = 0$.

Lời giải

Từ giả thiết ta có: $y = x^2 + x - 12, y \le 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 12 \le 0 \Leftrightarrow -4 \le x \le 3$.

Khi đó $P = x\left(x^2 + x - 12\right) + x + 2\left(x^2 + x - 12\right) + 17 = x^3 + 3x^2 - 9x - 7$.

Xét hàm số $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 7$ liên tục trên đoạn $\left[-4;3\right]$ ta có:

$$f'(x) = 3x^2 + 6x - 9;\ f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -3 \end{array}\right.$$

Ta có $f(-4) = 13, f(-3) = 20, f(1) = -12, f(3) = 20$

$$\Rightarrow \max_{x \in [-4;3]} f(x) = f(-3) = f(3) = 20,\ \min_{x \in [-4;3]} f(x) = \mathrm{f}(1) = -12.$$

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng 20 đạt tại $(x;y) = (3;0); (-3;-6)$ và giá trị nhỏ nhất của P bằng -12 đạt tại $(x;y) = (1;-10)$.

Ví dụ 2. Cho *x,y* là hai số thực thỏa mãn điều kiện $2x - y = 2$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \sqrt{x^2 + (y+1)^2} + \sqrt{x^2 + (y-3)^2}$.

Lời giải

Theo giả thiết ta có: $y = 2x - 2$ thay vào biểu thức của P ta được

$$P = \sqrt{5x^2 - 4x + 1} + \sqrt{5x^2 - 20x + 25}.$$

Xét hàm số $f(x) = \sqrt{5x^2 - 4x + 1} + \sqrt{5x^2 - 20x + 25}$ liên tục trên $\mathbb{R}$ ta có:

$$f'(x) = \frac{5x - 2}{\sqrt{5x^2 - 4x + 1}} + \frac{5x - 10}{\sqrt{5x^2 - 20x + 25}};$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (5x - 2)\sqrt{5x^2 - 20x + 25} = -(5x - 10)\sqrt{5x^2 - 4x + 1}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (5x-2)(5x-10) \le 0 \\ (5x-2)^2\left(5x^2 - 20x + 25\right) = (5x-10)^2\left(5x^2 - 4x + 1\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{5} \le x \le 2 \\ 24x^2 - 16x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$$

Từ đó suy ra $P = f(x) \ge f\left(\frac{2}{3}\right) = 2\sqrt{5}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = \frac{2}{3}, y = -\frac{2}{3}$.

Ví dụ 3. Cho a,b là các số thực dương thoả mãn điều kiện $a+b=1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=3\sqrt{1+2a^2}+2\sqrt{40+9b^2}$.

Lời giải

Theo giả thiết ta có $a=1-b,(0<b<1)$.

Khi đó $P=3\sqrt{1+2(1-b)^2}+2\sqrt{40+9b^2}$.

Xét hàm số $f(b)=3\sqrt{1+2(1-b)^2}+2\sqrt{40+9b^2}$ với $0<b<1$ ta có

$$f'(b)=\frac{6(b-1)}{\sqrt{2b^2-4b+3}}+\frac{18b}{\sqrt{9b^2+40}}$$

$$f'(b)=0\Leftrightarrow(1-b)\sqrt{9b^2+40}=3b\sqrt{2b^2-4b+3}.$$

$$\Leftrightarrow(1-b)^2\left(9b^2+40\right)=9b^2\left(2b^2-4b+3\right)$$

$$\Leftrightarrow(b+2)(3b-2)\left(3b^2-10b+10\right)=0\Leftrightarrow b=\frac{2}{3}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $5\sqrt{11}$ đạt tại $a=\frac{1}{3};b=\frac{2}{3}$.

Ví dụ 4. Cho a,b là hai số thực thỏa mãn $a^2+b^2=1$.

Chứng minh rằng $ab+max\{a,b\}\le\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải

Nếu a và b trái dấu khi đó $ab+max\{a,b\}\le max\{a,b\}\le1<\frac{3\sqrt{3}}{4}$ ta có ngay điều phải chứng minh.

Vậy a và b cùng dấu và nếu cả a và b đều âm khi đó:

$ab+max\{a,b\}\le ab\le\frac{a^2+b^2}{2}=\frac{1}{2}<\frac{3\sqrt{3}}{4}$, ta có ngay điều phải chứng minh.

Xét với $a,b\ge0$ khi đó không mất tính tổng quát giả sử $a=max\{a,b\}$ ta cần chứng minh: $ab+a\le\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

Từ điều kiện ta có: $a=\sqrt{1-b^2}\Rightarrow ab+a=f(b)=(b+1)\sqrt{1-b^2}$.

Xét hàm số $f(b)=(b+1)\sqrt{1-b^2}$ trên đoạn $[0;1]$ ta có:

$$f'(\mathrm{b})=\frac{(1+b)(1-2b)}{\sqrt{1-b^2}};f'(b)=0\Leftrightarrow b=\frac{1}{2}.$$

Ta có f'(b) đổi dấu từ dương sang âm khi đi qua $b=\frac{1}{2}$ nên $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{4}$ là giá trị cực đại hay $f(b)\le\frac{3\sqrt{3}}{4}$. Ta có ngay điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=\frac{\sqrt{3}}{2}, b=\frac{1}{2}$.

Cách 2: Thực hiện lập luận như trên và sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$ab+a=a(b+1)=\frac{1}{\sqrt{3}}.\left(2.\frac{\sqrt{3}}{2}.a\right)\left(2.\frac{1}{2}.b+1\right)$$

$$\le\frac{1}{\sqrt{3}}\left(a^2+\frac{3}{4}\right)\left(b^2+\frac{5}{4}\right)\le\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{a^2+\frac{3}{4}+b^2+\frac{5}{4}}{2}\right)^2=\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

2. Kỹ thuật xử lý với biểu thức đối xứng hai biến

Bước 1: Từ điều kiện đặt $t=x+y$ (hoặc $t=xy$) rút t theo xy(hoặc x+y).

Bước 2: Thay vào biểu thức của P ta được một hàm số với t.

Bước 3: Tìm miền giá trị của t dựa vào bất đẳng thức cơ bản $(x+y)^2\ge 4xy$ (hoặc điều kiện ràng buộc của biến đề bài cho). Ta tìm được miền giá trị của t là $[a;b]$.

Bước 4: Xét hàm số f(t) trên đoạn $[a;b]$ từ đó tìm được giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của f(t) và suy ra giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của P.

Chú ý. Đôi khi cần đánh giá P thông qua các bất đẳng thức cơ bản trước tiên để giảm sự cồng kềnh của hàm f(t) giúp bài toán thực hiện đơn giản hơn. Một số bài toán có thể thực hiện theo đánh giá điều kiện có nghiệm của phương trình bậc 2.

Dấu hiện nhận biết:

- Rút được biến này theo kiến kia và đưa biểu thức về dạng một biến.
- Biểu thức có dạng đối xứng giữa tổng và tích.
- Biểu thức có dạng đối xứng giữa các biến.
- Biểu thức là tổng hợp của các hàm(hàm đa thức,căn thức, lượng giác, mũ và logarit).

Một số đánh giá cơ bản:

a) Với hai số thực không âm x,y ta có:

$$t=x+y\Rightarrow xy\le\frac{t^2}{4}, 0\le t\le\sqrt{2\left(x^2+y^2\right)}.$$

b) Với a,b dương ta có $\frac{a}{b+ab}+\frac{b}{a+ab}\ge\frac{2}{1+\sqrt{ab}}$.

Ví dụ 1. Cho x,y là hai số thực không âm thay đổi thỏa mãn điều kiện

$$4\left(x^2+y^2+xy\right)\le 1+2\left(x+y\right)\ .$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=xy+\sqrt{x+y}-x^2-y^2$.

Lời giải

Nhận xét. Ta có: $xy\le\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2, -x^2-y^2\le -\dfrac{1}{2}\left(x+y\right)^2$.

Do vậy để tìm giá trị lớn nhất của P ta quy về ẩn $t=x+y$ và việc đầu tiên cần làm đó là tìm khoảng giá trị của $t=x+y$.

Ta có: $P\le\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2+\sqrt{x+y}-\dfrac{1}{2}\left(x+y\right)^2=-\dfrac{1}{4}\left(x+y\right)^2+\sqrt{x+y}$.

Đặt $t=\sqrt{x+y},\left(t\ge 0\right)\Rightarrow P\le -\dfrac{1}{4}t^4+t$.

Xuất phát từ điều kiện bài toán ta có:

$4\left[\left(x+y\right)^2-xy\right]\le 1+2\left(x+y\right)\Leftrightarrow 4\left(x+y\right)^2-2\left(x+y\right)-1\le 4xy\le\left(x+y\right)^2$.

Suy ra $3t^2-2t-1\le 0\Leftrightarrow -\dfrac{1}{3}\le t\le 1$ do $t>0$ nên $0<t\le 1$.

Xét hàm số $f(t)=-\dfrac{1}{4}t^4+t$ với $0<t\le 1$ ta được:

$$f'(t)=-t^3+1\ge 0,\forall t\in\left(0;1\right]\Rightarrow f(t)\le f(1)=\frac{3}{4}\Rightarrow P\le\frac{3}{4}.$$

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng $\dfrac{3}{4}$ đạt tại $x=y=\dfrac{1}{2}$.

Ví dụ 2(TSĐH Khối D 2014) Cho hai số thực *x,y* thoả mãn các điều kiện $1\le x\le 2;1\le y\le 2$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{x+2y}{x^2+3y+5}+\dfrac{y+2x}{y^2+3x+5}+\dfrac{1}{4\left(x+y-1\right)}$.

Lời giải

Do $1\le x\le 2$ nên $\left(x-1\right)\left(x-2\right)\le 0\Leftrightarrow x^2+2\le 3x$.

Tương tự ta có $y^2+2\le 3y$.

$$\text{Suy ra } P\ge\frac{x+2y}{3x+3y+3}+\frac{y+2x}{3x+3y+3}+\frac{1}{4\left(x+y-1\right)}$$

$$=\frac{x+y}{x+y+1}+\frac{1}{4\left(x+y-1\right)}$$

Đặt $t = x + y, \left(2 \le t \le 4\right)$ ta có $P \ge f(t) = \dfrac{t}{t+1} + \dfrac{1}{4\left(t-1\right)}$.

Ví dụ 3. Cho x,y là hai số thực dương.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} + \dfrac{1}{x^2+y^2} + \dfrac{5}{2}\ln(xy)$.

Lời giải

Nhận xét. Biểu thức đối xứng với x và y dự đoán dấu bằng xảy ra tại $x = y$, khi đó $\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} + \dfrac{1}{x^2+y^2} = \dfrac{5}{2x^2} = \dfrac{5}{2xy}$ nên ta đánh giá $\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} + \dfrac{1}{x^2+y^2}$ với $\dfrac{5}{2xy}$.

Ta có:

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{5}{2xy} = \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} - \frac{2}{xy}\right) + \left(\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{1}{2xy}\right)$$

$$= \frac{\left(x-y\right)^2}{x^2y^2} - \frac{\left(x-y\right)^2}{2xy\left(x^2+y^2\right)} = \left(x-y\right)^2\left[\frac{1}{x^2y^2} - \frac{1}{2xy\left(x^2+y^2\right)}\right]$$

$$= \frac{\left(x-y\right)^2\left[2\left(x^2+y^2\right) - xy\right]}{2x^2y^2\left(x^2+y^2\right)} \ge \frac{\left(x-y\right)^2\left[2.2xy - xy\right]}{2x^2y^2\left(x^2+y^2\right)} \ge 0$$

Vậy $P \ge \dfrac{5}{2}\left[\dfrac{1}{xy} + \ln(xy)\right] = \dfrac{5}{2}\left[\dfrac{1}{xy} - \ln\left(\dfrac{1}{xy}\right)\right]$.

Đặt $t = \dfrac{1}{xy}, \left(t > 0\right)$ khi đó $P \ge f(t) = \dfrac{5}{2}\left(t - \ln t\right)$.

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{5}{2}\left(t - \ln t\right)$ với $t > 0$ ta có:

$f'(t) = \dfrac{5}{2}\left(1 - \dfrac{1}{t}\right); f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1$.

Ta có f'(t) đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua $t = 1$ nên f(t) đạt cực tiểu tại $t = 1$ hay $P \ge f(t) \ge f(1) = \dfrac{5}{2}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = 1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\dfrac{5}{2}$ đạt tại $x = y = 1$.

Ví dụ 4. Cho *x,y* là hai số thực dương thỏa mãn điều kiện $3xy+3=x^4+y^4+\frac{2}{xy}$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=x^2y^2+\frac{16}{x^2+y^2+2}$.

Lời giải

Xuất phát từ giả thiết ta có: $3(xy+1)=x^4+y^4+\frac{2}{xy}\geq 2x^2y^2+\frac{2}{xy}$.

$\Leftrightarrow 2x^3y^3+2\leq 3x^2y^2+3xy \Leftrightarrow 2x^3y^3-3x^2y^2-3xy+2\leq 0$

$\Leftrightarrow (xy+1)(2xy-1)(xy-2)\leq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\leq xy\leq 2$

Khi đó $P\leq x^2y^2+\frac{16}{2xy+2}=x^2y^2+\frac{8}{xy+1}$.

Đặt $t=xy,\left(\frac{1}{2}\leq t\leq 2\right)$ khi đó $P\leq f(t)=t^2+\frac{8}{t+1}$.

Xét hàm số $f(t)=t^2+\frac{8}{t+1}$ liên tục trên $\left[\frac{1}{2};2\right]$ ta được:

$f'(t)=2t-\frac{8}{(t+1)^2}$; $f'(t)=0\Leftrightarrow t=1$.

Ta có $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{67}{12}, f(1)=\frac{11}{3}, f(2)=\frac{20}{3}$ suy ra $P\leq f(t)\leq \mathrm{f}(2)=\frac{20}{3}$.

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng $\frac{20}{3}$ đạt tại $x=y=\sqrt{2}$.

Ví dụ 5. Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $x+y+xy=3$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=4(\frac{x+1}{y})^3+4(\frac{y+1}{x})^3+\sqrt{x^2+y^2}$.

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức $a^3+b^3\geq ab(a+b)$ ta có

$$P\geq 4\left(\frac{x+1}{y}\right)\left(\frac{y+1}{x}\right)\left(\frac{x+1}{y}+\frac{y+1}{x}\right)+\sqrt{x^2+y^2}$$

$$=\frac{16\left(x^2+y^2+x+y\right)}{x^2y^2}+\sqrt{x^2+y^2}\geq 64+\sqrt{2}$$

3. Đa thức có dạng đẳng cấp

Dạng toán này đã đề cập đến trong chủ đề kỹ thuật sử dụng tính đẳng cấp đó là đặt $x = t.y$ hoặc $y = t.x$ đưa về khảo sát hàm một biến với t.

Dạng toán này vài năm trở lại đây thường xuất hiện trong đề thi TSĐH của Bộ và kỹ thuật khá đơn giản nên các em nắm chắc phương pháp có thể hoàn toàn xử lý được.

Ví dụ 1. Cho x,y là hai số thức khác 0. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{x^4}{y^4} + \frac{y^4}{x^4} - 2\left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2}\right) + \frac{x}{y} + \frac{y}{x}.$$

Lời giải

Ta có $P = \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)^4 - 6\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)^2 + \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + 6$.

Đặt $t = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}, |t| \geq 2$ khi đó $P = t^4 - 6t^2 + t + 6$.

Xét hàm số $f(t) = t^4 - 6t^2 + t + 6$ trên $(-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$, ta có

$f'(t) = 4t^3 - 12t + 1; f''(t) = 12t^2 - 12 > 0, \forall t \in (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$.

Do đó $f'(t) \leq f'(-2) = -7, \forall t \in (-\infty; -2]; f'(t) \geq f'(2) = 9, \forall t \in [2; +\infty)$.

Vì vậy f(t) nghịch biến trên $(-\infty; -2]$ và đồng biến trên $[2; +\infty)$.

Suy ra $f(t) \geq \min\{f(-2), f(2)\} = f(-2) = -4$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng -4 đạt tại $x = -y$.

Ví dụ 2. Cho x,y là hai số thực dương phân biệt thỏa mãn điều kiện $x^2 + 2y = 12$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{4}{x^4} + \frac{4}{y^4} + \frac{5}{8(x-y)^2}$.

Lời giải

Ta thấy P chưa có dạng đẳng cấp tuy nhiên khéo léo sử dụng điều kiện

Ta có: $12 = x^2 + 2y = x^2 + y + y \geq 3\sqrt[3]{x^2y^2} \Rightarrow xy \leq 8$.

Suy ra

$$P \geq \frac{1}{64}x^2y^2\left(\frac{4}{x^4} + \frac{4}{y^4}\right) + \frac{xy}{8}.\frac{5}{8(x-y)^2} = \frac{1}{16}\left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2}\right) + \frac{5}{64}.\frac{xy}{(x-y)^2}$$

$$= \frac{1}{16}\left[\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)^2 - 2\right] + \frac{5}{64}.\frac{1}{\frac{x}{y} - 2 + \frac{y}{x}}$$

Đặt $t=\frac{x}{y}+\frac{y}{x},(t>2)$, do x,y dương phân biệt.

Khi đó $P\geq f(t)=\frac{1}{16}\left[t^2-2\right]+\frac{5}{64}.\frac{1}{t-2}$.

Xét hàm số $f(t)=\frac{1}{16}\left[t^2-2\right]+\frac{5}{64}.\frac{1}{t-2}$ trên $(2;+\infty)$ ta có

$f'(t)=\frac{t}{8}-\frac{5}{64(t-2)^2}; f'(t)=0\Leftrightarrow 8t(t-2)^2-5=0\xleftrightarrow{t>2}t=\frac{5}{2}$.

Tại $t=\frac{5}{2}$ f'(t) đổi dấu từ âm sang dương nên tại $t=\frac{5}{2}$ f(t) đạt cực tiểu hay $f(t)\geq f\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{27}{64}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\frac{27}{64}$ đạt tại $x=2,y=4$.

Ví dụ 3. Cho x,y là hai số thực khác 0. Chứng minh rằng

$$\frac{48x^2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}+1001\left(\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}\right)\geq 2014.$$

Lời giải

Bất đẳng thức đã cho tương đương với:

$$\frac{48}{\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)^2}+1001\left[\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)^2-2\right]\geq 2014\Leftrightarrow\frac{48}{\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)^2}+1001\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)^2\geq 4016.$$

Chú ý sử dụng bất đẳng thức AM – GM ta có

$$\frac{48}{\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)^2}+3\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)^2\geq 2\sqrt{\frac{48}{\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)^2}.3\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)^2}=24$$

$$998\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)^2\geq 998.2^2=3992$$

Cộng theo vế hai bất đẳng thức trên ta có đpcm.

4. Kỹ thuật khảo sát hàm đặc trưng

Nếu bất đẳng thức cần chứng minh có dạng hàm đặc trưng $f(a)>f(b)$ hoặc $f(a)<f(b)$.

Khi đó ta chứng minh hàm số $f(x)$ luôn đồng biến hoặc luôn nghịch biến trên miền D thuộc điều kiện của bài toán.

Ví dụ 1. (TSĐH Khối D 2007) Cho $a \geq b > 0$. Chứng minh rằng

$$\left(2^a + \frac{1}{2^a}\right)^b \leq \left(2^b + \frac{1}{2^b}\right)^a.$$

Lời giải

Bất đẳng thức đã cho tương đương với:

$$\left(1+4^a\right)^b \leq \left(1+4^b\right)^a \Leftrightarrow b\ln\left(1+4^a\right) \leq a\ln\left(1+4^b\right) \Leftrightarrow \frac{\ln\left(1+4^a\right)}{a} \leq \frac{\ln\left(1+4^b\right)}{b}.$$

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{\ln\left(1+4^x\right)}{x}$ với $x > 0$ ta có

$$f'(x) = \frac{4^x \ln 4^x - \left(1+4^x\right)\ln\left(1+4^x\right)}{x^2\left(1+4^x\right)} < 0, \forall x > 0.$$

Do đó f(x) là hàm nghịch biến trên $\left(0;+\infty\right)$. Vì vậy với $a \geq b \Rightarrow f(a) \leq f(b)$.

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.

Ví dụ 2. Chứng minh rằng với mọi $x, y \in \left(0;1\right), x \neq y$ ta có

$$\frac{1}{y-x}\left(\ln\frac{y}{1-y} - \ln\frac{x}{1-x}\right) > 4 \quad (1).$$

Lời giải

- Nếu y > x thì

$$(1) \Leftrightarrow \ln\frac{y}{1-y} - \ln\frac{x}{1-x} > 4\left(y-x\right) \Leftrightarrow \ln\frac{y}{1-y} - 4y > \ln\frac{x}{1-x} - 4x.$$

- Nếu y < x thì

$$(1) \Leftrightarrow \ln\frac{y}{1-y} - \ln\frac{x}{1-x} < 4\left(y-x\right) \Leftrightarrow \ln\frac{y}{1-y} - 4y < \ln\frac{x}{1-x} - 4x.$$

Xét hàm số $f\left(t\right) = \ln\dfrac{t}{1-t} - 4t$ với $t \in \left(0;1\right)$. Ta có

$$f'\left(t\right) = \frac{1-t}{t}\left(\frac{t}{1-t}\right)' - 4 = \frac{(2t-1)^2}{t\left(1-t\right)} > 0, \forall t \in \left(0;1\right).$$

Suy ra f(t) tăng trên (0;1). Suy ra f(y) > f(x) nếu y > x và f(y) < f(x) nếu y < x

$$\Leftrightarrow \frac{1}{y-x}\left(\ln\frac{y}{1-y} - \ln\frac{x}{1-x}\right) > 4, \forall x, y \in \left(0;1\right), x \neq y.$$

Bất đẳng thức được chứng minh.

Chú ý. Theo định lý Lagrange cho hàm số $y = \ln\frac{t}{1-t}$ ta có

$$VT = \frac{f(y)-f(x)}{y-x} = f'(c) = \frac{1}{c} + \frac{1}{1-c} \geq \frac{4}{c+1-c} = 4 \text{ (đpcm).}$$

5. Kỹ thuật xét riêng lẻ từng biến

Nội dung kỹ thuật này tôi sẽ đề cập chi tiếp hơn trong nội dung chủ đề khảo sát hàm nhiều biến. Loại toán này thường áp dụng với các bài toán cực trị khi các biến thuộc đoạn giá trị cho trước hoặc có điều kiện ràng buộc giữa các biến với nhau.

Ví dụ 1. Xét hàm số $f(x,y) = (1-x)(2-y)(4x-2y)$ trên miền

$$D = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm f trên miền D.

Lời giải

Biến đổi hàm số đã cho thành

$$f(x,y) = 2(1-x)(2-y)((2-y)-2(1-x))$$

Đặt u= 1 – x, v = 2 – y, ta chuyển về tìm GTNN của hàm số:

$F(u,v) = -2uv^2 + u^2v$ trên miền $E = \{(u,v), 0 \leq u \leq 2, 0 \leq v \leq 1\}$, nghĩa là

$$\min_E F(u,v) = \min_{0\leq u\leq 2}\left[\min_{0\leq v\leq 1}(-2uv^2 + u^2v)\right].$$

Xét hàm số $g(v) = -2uv^2 + u^2v$ với $0 \leq v \leq 1$, coi u là tham số. Ta có

$$g'(v) = -4uv + u^2 = u(-4v+u).$$

Ta thấy g'(v) = 0 khi $v_0 = \frac{u}{4}$, mà $0 \leq \frac{u}{4} \leq \frac{1}{2}$ và qua $v_0 = \frac{u}{4}$ thì g'(v) đổi dấu từ dương sang âm, suy ra

$$\max_{0\leq v\leq 1} g(v) = \min\{g(0), g(1)\} = \min\{0; u^2 - 2u\} \quad \text{(do } u^2 - 2u \leq 0\text{).}$$

Vậy $\min_E F(u,v) = \min_{0\leq u\leq 2}(u^2 - 2u) = -1$ khi u = 1, v = 1. Từ đó

$$\min_D f(x,y) = 2\min_E F(u,v) = -2 \text{ khi x = 0, y = 1.}$$

Ví dụ 2. Cho $0 < a, b \leq 1$. Chứng minh rằng $\tan a.\tan b \geq \tan ab$.

Lời giải

Giả sử $a \geq b$. Đặt $f(x) = \tan b.\tan x - \tan bx$ với $b \leq x \leq 1$. Ta có

$$f'(x) = \frac{\tan b}{\cos^2 x} - \frac{b}{\cos^2 bx}.$$

Do $0 < a, b \le 1$ nên $\tan b > b > 0$ và $\frac{1}{\cos^2 x} \ge \frac{1}{\cos^2 bx}$ suy ra $f'(x) > 0$, nên f đồng biến trên [b; 1]. Vì vậy với $a \ge b$ ta có $f(a) \ge f(b)$. Suy ra

$\tan a.\tan b - \tan ab \ge \tan^2 b - \tan b^2 \quad (1)$.

Đặt $g(x) = \tan^2 x - \tan x^2$, có

$$g'(x) = \frac{2\tan x}{\cos x} - \frac{2x}{\cos^2 x} > 0; \quad \forall x \in (0;1)$$

Suy ra $g(b) > g(0) = 0 \Rightarrow \tan^2 b - \tan b^2 > 0 \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra đpcm.

Ví dụ 3. Chứng minh rằng với mọi $0 < x < \frac{\pi}{4}$ và $0 < y < \frac{\pi}{4}$ ta luôn có

$$\cos(x-y) \le \frac{4\cos x \cos y}{(\cos x + \cos y)^2}.$$

Lời giải

Ta có $\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$.

Do vai trò x, y như nhau nên ta có thể giả sử $x \ge y$.

Khi đó viết lại bất đẳng thức được viết lại dưới dạng

$\cos^2\frac{x+y}{2}\cos^2\frac{x-y}{2}.\cos(x-y) \le \cos x.\cos y$.

Lấy logarit tự nhiên hai vế ta được

$2\ln\cos\frac{x+y}{2} + 2\ln\cos\frac{x-y}{2} + \ln\cos(x-y) \le \ln\cos x + \ln\cos y$.

Đến đây ta xét hàm số

$f(x) = \ln\cos x + \ln\cos y - 2\ln\cos\frac{x+y}{2} - 2\ln\cos\frac{x-y}{2} - \ln\cos(x-y), \forall x \ge y; x, y \in \left(0;\frac{\pi}{4}\right)$

Ta có $f'(x) = -\tan x + \tan(x-y) + 2\tan\frac{x-y}{2} + 2\tan\frac{x+y}{2}$.

$$= \frac{\sin y}{\cos x.\cos(x-y)} + 2\tan\frac{x-y}{2} + 2\tan\frac{x+y}{2} > 0, \forall x \ge y; x, y \in \left(0;\frac{\pi}{4}\right)$$

Do đó f là hàm tăng. Do đó $f(x) \ge f(y) = 0$, điều này tương đương với

$2\ln\cos\frac{x+y}{2} + 2\ln\cos\frac{x-y}{2} + \ln\cos(x-y) \le \ln\cos x + \ln\cos y$.

Bài toán được chứng minh hoàn toàn. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y$.

6. Kỹ thuật sử dụng định lý Lagrange

Ví dụ 1. Cho hai số thực dương *a*, *b* thỏa mãn *a* < *b*. Chứng minh rằng:

$$\frac{b-a}{b}<\ln\frac{b}{a}<\frac{b-a}{a}$$

Lời giải

Xét hàm số $f(x)=\ln x \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{x}, \forall x\in(0;+\infty)$.

Theo định lí Lagrange luôn tồn tại $c\in(a;\, b)$ sao cho $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Vì vậy $\frac{1}{c}=\frac{\ln b-\ln a}{b-a}\Leftrightarrow\frac{a-b}{c}=\ln\frac{b}{a}$

Mặt khác $0<a<b<c\Rightarrow\frac{1}{b}<\frac{1}{c}<\frac{1}{a}\Rightarrow\frac{b-a}{b}<\ln\frac{b}{a}<\frac{b-a}{a}$ (đpcm).

7. Kết hợp sử dụng các bất đẳng thức cơ bản AM – GM ; Cauchy – Schwarz

Để việc khảo sát hàm số thuận tiện và đơn giản trước khi chứng minh bất đẳng thức hoặc tìm Min, Max ta đánh giá qua các đại lượng trung bình của hai biến số ($\frac{x+y}{2},\sqrt{xy},\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$) hoặc kết hợp sử dụng một số bất đẳng thức phụ quen biết.

Sau đây là một số đánh giá hay được sử dụng:

+ $x^2+y^2\ge\frac{1}{2}(x+y)^2;\, x^3+y^3\ge\frac{1}{4}(x+y)^3$.

+ $e^x\ge x+1, \forall x\ge 0; \ln(x+1)\le x, \forall x\ge 0$.

+ $\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{a^2+b^2}\ge\sqrt{(a+x)^2+(b+y)^2}$.

Ví dụ 1. (TSĐH Khối B 2006) Cho x,y là hai số thực thay đổi.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\sqrt{(x-1)^2+y^2}+\sqrt{(x+1)^2+y^2}+|y-2|$.

Lời giải

Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, xét các điểm M(1-x; y) và N(1+x; y).

Ta có OM + ON $\ge$ MN, suy ra $\sqrt{(x-1)^2+y^2}+\sqrt{(x+1)^2+y^2}\ge\sqrt{4+4y^2}$.

Đẳng thức xảy ra khi x = 0, ta được $P\ge 2\sqrt{1+y^2}+|y-2|$.

Xét hàm số $f(y)=2\sqrt{1+y^2}+|y-2|$.

*) Với $y\ge 2$ thì $f(y)=2\sqrt{1+y^2}+y-2$ là hàm đồng biến.

*) Với y < 2 thì $f(y)=2\sqrt{1+y^2}+2-y$ có $f'(y)=\frac{2y}{\sqrt{1+y^2}}-1$.

Khi đó $f'(y)=0 \Leftrightarrow y=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Lập bảng biến thiên của hàm số f(y) ta được $\min P=2+\sqrt{3} \Leftrightarrow (x;y)=\left(0;\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Chú ý. Ta có thể sử dụng bất đẳng thức Mincopski:

$\sqrt{(x-1)^2+y^2}+\sqrt{(x+1)^2+y^2} \ge \sqrt{(1-x+x+1)^2+4y^2}=2\sqrt{y^2+1}$.

Ví dụ 2. (TSĐH Khối B 2011) Cho a,b là số thực dương thỏa mãn điều kiện

$$2\left(a^2+b^2\right)+ab=(a+b)(ab+2).$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=4\left(\frac{a^3}{b^3}+\frac{b^3}{a^3}\right)-9\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}\right)$.

Lời giải

Nhận xét. P có thể biểu diễn theo $t=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$ nên ta nghĩ đến việc đánh giá $t=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$ dựa vào điều kiện bài toán.

Đặt $t=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$, khi đó

$$P=4\left[\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)^3-3\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\right]-9\left[\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)^2-2\right]=4t^3-9t^2-12t+18.$$

Xuất phát từ điều kiện ta có:

$2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+1=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)(ab+2)\ge 2\sqrt{2ab}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=2\sqrt{2}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}\right)$.

Suy ra $2t+1\ge 2\sqrt{2}.\sqrt{t+2} \Leftrightarrow t\ge \frac{5}{2}$.

Xét hàm số $f(t)=4t^3-9t^2-12t+18$ trên $\left[\frac{5}{2};+\infty\right)$ ta có:

$f'(t)=12t^2-18t-12>0, \forall t\ge \frac{5}{2}$ nên f(t) đồng biến trên $\left[\frac{5}{2};+\infty\right)$ suy ra $P=f(t)\ge f\left(\frac{5}{2}\right)=-\frac{23}{4}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $-\frac{23}{4}$ đạt tại $a=2, b=1$ hoặc $a=1, b=2$.

Bài tập tương tự

1) Cho *x,y* là 2 số thực dương thỏa mãn điều kiện

$$6\left(x^2+y^2\right)+20xy=5(x+y)(xy+3).$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=9\left(\frac{x^4}{y^4}+\frac{y^4}{x^4}\right)-16\left(\frac{x^3}{y^3}+\frac{y^3}{x^3}\right)+25\left(\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}\right).$$

2) Cho a,b là hai số thực dương thỏa mãn điều kiện

$$\left(a^2+2b^2\right)^2+3a^2b^2=2\left(a^2+b^2\right)\left(a^2+2b^2\right).$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{a^3+b^3}{b^3}+\frac{8b^3}{a^3}+\frac{\left[(a+b)^2+2a^2+5b^2\right]\left[(a-b)^2+2a^2+5b^2\right]}{ab\left(a^2+2b^2\right)}.$$

Ví dụ 3. Cho a,b là các số thực dương thỏa mãn điều kiện

$$a+b+2\sqrt{(a+2)(b+2)}=12.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{a^3}{b+2}+\dfrac{b^3}{a+2}+\dfrac{48}{a+b}$.

Lời giải

Theo giả thiết ta có: $\dfrac{1}{4}(12-a-b)^2=(a+2)(b+2)\le\left(\dfrac{a+2+b+2}{2}\right)^2$.

Đặt $t=a+b,(0<t<12)$ suy ra $(12-t)^2\le(t+4)^2\Leftrightarrow t+4\ge 12-t\Leftrightarrow t\ge 4$.

Khi đó $P=\dfrac{a^3(a+2)+b^3(b+2)}{(a+2)(b+2)}+\dfrac{48}{a+b}=\dfrac{a^4+b^4+2\left(a^3+b^3\right)}{(a+2)(b+2)}+\dfrac{48}{a+b}$.

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta có $a^4+b^4\ge\dfrac{1}{8}(a+b)^4;a^3+b^3\ge\dfrac{1}{4}(a+b)^3$.

Suy ra $P\ge\dfrac{\frac{1}{8}(a+b)^4+2.\frac{1}{4}(a+b)^3}{(a+2)(b+2)}+\dfrac{48}{a+b}$

$$=\frac{(a+b)^4+4(a+b)^3}{8.\dfrac{(12-a-b)^2}{4}}+\frac{48}{a+b}=\frac{t^4+4t^3}{2(12-t)^2}+\frac{48}{t}$$

Nhận xét. Nếu ta xét hàm số $f(t)=\frac{t^4+4t^3}{2(12-t)^2}+\frac{48}{t}$ này rõ ràng đây là một hàm số phức tạp nếu đạo hàm lên không xác định tính dương âm của đạo hàm trên khoảng $[4;+\infty)$. Do đó ta cần đơn giản hàm số đó đi bằng cách đánh giá

$$2(12-t)^2\le 2(12-4)^2=128\Rightarrow \frac{1}{2(12-t)^2}\ge\frac{1}{128}.$$

Vậy ta có đánh giá $P\ge f(t)=\frac{t^4+4t^3}{128}+\frac{48}{t}$.

Xét hàm số $f(t)=\frac{t^4+4t^3}{128}+\frac{48}{t}$ với $t\ge 4$ ta có $f'(t)=\frac{t^5+3t^4-1536}{32t^2}>0,\forall t\ge 4$.

Do đó f(t) đồng biến trên $[4;+\infty)$ suy ra $P\ge f(t)\ge f(4)=16$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=2$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 16 đạt tại $a=b=2$.

B. BÀI TOÁN CHỌN LỌC

Bài 1. Cho x,y là hai số thực thỏa mãn điều kiện $x+y-1=\sqrt{2x-4}+\sqrt{y+1}$.

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=(x+y)^2-\sqrt{9-x-y}+\frac{1}{\sqrt{x+y}}.$$

Lời giải

Nhận xét. P là một biểu thức biểu diễn theo $t=x+y$ nên ta tìm cách đưa về khảo sát hàm với $t=x+y$ nhưng trước tiên phải tìm miền giá trị của t thỏa mãn điều kiện bài toán.

Đặt $t=x+y$ xuất phát từ điều kiện và bất đẳng thức C-S ta có:

$$x+y-1=\sqrt{2(x-2)}+\sqrt{y+1}\le\sqrt{(2+1)(x-2+y+1)}=\sqrt{3(x+y-1)}.$$

$$\Rightarrow\begin{cases}t\ge 1\\(t-1)^2\le 3(t-1)\end{cases}\Leftrightarrow 1\le t\le 4.$$

Khi đó $P=f(t)=t^2-\sqrt{9-t}+\frac{1}{\sqrt{t}}$.

Ta có $f'(t)=2t+\frac{1}{2\sqrt{9-t}}-\frac{1}{2t\sqrt{t}}=\frac{1}{2\sqrt{9-t}}+\frac{4t\sqrt{t}-1}{2t\sqrt{t}}>0,\forall t\in[1;4]$.

Suy ra $\max\limits_{t\in[1;4]} f(t)=\mathrm{f}(4)=\frac{33}{2}-\sqrt{5};\ \min\limits_{t\in[1;4]} f(t)=\mathrm{f}(1)=2-2\sqrt{2}$.

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng $\frac{33}{2}-\sqrt{5}$ đạt tại $x=4, y=0$. Giá trị nhỏ nhất của P bằng $2-2\sqrt{2}$ đạt tại $x=2, y=-1$.

Bài 2. Cho *x,y* là hai số thực dương thỏa mãn điều kiện $xy+x+y=3$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x^2+y^2-\frac{xy}{x+y}-\frac{3x}{y+1}-\frac{3y}{x+1}$.

Lời giải

Viết lại $P=(x+y)^2-2xy-\frac{xy}{x+y}-3.\frac{(x+y)^2-2xy+3(x+y)}{xy+x+y+1}$.

Đặt $t=x+y \Rightarrow xy=3-t$. Ta có $(x+y)^2 \geq 4xy \Rightarrow t^2 \geq 4(3-t) \xleftrightarrow{t>0} t \geq 2$.

Khi đó $P=t^2-t-\frac{12}{t}-\frac{3}{2}$.

Xét hàm số $f(t)=t^2-t-\frac{12}{t}-\frac{3}{2}$ trên $[2;+\infty)$ ta có

$$f'(t)=2t-1+\frac{12}{t^2}=\frac{t^2(2t-1)+12}{t^2}>0, \forall t \geq 2.$$

Do đó f(t) là hàm đồng biến trên $[2;+\infty)$ suy ra $P=f(t) \geq f(2)=-\frac{3}{2}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $-\frac{3}{2}$ đạt tại $x=y=1$.

Bài 3. Cho x,y là hai số thực thỏa mãn điều kiện

$$\left(x^2+y^2+1\right)^2+3x^2y^2+1=4x^2+5y^2.$$

Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{x^2+2y^2-3x^2y^2}{x^2+y^2+1}$.

Lời giải

Nhận xét. Để ý đến đại lượng x^2+y^2+1 từ điều kiện và biểu thức của P ta nghĩ đến việc biến đổi P theo x^2+y^2+1 dựa vào điều kiện bài toán.

Từ giả thiết ta có: $\left(x^2+y^2+1\right)^2+3x^2y^2+1=4\left(x^2+y^2+1\right)+y^2-4$

$\Leftrightarrow \left(x^2+y^2+1\right)^2-4\left(x^2+y^2+1\right)+5=y^2-3x^2y^2$.

Do đó $P=\frac{\left(x^2+y^2+1\right)+\left(y^2-3x^2y^2-1\right)}{x^2+y^2+1}=\frac{\left(x^2+y^2+1\right)^2-3\left(x^2+y^2+1\right)+4}{x^2+y^2+1}$.

Đặt $t = x^2 + y^2 + 1$ khi đó $P = \dfrac{t^2 - 3t + 4}{t}$. Ta cần tìm miền giá trị của t.

Xuất phát từ điều kiện ta có:

$$\left(x^2 + y^2 + 1\right)^2 + 3x^2y^2 + 1 = 5\left(x^2 + y^2 + 1\right) - x^2 - 5$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2 + y^2 + 1\right)^2 - 5\left(x^2 + y^2 + 1\right) + 6 = -x^2 - 3x^2y^2 \le 0$$

$$\Rightarrow \left(x^2 + y^2 + 1 - 2\right)\left(x^2 + y^2 + 1 - 3\right) \le 0 \Rightarrow t \in [2;3]$$

Vậy xét hàm số $f(t) = \dfrac{t^2 - 3t + 4}{t}$ liên tục trên $[2;3]$ ta được:

$f'(t) = \dfrac{t^2 - 4}{t^2} \ge 0, \forall t \in [2;3]$. Vậy f(t) là hàm đồng biến trên $[2;3]$ suy ra $1 = f(2) \le f(t) \le f(3) = \dfrac{4}{3}$ hay $1 \le P \le \dfrac{4}{3}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 1 đạt tại $x = 0, y = \pm 1$ và giá trị lớn nhất của P bằng $\dfrac{4}{3}$ đạt tại $x = 0, y = \pm 2$.

Bài 4. Xét phương trình $ax^3 - x^2 + bx - 1 = 0$ với a, b là các số thực, $a \ne 0$, $a \ne b$ sao cho các nghiệm đều là số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{5a^2 - 3ab + 2}{a^2(b - a)}.$$

Lời giải

Gọi u, v, s là ba nghiệm thực dương của đa thức $ax^3 - x^2 + bx - 1$.

Theo định lý Viete ta có $u + v + s = \dfrac{1}{a}; uv + vs + su = \dfrac{b}{a}; uvs = \dfrac{1}{a} \quad (1)$.

Từ đó suy ra a > 0, b > 0.

Đặt $c = \dfrac{1}{a}$. Áp dụng BĐT AM – GM cho ba số dương ta có

$$c = uvs = u + v + s \ge 3\sqrt[3]{uvs} = 3\sqrt[3]{c} \Rightarrow c^3 \ge 27c \Rightarrow c \ge 3\sqrt{3} \quad (2).$$

Mặt khác $(u + v + s)^2 - 3(uv + vs + su) = \dfrac{1}{2}\left[(u - v)^2 + (v - s)^2 + (s - u)^2\right] \ge 0$.

Do đó $c^2 = (u + v + s)^2 \ge 3(uv + vs + su) = 3bc \quad (3)$

Từ (1), (2) và (3) ta có

$$P=\frac{5a^2-3ab+2}{a^2(b-a)}=\frac{1}{a}.\frac{5-3\frac{b}{a}+2\frac{1}{a^3}}{\frac{b}{a}-1}=\frac{c\left(5-3bc+2c^2\right)}{bc-1}$$

$$\geq\frac{c\left(5-c^2+2c^2\right)}{\frac{c^2}{3}-1}=\frac{5c\left(c^2+5\right)}{c^2-3}\quad(4)$$

Xét hàm số $f(c)=\dfrac{5c\left(c^2+5\right)}{c^2-3}$ với $c\geq 3\sqrt{3}.$ Ta được $f(c)\geq 12\sqrt{3}$.

Dấu bằng xảy ra khi $c=3\sqrt{3}.$ Suy ra $P\geq 12\sqrt{3}$.

Đẳng thức xảy ra khi $u=v=s=\sqrt{3}$, tức là $a=\dfrac{1}{3\sqrt{3}},b=\sqrt{3}$.

Vậy $\min P=12\sqrt{3}$.

Bài 5. Cho *a,b,c* là các số thực không âm thỏa mãn $a>b>c$ và

$$3ab+5bc+7ca\leq 9.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{32}{(a-b)^4}+\dfrac{1}{(b-c)^4}+\dfrac{1}{(c-a)^4}$.

Lời giải

Theo giả thiết ta có $a>b>c\geq 0\Rightarrow 9\geq 7ca+5bc+3ab\geq 3ab\Rightarrow ab\leq 3$.

Khi đó:

$$P\geq\frac{32}{(a-b)^4}+\frac{1}{a^4}+\frac{1}{b^4}\geq\frac{a^2b^2}{9}\left[\frac{32}{(a-b)^4}+\frac{1}{a^4}+\frac{1}{b^4}\right]$$

$$=\frac{1}{9}\left[\frac{32a^2b^2}{\left(a^2-2ab+b^2\right)^2}+\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}\right]=\frac{1}{9}\left[\frac{32}{\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-2\right)^2}+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)^2-2\right]$$

Đặt $t=\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a},(t>2).$ Do $a>b,$ khi đó $P\geq f(t)=\dfrac{1}{9}\left[\dfrac{32}{(t-2)^2}+t^2-2\right]$

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{1}{9}\left[\dfrac{32}{(t-2)^2}+t^2-2\right]$ với $t>2$ ta có:

$$f'(t)=\frac{1}{9}\left[-\frac{64}{(t-2)^3}+2t\right];\ f'(t)=0\Leftrightarrow 2t(t-2)^3=64\Leftrightarrow t=4.$$

Ta có f'(t) đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua $t=4$ nên tại $t=4$ thì f(t) đạt cực tiểu hay $P \geq f(t) \geq f(4) = \frac{10}{9}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: $\begin{cases} c=0 \\ ab=3 \\ \frac{a}{b}+\frac{b}{a}=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\sqrt{6+3\sqrt{3}} \\ b=\sqrt{2+\sqrt{3}}\left(2\sqrt{3}-3\right) \\ c=0 \end{cases}.$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 10/9 đạt tại

$a=\sqrt{6+3\sqrt{3}}, b=\sqrt{2+\sqrt{3}}\left(2\sqrt{3}-3\right), c=0$.

C. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1. (TSCĐ 2009) Cho a và b là hai số thực thỏa mãn $0<a<b<1$. Chứng minh rằng $a^2\ln b - b^2\ln a > \ln a - \ln b$.

Bài 2. Cho x,y là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $x^2-xy+y^2=1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x+y-\frac{2xy}{\sqrt{(x+1)(y+1)}}$.

Bài 3. Cho x,y là hai số thực dương thỏa mãn điều kiện $xy+x+y=3$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{4x}{y+1}+\frac{4y}{x+1}+2xy-\sqrt{7-3xy}$.

Bài 4. Cho $x,y>0$ thỏa mãn điều kiện $x+2y-xy=0$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{x^2}{4+8y}+\frac{y^2}{1+x}$.

Bài 5. Cho x,y là hai số thực dương có tổng bằng 1. Chứng minh rằng

$\frac{x}{\sqrt{1-x}}+\frac{y}{\sqrt{1-y}} \geq \sqrt{2}$.

Bài 6. Cho *x,y* là hai số thực dương thay đổi thỏa mãn $3x^2+8y^3=20$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{4}{x^2}+\frac{4}{y^2}+\frac{1}{(x-y)^2}$.

Bài 7. Cho *x,y* là hai số thực dương phân biệt thỏa mãn $xy \leq 4$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{2}{x^4}+\frac{2}{y^4}+\frac{3}{(x-y)^4}$.

Bài 8. Cho *x,y* là hai số thực dương thỏa mãn $xy \leq 3$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{1}{(x-y)^4}+\frac{1}{x^4}+\frac{1}{y^4}$.

Bài 9. Cho *x,y* là hai số thực dương thỏa mãn $8(x+2y)xy=5x+2y(5+16x)$.

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức

$$P=x^2+4y^2+\frac{(1+2xy)^2+7xy-6}{xy}.$$

Bài 10. Cho *x,y* là 2 số thực dương thỏa mãn điều kiện

$$6\left(x^2+y^2\right)+20xy=5(x+y)(xy+3).$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=9\left(\frac{x^4}{y^4}+\frac{y^4}{x^4}\right)-16\left(\frac{x^3}{y^3}+\frac{y^3}{x^3}\right)+25\left(\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}\right).$$

Bài 11. Cho a,b là hai số thực dương thỏa mãn điều kiện

$$\left(a^2+2b^2\right)^2+3a^2b^2=2\left(a^2+b^2\right)\left(a^2+2b^2\right).$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{a^3+b^3}{b^3}+\frac{8b^3}{a^3}+\frac{\left[(a+b)^2+2a^2+5b^2\right]\left[(a-b)^2+2a^2+5b^2\right]}{ab\left(a^2+2b^2\right)}.$$

Bài 12. Cho x,y là hai số thực thỏa mãn $x+y=1$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\left(x^3+1\right)\left(y^3+1\right)$.

Bài 13. Cho x,y là hai số thực thỏa mãn $x^2+y^2=x+y$.

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P=x^3+y^3+x^2y+xy^2$.

Bài 14. Cho x,y là hai số thực thỏa mãn $x^3+y^3=2$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x^2+y^2$.

Bài 15. Cho x,y là hai số thực dương thỏa mãn $x\ge 1, y\ge 1$ và $3(x+y)=4xy$.

Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của biểu thức $P=x^3+y^3+3\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)$.

Bài 16. Cho x,y là hai số thực khác 0 và thỏa mãn $xy(x+y)=x^2+y^2-x-y+2$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$.

Bài 17. Cho x,y là hai số thực thỏa mãn $x^2+y^2+xy=3$.

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P=x^3+y^3-3x-3y$.

Bài 18. Cho x,y là hai số thực thỏa mãn $x^2+y^2=2$.

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=2\left(x^3+y^3\right)-3xy$.

Bài 19. Cho x,y là 2 số thực không âm thỏa mãn $x+y=1$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\dfrac{x^2y+xy^2}{x^2+y^2-xy}$.

Bài 20. Cho x,y là hai số thực thỏa mãn $2\left(x^2+y^2\right)-xy=1$.

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P=7\left(x^4+y^4\right)+4x^2y^2$.

Bài 21. Cho a,b là hai số thực dương thỏa mãn $a+b+1=3ab$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\dfrac{3a}{(a+1)b}+\dfrac{3b}{(b+1)a}-\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{b^2}$.

Bài 22. Cho các số thực $x,y\in\left[0;\dfrac{1}{2}\right]$ và $x+y\le\dfrac{1}{2}$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\dfrac{x+y}{\sqrt{1-x}+\sqrt{1-y}}$.

Bài 23. Cho a,b là hai số thực dương thỏa mãn $a+b=6ab$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{3a+1}{9b^2+1}+\dfrac{3b+1}{9a^2+1}+(3a+b)(3b+a)$.

Bài 24. Cho x,y là hai số thực thỏa mãn điều kiện $x\sqrt{2-y^2}+y\sqrt{2-x^2}=2$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=(x+y)^3-12(x-1)(y-1)+\sqrt{xy}$.

Bài 25. Cho a,b là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện

$$a^2+b^2+ab\le 1-a-b.$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+b^2}}+1+ab$.

Bài 26. Cho x,y là hai số thực dương thỏa mãn $x^4+y^4+\dfrac{1}{xy}=xy+2$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\dfrac{2}{1+x^2}+\dfrac{2}{1+y^2}-\dfrac{3}{1+2xy}$.

Bài 27. Cho x,y là hai số thực thuộc khoảng $(0;1)$ và

$$\left(x^3+y^3\right)(x+y)=xy(x-1)(y-1).$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}+5xy-(x+y)^2$.

Bài 28. (TSĐH Khối D 2009) Cho x,y là hai số thực không âm thỏa mãn điều kiện $x+y=1$.

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\left(4x^2+3y\right)\left(4y^2+3x\right)+25xy.$$

Bài 29. (TSĐH Khối D 2012) Cho x,y là hai số thực thỏa mãn điều kiện

$$(x-4)^2+(y-4)^2+2xy\le 32.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x^3+y^3+3(xy-1)(x+y-2)$.

Bài 30. (TSĐH Khối B 2009) Cho x,y là hai số thực thỏa mãn điều kiện $(x+y)^2+4xy\ge 2$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=3\left(x^4+y^4+x^2y^2\right)-2\left(x^2+y^2\right)+1$.

Bài 31. Cho x,y là 2 số thực không âm thỏa mãn $xy(x+y)=2$.

Chứng minh rằng $3\left(x^3+y^3\right)-2\left(x^2+y^2\right)+x+y+4\ge 0$.

Bài 32. Cho x,y là hai số thực dương thỏa mãn

$$(xy+1)\left(9\sqrt{xy}-2xy\right)=7\left(x^2+y^2\right)-2xy+2.$$

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P=xy+\sqrt{xy}+\frac{1}{xy}+\frac{1}{\sqrt{xy}}$.

Bài 33. Cho x,y là hai số thực thỏa mãn $2\left(x^2+y^2\right)=xy+1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của biểu thức $P=\frac{x^4+y^4}{2xy+1}$.

Bài 34. Cho x,y là hai số thực thỏa mãn $x^2-xy+y^2=1$.

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{x^4+y^4+1}{x^2+y^2+1}$.

Bài 35. Cho x,y là 2 số thực thỏa mãn $x^4+y^4=2xy$.

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức

$$P = xy + 3x^2y^2 + 2xy\left(x^2+y^2\right) - \left(x+y\right)^2.$$

Bài 36. Cho $x^2+y^2>0$ và $x^4+y^4+2=2\left(x^2+y^2\right)+xy$.

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P = 2x^2y^2 + xy - \dfrac{4}{x^2+y^2}$.

Bài 37. Cho x,y là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{x+y+x^2y^2}{xy} + \frac{13xy}{1+xy\left(1+x+y\right)}.$$

Bài 38. Cho x,y là hai số thực dương thỏa mãn $x^4 - x^2y^2 + y^4 = 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \dfrac{x+1}{3x+1} + \dfrac{y+1}{3y+1} - \dfrac{2\sqrt{xy}}{xy\left(x+y\right)+2}$.

Bài 39. Cho x,y là hai số thực dương thỏa mãn $xy + x + y = 3$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \dfrac{3x}{y+1} + \dfrac{3y}{x+1} + \dfrac{xy}{x+y} - x^2 - y^2$.

Bài 40. Cho x,y là hai số thực thỏa mãn $\sqrt{x+1} + \sqrt{y+1} = 4$.

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P = xy + \dfrac{64}{4-x-y}$.

Bài 41. Cho các số thực x,y thỏa mãn $x + y = \sqrt{x-1} + \sqrt{2y+2}$.

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức

$$P = x^2 + y^2 + 2\left(x+1\right)\left(y+1\right) + 8\sqrt{4-x-y}.$$

Bài 42. Cho x,y là hai số thực dương thỏa mãn $x + y + 2 = 3\left(\dfrac{x-1}{y} + \dfrac{y-1}{x}\right)$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \left(x-y\right)^2\left(\dfrac{x^2}{y^4} + \dfrac{y^2}{x^4} - \dfrac{3}{xy}\right)$.

Bài 43. Cho $x>1, y>1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{x^3+y^3-x^2-y^2}{\left(x-1\right)\left(y-1\right)} + 2\left(x^2+y^2\right) - 16\sqrt{xy}.$$

Bài 44. Cho x,y là hai số thực dương. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{x^4+y^4}{\left(x+y\right)^4} + \frac{x^2+y^2}{\left(x+y\right)^2} + \frac{5\sqrt{xy}}{x+y}.$$

Bài 45. Cho *x,y* là hai số thực không âm. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\sqrt[3]{4\left(e^{3x}+e^{3y}\right)}-\frac{2\sqrt[4]{(2x+1)^3(2y+1)^3}}{3}.$$

E. HƯỚNG DẪN GIẢI – ĐÁP SỐ

Bài 1. Bất đẳng thức tương đương với:

$$\left(a^2+1\right)\ln b>\left(b^2+1\right)\ln a\Leftrightarrow\frac{\ln b}{b^2+1}>\frac{\ln a}{a^2+1}.$$

Với $0<a<b<1$ vậy ta cần chứng minh hàm số $f(x)=\frac{\ln x}{x^2+1}$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$.

Ta có $f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\left(x^2+1\right)-2x\ln x}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{x^2+x-2x\ln x}{x\left(x^2+1\right)^2}>0,\forall x\in(0;1)$.

Vậy f(x) đồng biến trên khoảng $(0;1)$.

Do đó $0<a<b<1$ ta có $f(b)>f(a)\Leftrightarrow\frac{\ln b}{b^2+1}>\frac{\ln a}{a^2+1}$.

Bài toán được chứng minh.

Bài 2. Theo giả thiết ta có

$$(x+y)^2-3xy=1\Leftrightarrow xy=\frac{(x+y)^2-1}{3}\le\left(\frac{x+y}{2}\right)^2\Rightarrow 1\le x+y\le 2.$$

Khi đó

$$P=x+y-\frac{2.\frac{(x+y)^2-1}{3}}{\sqrt{x+y+1+\frac{(x+y)^2-1}{3}}}=x+y-\frac{2\sqrt{3}}{3}.\frac{(x+y)^2-1}{\sqrt{(x+y)^2+3(x+y)+2}}.$$

Đặt $t=x+y,1\le t\le 2$ ta có $P=t-\frac{2\sqrt{3}}{3}.\frac{t^2-1}{\sqrt{t^2+3t+2}}$.

Ta chứng minh $P\ge 1$, thật vậy ta cần chứng minh.

$$t-\frac{2\sqrt{3}}{3}.\frac{t^2-1}{\sqrt{t^2+3t+2}}\ge 1$$

$$\Leftrightarrow(t-1)\left[3\sqrt{t^2+3t+2}-2\sqrt{3}(t+1)\right]\ge 0$$

$$\Leftrightarrow\frac{(t-1)\left(-3t^2+3t+6\right)}{3\sqrt{t^2+3t+2}+2\sqrt{3}(t+1)}\ge 0\Leftrightarrow(t-1)^2(2-t)\ge 0$$

Bất đẳng thức luôn đúng. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $t=1$ hoặc $t=2$ tương ưng với $(x;y)=(0;1);(1;0);(1;1)$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 1.

Bài 3. Ta có:

$$P=\frac{4x(x+1)+4y(y+1)}{(x+1)(y+1)}+2xy-\sqrt{7-3xy}$$

$$=\frac{4\left(x^2+y^2\right)+4(x+y)}{xy+x+y+1}+2xy-\sqrt{7-3xy}$$

$$=\frac{4(x+y)^2+4(x+y)-8xy}{4}+2xy-\sqrt{7-3xy}$$

$$=(x+y)^2+x+y-\sqrt{7-3xy}\geq 2^2+2-\sqrt{7-3.1}=4$$

Bài 4. Theo giả thiết ta có : $x+2y=xy=\frac{1}{2}.x.2y\leq\frac{1}{2}\left(\frac{x+2y}{2}\right)^2\Rightarrow x+2y\geq 8$

Theo bất đẳng thức C-S ta có :

$$\frac{x^2}{4+8y}+\frac{y^2}{1+x}=\frac{x^2}{4+8y}+\frac{(2y)^2}{4+4x}\geq\frac{(x+2y)^2}{4+8y+4+4x}=\frac{(x+2y)^2}{8+4(x+2y)}.$$

Vậy đặt $t=x+2y$ và xét hàm số $f(t)=\frac{t^2}{8+4t}, t\geq 8$.

Ta có $f'(t)=\frac{4t^2+8t}{(8+4t)^2}>0$ với $t\geq 8$.

Suy ra $\min\limits_{t\in[8;+\infty)} f(t)=f(8)=\frac{8}{5}$

Từ đó suy ra giá trị nhỏ nhất của P bằng $\frac{8}{5}$, khi $x=4; y=2$.

Bài 5. Ta có y = 1 – x nên BĐT cần chứng minh là

$$\frac{x}{\sqrt{1-x}}+\frac{1-x}{\sqrt{x}}\geq\sqrt{2},\ \forall x\in(0;1).$$

Xét $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1-x}}+\frac{1-x}{\sqrt{x}},\ \forall x\in(0;1).$ Ta có

$$f'(x)=\frac{1}{2}\left[\frac{2-x}{(1-x)\sqrt{1-x}}-\frac{x+1}{x\sqrt{x}}\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{1+(1-x)}{(1-x)\sqrt{1-x}}-\frac{1+x}{x\sqrt{x}}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[h\left(\sqrt{1-x}\right)-h\left(\sqrt{x}\right)\right]$$

trong đó $h(t)=\frac{1+t^2}{t^3}=\frac{1}{t^3}+\frac{1}{t}$ nghịch biến trên $(0;+\infty)$, nên

$$f'(x)=0\Leftrightarrow h\left(\sqrt{1-x}\right)=h\left(\sqrt{x}\right)\Leftrightarrow\sqrt{1-x}=\sqrt{x}\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$$

Và $f'(x)>0\Leftrightarrow h\left(\sqrt{1-x}\right)>h\left(\sqrt{x}\right)\Leftrightarrow\sqrt{1-x}<\sqrt{x}\Leftrightarrow x\in\left(\frac{1}{2};1\right)$

Do vậy: $f'(x)<0\Leftrightarrow x\in\left(0;\frac{1}{2}\right)$

Vậy $\min\limits_{(0;1)} f(x)=f\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{2}$. Suy ra $f(x)\geq\sqrt{2},\forall x\in(0;1)$.

Chú ý. Ta có thể đánh giá đơn giản bằng C –S .

Bài 6. Ý tưởng là đưa P về dạng hàm số có nhân tử chung đặt là t. Muốn vậy ta tạo cho P dạng đồng bậc nên thêm vào P một lượng xy.

Ta có: $P.xy=4xy\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)+\frac{xy}{(x-y)^2}=4\left(\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\right)+\frac{1}{\frac{x}{y}-2+\frac{y}{x}}$.

Đặt $t=\frac{x}{y}+\frac{y}{x},(t>2)$ đưa về $P.xy=4t+\frac{1}{t-2}$.

Muốn tìm giá trị nhỏ nhất của P vậy trước tiên ta tìm giá trị lớn nhất của xy.

Khảo sát hàm số $f(t)=4t+\frac{1}{t-2}$ với $t>2$ ta được:

$$f'(t)=4-\frac{1}{(t-2)^2};\ f'(t)=0\Leftrightarrow t=\frac{5}{2}\Rightarrow x=2y.$$

Vậy khi đó $x=2y\Rightarrow 12y^2+8y^3=20\Leftrightarrow y=1,x=2$ tức P đạt min tại $x=2,y=1$. Đây là cơ sở cho ta đánh giá lượng lớn nhất của xy.

Xuất phát từ điều kiện ta có:

$20=3x^2+8y^3=3x^2+4\left(y^3+y^3+1\right)-4\geq 3x^2+12y^2-4$.

$\Rightarrow 8=x^2+4y^2\geq 4xy\Leftrightarrow xy\leq 2$.

Do đó $P\geq \frac{1}{2}f(t)\geq \frac{1}{2}f\left(\frac{5}{2}\right)=6$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 6 đạt tại $x=2, y=1$.

Bài 10. Ta có

$$P=9\left[\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)^4-4\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)^2+2\right]-16\left[\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)^3-3\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)\right]+25\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)^2-50$$

Bài 11. Từ điều kiện và sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$\left(a^2+2b^2\right)^2+3a^2b^2=2\left(a^2+b^2\right)\left(a^2+2b^2\right)\geq 4ab\left(a^2+2b^2\right)$

$\Rightarrow \left(\frac{a}{b}+\frac{2b}{a}\right)^2+3\geq 4\left(\frac{a}{b}+\frac{2b}{a}\right)\Leftrightarrow \frac{a}{b}+\frac{2b}{a}\geq 3$

Khi đó đặt $t=\frac{a}{b}+\frac{2b}{a}$ và ta có $P=f(t)=t^3+3t-\frac{4}{t}+1$.

Xét hàm số $f(t)=t^3+3t-\frac{4}{t}+1$ trên $\left[3;+\infty\right)$ ta có

$f'(t)=3t^2+\frac{4}{t^2}+3>0, \forall t\in\left[3;+\infty\right)$ nên f(t) đồng biến trên $\left[3;+\infty\right)$.

Do đó $P=f(t)\geq f(3)=\frac{97}{3}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\frac{97}{3}$ đạt tại $a=b=1$.

Bài 25. Xuất phát từ điều kiện ta có:

$$(a+b)^2+a+b+ab\leq 1\Rightarrow 1\geq ab+2\sqrt{ab}+4ab\Rightarrow 0\leq ab\leq \frac{1}{9}<1.$$

Áp dụng bất đẳng thức cơ bản ta có: $\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+b^2}}\leq \frac{2}{\sqrt{1+ab}}$.

Suy ra $P\leq \frac{2}{\sqrt{1+ab}}+1+ab$.

Đặt $t=\sqrt{1+ab}, t\in\left[1;\frac{\sqrt{10}}{3}\right]$ ta có $P\leq \frac{2}{t}+t^2$.

Bài 45. HD: Sử dụng bất đẳng thức quen thuộc: $a^3+b^3\ge\frac{(a+b)^3}{4}$.

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$\begin{cases}\sqrt[4]{(2x+1)^3(2y+1)^3}\le\sqrt[4]{\left(\frac{2x+1+2y+1}{2}\right)^6}=\sqrt{(x+y+1)^3}\\ e^x+e^y\ge2\sqrt{e^x.e^y}=2e^{\frac{x+y}{2}}\end{cases}.$$

Suy ra $P\ge e^x+e^y-\frac{2}{3}\sqrt{(x+y+1)^3}\ge2e^{\frac{x+y}{2}}-\frac{2}{3}\sqrt{(x+y+1)^3}$.

CHỦ ĐỀ 3: KỸ THUẬT SỬ DỤNG TÍNH ĐƠN ĐIỆU CHO BÀI TOÁN CỰC TRỊ VÀ BẤT ĐẲNG THỨC BA BIẾN SỐ

A. NỘI DUNG PHƯƠNG PHÁP

1) Sử dụng phép thế đưa về bài toán một biến số

Với điều kiện $\begin{cases}x+y+z=p\\ xy+yz+zx=q\\ xyz=r\end{cases}$ thì luôn biểu diễn được $S_n=x^n+y^n+z^n$ theo *p,q,r*.

Do vậy với bài toán giả thiết cho 2 trong 3 điều kiện (p,q,r) ta hoàn toàn có thể đưa S_n về một đa thức của một biến.

Ví dụ 1. Cho *x,y,z* là các số thực thỏa mãn $\begin{cases}x+y+z=0\\ xy+yz+zx=-1\end{cases}$.

Tính $P=x^3+y^3+z^3$ theo *x.*

Lời giải

Theo giả thiết ta có: $\begin{cases}y+z=-x\\ yz=-1-x(y+z)=-1-x(-x)=x^2-1\end{cases}$.

Ta có

$$P=x^3+y^3+z^3=(y+z)^3-3yz(y+z)+x^3=(-x)^3+3x(x^2-1)+x^3=3x^3-3x.$$

Nhận xét. Ta chặn giá trị của biến x như sau

$$(y+z)^2\ge4yz\Leftrightarrow x^2\ge4(x^2-1)\Leftrightarrow3x^2\le4\Leftrightarrow-\frac{2}{\sqrt3}\le x\le\frac{2}{\sqrt3}$$

Vậy bài toán tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của P đưa về khảo sát hàm một biến $f(x)=3x^3-3x$ trên đoạn $\left[-\frac{2}{\sqrt{3}};\frac{2}{\sqrt{3}}\right]$.

Ví dụ 2. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}=5$.

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}$.

Lời giải

Đặt $x=\frac{a}{b},y=\frac{b}{c},z=\frac{c}{a}\Rightarrow\begin{cases}xyz=1\\x+y+z=5\end{cases}$.

Ta cần tìm giá trị lớn nhất nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$.

Ta có $\begin{cases}yz=\frac{1}{x}\\y+z=5-x\end{cases}\Rightarrow(y+z)^2\ge 4yz\Leftrightarrow(5-x)^2\ge\frac{4}{x}$.

$\Leftrightarrow(x-4)\left(x^2-6x+1\right)\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\ge 3+2\sqrt{2}\\3-2\sqrt{2}\le x\le 4\end{array}\right.$.

Khi đó $P=\frac{1}{x}+\frac{y+z}{yz}=\frac{1}{x}+x(5-x)=\frac{x^2(5-x)+1}{x}$.

Xét hàm số $f(x)=\frac{x^2(5-x)+1}{x}$ liên tục trên

$D=\left[3-2\sqrt{2};4\right]\cup\left[3+2\sqrt{2};+\infty\right)$ dễ có

$\min\limits_{x\in D}f(x)=f\left(\frac{1}{2}\right)=f(4)=\frac{17}{4};\max\limits_{x\in D}f(x)=f\left(3-2\sqrt{2}\right)=1+4\sqrt{2}$.

Ví dụ 3. ***(TSĐH Khối B 2012)*** Cho các số thực *x,y,z* thỏa mãn $x+y+z=0$ và $x^2+y^2+z^2=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=x^5+y^5+z^5$.

Lời giải

Ta có:

$$\begin{cases}x+y+z=0\\x^2+y^2+z^2=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y+z=0\\(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y+z=0\\xy+yz+zx=-\frac{1}{2}\end{cases}.$$

Suy ra $y+z=-x$ và $x(y+z)+yz=-\frac{1}{2}\Rightarrow yz=-\frac{1}{2}+x^2$.

Mặt khác $(y+z)^2 \ge 4yz \Rightarrow x^2 \ge 4\left(-\frac{1}{2}+x^2\right) \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{6}}{3} \le x \le \frac{\sqrt{6}}{3}$.

Khi đó :

$$P = x^5 + (y+z)^5 - 5yz\left(y^3+z^3\right) - 10y^2z^2(y+z)$$
$$= x^5 + (y+z)^5 - 5yz\left[(y+z)^3 - 3yz(y+z)\right] - 10y^2z^2(y+z)$$
$$= x^5 + (-x)^5 - 5\left(-\frac{1}{2}+x^2\right)\left[-x^3 - 3\left(-\frac{1}{2}+x^2\right)(-x)\right] - 10\left(-\frac{1}{2}+x^2\right)^2(-x) = \frac{10x^3-5x}{4}$$

Xét hàm số $f(x) = \frac{10x^3-5x}{4}$ liên tục trên $\left[-\frac{\sqrt{6}}{3};\frac{\sqrt{6}}{3}\right]$ ta được:

$$f'(x) = \frac{30x^2-5}{4};\ f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{\sqrt{6}}{6}.$$

Ta có $f\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right) = f\left(\frac{\sqrt{6}}{6}\right) = -\frac{5\sqrt{6}}{36}, f\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right) = f\left(-\frac{\sqrt{6}}{6}\right) = \frac{5\sqrt{6}}{36}$.

Suy ra $P = f(x) \le \frac{5\sqrt{6}}{36}$.

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng $\frac{5\sqrt{6}}{36}$ đạt tại $x = \frac{\sqrt{6}}{3}, y = z = -\frac{\sqrt{6}}{6}$.

Bình luận. Biểu thức của P là một đối với x nên theo kết quả trên ta tìm được cả giá trị nhỏ nhất của P. Ngoài ra có thể biến đổi P như sau:

$$P = x^5 + y^5 + z^5 = x^5 + \left(y^3+z^3\right)\left(y^2+z^2\right) - y^2z^2(y+z).$$

Ví dụ 4. Cho a,b,c là các số thực thuộc đoạn $[1;4]$ và $a+b+2c=8$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = a^3+b^3+5c^3$.

Lời giải

Theo giả thiết ta có $2+c \le a+b+2c = 8 \le 8+2c \Leftrightarrow c \in [1;3]$

Ta có $P = (a+b)^3 - 3ab(a+b) + 5c^3 = (8-2c)^3 - 3ab(8-2c) + 5c^3$

$$= -3c^3 + 96c^2 - 384c + 512 - 3ab(8-2c)$$

Với $a,b \ge 1 \Rightarrow (a-1)(b-1) \ge 0 \Leftrightarrow ab \ge a+b-1 = 7-2c > 0$

Khi đó

$$P \le -3c^3 + 96c^2 - 384c + 512 - 3(7-2c)(8-2c) = -3c^3 + 84c^2 - 294c + 344$$

Xét hàm số $f(c) = -3c^3 + 84c^2 - 294c + 344$ liên tục trên đoạn $[1;3]$, ta có

$$f'(c) = -9c^2 + 168c + 512;\ f'(c) = 0 \Leftrightarrow c = c_0 = \frac{28 - 7\sqrt{10}}{3} \in [1;3].$$

Ta có f'(c) đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua c_0 nên f(c) đạt cực tiểu tại c_0.

Do đó $P \le f(c) \le \max\{f(1); f(3)\} = f(3) = 137$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = 1, c = 3$.

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng 137 đạt tại $a = b = 1, c = 3$.

2) **Đánh giá thông qua các đại lượng trung bình của ba biến số**

Với mọi số thực x,y,z ta luôn có

$$3\left(x^2 + y^2 + z^2\right) \ge (x + y + z)^2;$$

$$(x + y + z)^2 \ge 3(xy + yz + zx);$$

$$(xy + yz + zx)^2 \ge 3xyz(x + y + z).$$

Với x,y,z là các số thực không âm ta luôn có $\frac{x + y + z}{3} \ge \sqrt[3]{xyz}$;

$$xyz \ge (x + y - z)(y + z - x)(z + x - y)$$

$$(x + y)(y + z)(z + x) \ge \frac{8}{9}(x + y + z)(xy + yz + zx)$$

Nhận xét. Với các bài toán có $x, y, z \in [a;b]$ và $x + y + z = s$ ta thường sử dụng bất đẳng thức để tìm mối rang buộc giữa các đại lượng đối xứng $xy + yz + zx$ và xyz.

Một số đẳng thức đánh chú ý

$$(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b)(b + c)(c + a)$$

$$(a + b)(b + c)(c + a) = (a + b + c)(ab + bc + ca) - abc$$

$$2\left(a^2b^2 + b^2c^2 + a^2a^2\right) - \left(a^4 + b^4 + c^4\right) = (a + b + c)(a + b - c)(b + c - a)(c + a - b)$$

Ví dụ 1. (TSĐH Khối B 2011) Cho a,b,c là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = 3\left(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2\right) + 3(ab + bc + ca) + 2\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Lời giải

Theo giả thiết ta có:

$$a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca) = 1 - 2(ab + bc + ca).$$

Mặt khác: $3\left(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2\right) \ge (ab + bc + ca)^2$.

Suy ra $P \ge (ab+bc+ca)^2 + 3(ab+bc+ca) + 2\sqrt{1-2(ab+bc+ca)}$.

Đặt $t = ab+bc+ca$ khi đó: $P \ge f(t) = t^2 + 3t + 2\sqrt{1-2t}$.

Với $0 \le ab+bc+ca \le \frac{1}{3}(a+b+c)^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow t \in \left[0;\frac{1}{3}\right]$.

Xét hàm số $f(t) = t^2 + 3t + 2\sqrt{1-2t}$ liên tục trên đoạn $\left[0;\frac{1}{3}\right]$ ta có:

$$f'(t) = 2t + 3 - \frac{2}{\sqrt{1-2t}}; f''(t) = 2 - \frac{2}{\sqrt{(1-2t)^3}} \le 0, \forall t \in \left[0;\frac{1}{3}\right].$$

Do đó $f'(t) \ge f'\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{11}{3} - 2\sqrt{3} > 0$.

Vì vậy f(t) đồng biến trên đoạn $\left[0;\frac{1}{3}\right]$. Suy ra $P \ge f(t) \ge f(0) = 2$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = 0, c = 1$ hoặc các hoán vị.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 2 đạt tại $a = b = 0, c = 1$ hoặc các hoán vị.

Ví dụ 2. Cho x,y,z là các số thực thuộc đoạn [0;2] và thoả mãn điều kiện $x + y + z = 3$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} + xy + yz + zx$.

Lời giải

Chú ý bất đẳng thức

$$(x+y)(y+z)(z+x) \ge \frac{8}{9}(x+y+z)(xy+yz+zx).$$

Khi đó

$$P = \frac{(x+y)(x+z)+(y+z)(y+x)+(z+x)(z+y)}{(x+y)(y+z)(z+x)} + xy + yz + zx$$

$$= \frac{(x+y+z)^2 + xy + yz + zx}{(x+y)(y+z)(z+x)} + xy + yz + zx$$

$$\le \frac{(x+y+z)^2 + xy + yz + zx}{\frac{8}{9}(x+y+z)(xy+yz+zx)} + xy + yz + zx$$

$$= \frac{27}{8(xy+yz+zx)} + xy + yz + zx + \frac{3}{8}$$

Chú ý điều kiện $x, y, z \in [0;2]$ nên

$(2-x)(2-y)(2-z)\geq 0 \Rightarrow xy+yz+zx\geq \frac{4+xyz}{2}\geq 2$.

Khi đó đặt $t=xy+yz+zx$ vì $xy+yz+zx\leq \frac{1}{3}(x+y+z)^2=3$ nên $t\in[2;3]$.

Do đó $P\leq f(t)=\frac{27}{8t}+t+\frac{3}{8}$.

Xét hàm số $f(t)=\frac{27}{8t}+t+\frac{3}{8}$ trên đoạn [2;3] ta có $f'(t)=1-\frac{27}{8t^2}>0,\forall t\geq 2$.

Do đó f(t) đồng biến trên đoạn [2;3] suy ra $f(t)\leq f(3)=\frac{9}{2}$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$.

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng 9/2.

Nhận xét. Ta có thể đánh giá thông qua bất đẳng thức(xem chương 2).

$$\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}\leq \frac{3}{2(x+y+z)}+\frac{x+y+z}{xy+yz+zx}.$$

Ví dụ 3. Cho x, y, z là các số thực thuộc khoảng (0, 1) thoả mãn điều kiện

$$xyz=(1-x)(1-y)(1-z).$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x+y+z+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$.

Lời giải

Theo giả thiết ta có: $x+y+z-xy-yz-zx+2xyz-1=0$.

Dự đoán dấu bằng xảy ra khi $x=y=z\Rightarrow x^3=(1-x)^3\Rightarrow x=y=z=\frac{1}{2}$.

Do đó ta xét hai khả năng sau:

+ Nếu $xy+yz+zx<\frac{3}{4}\Rightarrow \frac{3}{4}>xy+yz+zx\geq 3\sqrt[3]{x^2y^2z^2}\Rightarrow xyz<\frac{1}{8}$.

Khi đó sử dụng bất đẳng thức AM – GM ta có

$$P=\left(x+\frac{1}{4x}\right)+\left(y+\frac{1}{4y}\right)+\left(z+\frac{1}{4z}\right)+\frac{3}{4}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$$

$$\geq 2\sqrt{x.\frac{1}{4x}}+2\sqrt{y.\frac{1}{4y}}+2\sqrt{z.\frac{1}{4z}}+\frac{9}{4\sqrt[3]{xyz}}$$

$$=3+\frac{9}{4\sqrt[3]{xyz}}>3+\frac{9}{4.\frac{1}{2}}=\frac{15}{2}$$

\+ Nếu $xy+yz+zx \ge \frac{3}{4}$ khi đó biến đổi P theo $xy+yz+zx$ bằng cách rút

$$xyz = \frac{xy+yz+zx+1-x-y-z}{2}.$$

Và chú ý $x+y+z \ge \sqrt{3(xy+yz+zx)}$.

Ta có $P = x+y+z+\frac{xy+yz+zx}{xyz}$

$$= x+y+z+2.\frac{xy+yz+zx}{xy+yz+zx+1-x-y-z}$$

$$\ge \sqrt{3(xy+yz+zx)}+2.\frac{xy+yz+zx}{xy+yz+zx+1-\sqrt{3(xy+yz+zx)}}$$

Đặt $t=\sqrt{3(xy+yz+zx)}, \frac{3}{2} \le t < 3$ ta có

$$P \ge t+2.\frac{\frac{t^2}{3}}{\frac{t^2}{3}+1-t} = t+\frac{2t^2}{t^2-3t+3}$$

$$= \frac{(2t-3)(t^2-7t+15)}{2(t^2-3t+3)}+\frac{15}{2} \ge \frac{15}{2}, \forall t \in \left[\frac{3}{2};3\right)$$

So sánh hai trường hợp ta có Min P bằng 15/2 đạt tại $x=y=z=\frac{1}{2}$.

Nhận xét. Lý do xét hai trường hợp do suy nghĩ làm theo hướng hai đầu tiên tuy nhiên bất đẳng thức cuối chỉ đúng với $xy+yz+zx \ge \frac{3}{4}$. Do vậy cần phân chia làm hai trường hợp, với $xy+yz+zx < \frac{3}{4}$ ta khéo léo kết hợp AM – GM để chỉ ra P lớn hơn 15/2.

Bài tập tương tự

Cho x, y, z là các số thực thuộc khoảng (0, 1) thoả mãn điều kiện

$$xyz = (1-x)(1-y)(1-z).$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2+y^2+z^2$.

ĐS: $P_{\min} = \frac{3}{4}$.

Ví dụ 4. Cho *a,b,c* là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\sqrt{\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}-2}+\frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$\frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}=\frac{8}{\left(\frac{a}{b}+1\right)\left(\frac{b}{c}+1\right)\left(\frac{c}{a}+1\right)}\geq\frac{8.27}{\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+3\right)^3}.$$

Đặt $t=\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+3,(t\geq 6)$ ta có $P\geq f(t)=\sqrt{t-5}+\frac{216}{t^3}$.

Xét hàm số $f(t)=\sqrt{t-5}+\frac{216}{t^3}$ với $t\geq 6$ ta có:

$$f'(\text{t})=\frac{1}{2\sqrt{t-5}}-\frac{648}{t^4}=\frac{t^4-1296\sqrt{t-5}}{2t^4\sqrt{t-5}}\geq 0,\forall t\geq 6.$$

Suy ra $P\geq f(t)\geq f(6)=2$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 2 đặt tại $a=b=c$.

Ví dụ 5. Cho *x,y,z* là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $x^2+y^2+z^2=3$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{16}{\sqrt{x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2}}+\frac{xy+yz+zx}{x+y+z}$.

Lời giải

Ta có $x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2=\frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2-x^4-y^4-z^4}{2}=\frac{9-x^4-y^4-z^4}{2}$.

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta có :

$$x^4+x+x\geq 3x^2;y^4+y+y\geq 3y^2;z^4+z+z\geq 3z^2$$

Cộng theo vế 3 bất đẳng thức trên ta được :

$$x^4+y^4+z^4\geq 3\left(x^2+y^2+z^2\right)-2(x+y+z)=9-2(x+y+z).$$

$$xy+yz+zx=\frac{(x+y+z)^2-x^2-y^2-z^2}{2}=\frac{(x+y+z)^2-3}{2}.$$

Do đó $P\geq\frac{16}{\sqrt{x+y+z+1}}+\frac{(x+y+z)^2-1}{2(x+y+z)}$.

Đặt $t=x+y+z,t\in\left[\sqrt{3};3\right]$. Khi đó $P\geq f(t)=\frac{16}{\sqrt{t+1}}+\frac{t^2-1}{2t}$.

Xét hàm số $f(t)=\frac{16}{\sqrt{t+1}}+\frac{t^2-1}{2t}$ liên tục trên đoạn $\left[\sqrt{3};3\right]$ ta có

$f'(t)=\frac{1}{2t^2}+\frac{1}{2}-\frac{8}{\sqrt{(t+1)^3}}\le\frac{1}{6}+\frac{1}{2}-\frac{8}{\sqrt{4^3}}<0$ nên f(t) là hàm nghịch biến trên đoạn $\left[\sqrt{3};3\right]$.

Do đó $P\ge f(t)\ge f(3)=\frac{28}{3}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$.

Ví dụ 6. Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $ab+bc+ca=1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=a+b+c+abc$.

Lời giải

Theo giả thiết ta có: $c=\frac{1-ab}{a+b},c>0\Rightarrow ab<1$.

Thay vào biểu thức của P ta được:

$$P=a+b+\frac{1-ab}{a+b}+ab.\frac{1-ab}{a+b}=a+b+\frac{1-a^2b^2}{a+b}.$$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta có: $a^2b^2\le\left(\frac{a+b}{2}\right)^4$.

Suy ra $P\ge a+b+\frac{1-\left(\frac{a+b}{2}\right)^4}{a+b}=\frac{-(a+b)^4+16(a+b)^2+16}{16(a+b)}$.

Đặt $t=a+b,(t>0)$ khi đó $P\ge f(t)=\frac{-t^4+16t^2+16}{16t}$.

Xét hàm số $f(t)=\frac{-t^4+16t^2+16}{16t}$ với $t>0$ ta có:

$$f'(t)=-\frac{3t^4-16t^2+16}{16t^2}=\frac{\left(4-t^2\right)\left(3t^2-4\right)}{16t^2};\text{f}'(\text{t})=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=2\\t=\frac{2}{\sqrt{3}}\end{array}\right..$$

Lập bảng biến thiên suy ra $\underset{t>0}{Min}\,f(t)=f\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)=\frac{10\sqrt{3}}{27}\Rightarrow P\ge\frac{10\sqrt{3}}{27}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\frac{10\sqrt{3}}{27}$ đạt tại $a=b=c=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Ví dụ 7. Cho a,b,c là các số thực thỏa mãn điều kiện $a^2+b^2+c^2=2$.

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P=a^3+b^3+c^3-3abc$.

Lời giải

Ta có:

$$2=a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)\Rightarrow ab+bc+ca=\frac{(a+b+c)^2-2}{2}.$$

Khi đó:

$$\begin{aligned}P&=(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\right)\\&=(a+b+c)\left[(a+b+c)^2-3(ab+bc+ca)\right]\\&=(a+b+c)\left[(a+b+c)^2-3.\frac{(a+b+c)^2-2}{2}\right].\\&=(a+b+c).\frac{-(a+b+c)^2+6}{2}\end{aligned}$$

Đặt $t=a+b+c\Rightarrow t^2=(a+b+c)^2\le 3\left(a^2+b^2+c^2\right)=6\Leftrightarrow t\in\left[-\sqrt{6};\sqrt{6}\right]$.

Khi đó $P=f(t)=-\frac{1}{2}t^3+3t$.

Xét hàm số $f(t)=-\frac{1}{2}t^3+3t$ liên tục trên $\left[-\sqrt{6};\sqrt{6}\right]$ ta có

$f'(t)=-\frac{3}{2}t^2+3;\ f'(t)=0\Leftrightarrow t=\pm\sqrt{2}$.

Bảng biến thiên:

t	$-\sqrt{6}$		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		$\sqrt{6}$
f’(t)		$-$	0	$+$	0	$-$	
f(t)	0	$\searrow$	$-2\sqrt{2}$	$\nearrow$	$2\sqrt{2}$	$\searrow$	0

Dựa vào bảng biến thiên suy ra f(t) đạt giá trị lớn nhất bằng $2\sqrt{2}$ tại $t=\sqrt{2}$ và đạt giá trị nhỏ nhất bằng $2\sqrt{2}$ đạt tại $t=-\sqrt{2}$.

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng $2\sqrt{2}$ đạt tại $a=\sqrt{2},b=c=0$ hoặc các hoán vị.

giá trị nhỏ nhất của P bằng $-2\sqrt{2}$ đạt tại $a=-\sqrt{2},b=c=0$ hoặc các hoán vị.

3) Bất đẳng thức có hai biến đối xứng

Ghép cặp hai biến đối xứng với nhau và đánh giá bất đẳng thức cơ bản như AM – GM và Cauchy – Schwarz hoặc một số bất đẳng thức phụ đưa về biến còn lại và hoàn tất bằng khảo sát hàm số (xem chủ đề sau).

Ví dụ 1. Cho x,y,z là các số thực dương thoả mãn điều kiện $x^2+y^2+z^2=1$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=6\left(y+z-x\right)+27xyz$.

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức AM – GM và C –S ta có

$$y+z\le\sqrt{2\left(y^2+z^2\right)}=\sqrt{2\left(1-x^2\right)}$$

$$yz\le\frac{y^2+z^2}{2}=\frac{1-x^2}{2}$$

Suy ra $P\le 6\left[\sqrt{2\left(1-x^2\right)}-x\right]+\frac{27}{2}x\left(1-x^2\right)$.

Xét hàm số $f(x)=6\left[\sqrt{2\left(1-x^2\right)}-x\right]+\frac{27}{2}x\left(1-x^2\right)$ trên khoảng (0;1) ta có

$$f'(x)=\frac{3}{2}\left(-27x^2+5-\frac{4\sqrt{2}x}{\sqrt{1-x^2}}\right);\ f'(x)=0\Leftrightarrow -27x^2+5-\frac{4\sqrt{2}x}{\sqrt{1-x^2}}=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{4\sqrt{2}x}{\sqrt{1-x^2}}=5-27x^2\Leftrightarrow\begin{cases}0<x<1\\5-27x^2>0\\\dfrac{32x^2}{1-x^2}=\left(5-27x^2\right)^2=0\end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}0<x<1\\5-27x^2>0\\\left(3x^2-1\right)\left(9x^2-1\right)\left(27x^2-25\right)=0\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{1}{3}$$

Ta có f'(x) đổi dấu từ dương sang âm khi đi qua $\frac{1}{3}$ nên f(x) đạt cực đại tại $\frac{1}{3}$.

Vì vậy $P\le f(x)\le f\left(\frac{1}{3}\right)=10$. Dấu bằng đạt tại $x=y=z=\frac{1}{3}$.

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng 10.

Ví dụ 2. Cho *x,y,z* là các số thực thỏa mãn điều kiện $x^2+y^2\le\frac{1}{2}z^2$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\left(x^4+y^4+z^4\right)\left(\frac{1}{x^4}+\frac{1}{y^4}+\frac{1}{z^4}\right)$.

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức cơ bản: $a^2+b^2 \geq \frac{1}{2}(a+b)^2$ ta có:

$\frac{1}{2}z^2 \geq x^2+y^2 \geq \frac{1}{2}(x+y)^2 \Rightarrow x+y \leq z$.

$x^4+y^4 \geq \frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)^2 \geq \frac{1}{8}(x+y)^4; \frac{1}{x^4}+\frac{1}{y^4} \geq \frac{2}{x^2y^2} \geq \frac{32}{(x+y)^4}$.

Suy ra $P \geq \left[\frac{(x+y)^4}{8}+z^4\right].\left[\frac{32}{(x+y)^4}+\frac{1}{z^4}\right]=\frac{1}{8}\left(\frac{x+y}{z}\right)^4+32\left(\frac{z}{x+y}\right)^4+5$.

Đặt $t=\left(\frac{x+y}{z}\right)^4, (0<t\leq 1)$ ta có: $P \geq f(t)=\frac{1}{8}t+\frac{32}{t}+5$.

Xét hàm số $f(t)=\frac{1}{8}t+\frac{32}{t}+5$ với $0<t\leq 1$ ta có:

$f'(t)=\frac{1}{8}-\frac{32}{t^2}<0, \forall t \in (0;1]$ vì vậy f(t) nghịch biến trên $(0;1]$.

Do đó $P \geq f(t) \geq f(1)=\frac{297}{8}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=\frac{z}{2}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\frac{297}{8}$ đạt tại $z=2x=2y$.

Ví dụ 3. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện

$$a \geq \frac{1}{2}; \frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}=2.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{3}{8a^2+1}+\frac{32\left(b^3+c^3\right)+10}{64b^2c^2+16bc+1}$.

Lời giải

Chú ý. Ta cần đánh giá bc theo a muốn vậy xuất phát từ điều kiện ta có:

$$2abc+ab+bc+ca=1 \Rightarrow bc<1.$$

Và $\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}=2-\frac{1}{1+a}=\frac{1+2a}{1+a}$.

Với $bc<1$ ta có $\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1} \leq \frac{2}{1+\sqrt{bc}} \Rightarrow \frac{1+2a}{1+a} \leq \frac{2}{1+\sqrt{bc}} \Rightarrow bc \leq \frac{1}{(2a+1)^2}$.

Mặt khác $\frac{32\left(b^3+c^3\right)+10}{64b^2c^2+16bc+1} \geq \frac{6}{8bc+1} \geq \frac{6}{\frac{8}{(2a+1)^2}+1}$.

Suy ra $P \geq \dfrac{3}{8a^2+1} + \dfrac{6}{\dfrac{8}{(2a+1)^2}+1} = \dfrac{6(2a-1)^2\left(4a^2+8a+1\right)}{\left(8a^2+1\right)\left((2a+1)^2+8\right)} + 3 \geq 3$.

Dấu bằng đạt tại $a = \dfrac{1}{2}; b = c; \dfrac{1}{a+1} + \dfrac{1}{b+1} + \dfrac{1}{c+1} = 2 \Leftrightarrow a = b = c = \dfrac{1}{2}$.

Ví dụ 4. Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $abc = 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \dfrac{1}{2a+1} + \dfrac{1}{2b+1} + \dfrac{2}{(2c+1)\sqrt{6c+3}}$.

Lời giải

Ta biết bất đẳng thức phụ $\dfrac{1}{1+2a} + \dfrac{1}{1+2b} \geq \dfrac{2}{2\sqrt{ab}}$ đúng với $ab \geq \dfrac{1}{4}$. Do vậy ta chia trường hợp để xử lý.

<u>+ TH1:</u> Nếu $ab < \dfrac{1}{4} \Rightarrow a < \dfrac{1}{4b}$, khi đó $P > \dfrac{1}{2a+1} + \dfrac{1}{2b+1} > \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2b}} + \dfrac{1}{2b+1} = 1$.

<u>+ TH2:</u> Nếu $ab \geq \dfrac{1}{4} \Rightarrow c \leq 4$, khi đó vận dụng bất đẳng thức phụ trên ta được:

$$P \geq \frac{2}{1+2\sqrt{ab}} + \frac{2}{(2c+1)\sqrt{6c+3}} = \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{c}+2} + \frac{2}{(2c+1)\sqrt{6c+3}}.$$

Xét hàm số $f(c) = \dfrac{\sqrt{c}}{\sqrt{c}+2} + \dfrac{2}{(2c+1)\sqrt{6c+3}}$ trên khoảng $(0;4]$ ta được

$\min f(c) = f(1) = \dfrac{8}{9}$.

Dấu bằng đạt tại $a = b = c = 1$. Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\dfrac{8}{9}$.

4) Đánh giá xoay quanh các đại lượng $(a-b),(b-c),(c-a)$.

Ví dụ 1. Cho các số thực không âm a,b,c có tổng bằng 1.

Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = (a-b)(b-c)(c-a)$.

Lời giải

Ta có: $P^2 = (a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2$.

Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $a \geq b \geq c \geq 0$ khi đó

$$P^2 \leq (a+c-b)^2 b^2 (a+c)^2.$$

Đặt $t = a + c$ ta có $P^2 = (2t-1)^2 t^2 (1-t)^2 = \left(2t^3 - 3t^2 + t\right)^2$.

Ta có: $t = a + c = 1 - b \le 1, \mathrm{t} = \mathrm{a} + \mathrm{c} \ge \frac{a+b+c}{2} = \frac{1}{2}$. Vậy $t \in \left[\frac{1}{2};1\right]$.

Xét hàm số $f(t) = \left(2t^3 - 3t^2 + t\right)^2$ liên tục trên $\left[\frac{1}{2};1\right]$ ta có:

$$f'(t) = 2\left(2t^3 - 3t^2 + t\right)\left(6t^2 - 6t + 1\right);\ f'(t) = 0 \xleftrightarrow{t \in \left[\frac{1}{2};1\right]} \left[\begin{array}{l} t = \frac{1}{2} \\ t = 1 \\ t = \frac{3+\sqrt{3}}{6} \end{array}\right. .$$

Ta có $f\left(\frac{1}{2}\right) = f(1) = 0,\ f\left(\frac{3+\sqrt{3}}{6}\right) = \frac{1}{108}$. Suy ra $0 \le f(t) \le \frac{1}{108}$ hay $P^2 \le \frac{1}{108}$.

Do đó $-\frac{\sqrt{3}}{18} \le P \le \frac{\sqrt{3}}{18}$. Tại $a = \frac{3+\sqrt{3}}{6}, b = 0, c = \frac{3-\sqrt{3}}{6}$ thì $P = \frac{\sqrt{3}}{18}$. Tại $a = \frac{3+\sqrt{3}}{6}, b = \frac{3-\sqrt{3}}{6}, c = 0$ thì $P = -\frac{\sqrt{3}}{18}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $-\frac{\sqrt{3}}{108}$ đạt tại $a = \frac{3+\sqrt{3}}{6}, b = \frac{3-\sqrt{3}}{6}, c = 0$ và giá trị lớn nhất của P bằng $\frac{\sqrt{3}}{18}$ đạt tại $a = \frac{3+\sqrt{3}}{6}, b = 0, c = \frac{3-\sqrt{3}}{6}$.

Nhận xét. Xuất phát từ đẳng thức

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = \left(x + y + z\right)\left(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx\right).$$

Ta thay $x = a - b, y = b - c, z = c - a$ ta có $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$.

Thay vì yêu cầu tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của P có thể yêu cầu tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \left(a - b\right)^3 + \left(b - c\right)^3 + \left(c - a\right)^3.$$

Ví dụ 2. Cho *a,b,c* là các số thực không âm đôi một phân biệt thỏa mãn

$$ab + bc + ca = 4.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{1}{\left(a-b\right)^2} + \frac{1}{\left(b-c\right)^2} + \frac{1}{\left(c-a\right)^2}$.

Lời giải

Không mất tính tổng quát giả sử $a > b > c \ge 0$.

Khi đó $P \ge \frac{1}{\left(a-b\right)^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$.

Ta có: $4 = ab + bc + ca \ge ab \Rightarrow ab \le 4$.

Khi đó $4P \ge P.ab = ab\left[\frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right] = \frac{1}{\frac{a}{b} - 2 + \frac{b}{a}} + \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$.

Đặt $t = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}, (t > 2)$. Khi đó $P \ge f(t) = \frac{1}{4}\left(t + \frac{1}{t-2}\right)$.

Xét hàm số $f(t) = \frac{1}{4}\left(t + \frac{1}{t-2}\right)$ với $t > 2$, ta có

$$f'(t) = \frac{1}{4}\left[1 - \frac{1}{(t-2)^2}\right]; f'(t) = 0 \xleftrightarrow{t>2} t = 3.$$

Ta có f'(t) đổi dầu từ âm sang dương khi đi qua 3 nên tại $t = 3$ thì f(t) đạt cực tiểu hay $f(t) \ge f(3) = 1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 1 đạt tại

$$c = 0, ab = 4, \frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 3 \Leftrightarrow a = \sqrt{5} - 1, b = \sqrt{5} + 1, c = 0 \text{ và các hoán vị.}$$

<u>Cách 2:</u> Không mất tính tổng quát giả sử $a > b > c \ge 0$. Khi đó viết lại vế trái của bất đẳng thức và sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$P = \left(\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{a-b}.\frac{1}{b-c} + \frac{1}{b-c}.\frac{1}{c-a} + \frac{1}{c-a}.\frac{1}{a-b}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a}\right)^2 \ge \frac{4}{a-b}\left(\frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a}\right) = \frac{4}{(b-c)(a-c)} \ge \frac{4}{ab} \ge 1$$

Nhận xét. Chú ý đẳng thức quen thuộc

$$\frac{1}{a-b}.\frac{1}{b-c} + \frac{1}{b-c}.\frac{1}{c-a} + \frac{1}{c-a}.\frac{1}{a-b} = \frac{c-a+a-b+b-c}{(a-b)(b-c)(c-a)} = 0.$$

Với giả thiết a,b,c để biểu thức sau có nghĩa và cách chứng minh tương tự ta có các bất đẳng thức tương tự dạng sau

1) Với $a, b, c \ge 0$ ta có

$$\left(a^2 + b^2 + c^2\right)\left[\frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2}\right] \ge \frac{11 + 5\sqrt{5}}{2}.$$

2) Với $a, b, c \ge 0$ ta có

$$\left[(a+b)^2 + (b+c)^2 + (c+a)^2\right]\left[\frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2}\right] \ge \frac{59 + 11\sqrt{33}}{4}.$$

3) Với $a \neq b \neq c$ ta có

$$\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\right)\left[\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}\right] \geq \frac{27}{4}.$$

4) Với $a \neq b \neq c$ ta có

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)\left[\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}\right] \geq \frac{9}{2}.$$

Sau đây ta cùng xét một số bài toán dạng trên

Ví dụ 3. Cho a,b,c là các số thực không âm đôi một phân biệt.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\left(a^2+b^2+c^2\right)\left[\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}\right].$$

Lời giải

Không mất tính tổng quát giả sử $c=\min\{a,b,c\}$.

Khi đó $(a-c)^2 \leq a^2, (b-c)^2 \leq b^2, a^2+b^2+c^2 \geq a^2+b^2$.

Do đó

$$P \geq \left(a^2+b^2\right)\left(\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)=\frac{a^2+b^2}{(a-b)^2}+\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}+2=\frac{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}}{\frac{a}{b}-2+\frac{b}{a}}+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)^2.$$

Đặt $t=\frac{a}{b}+\frac{b}{a},(t>2)$ do $a \neq b$. Khi đó $P \geq f(t)=\frac{t}{t-2}+t^2$.

Ta có: $f'(t)=-\frac{2}{(t-2)^2}+2t; f'(t)=0 \xleftrightarrow{t>2} t=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Bảng biến thiên:

t	2	$\frac{3+\sqrt{5}}{2}$	$+\infty$
f'(t)		0	
f(t)	$+\infty$ ↘	$\frac{11+5\sqrt{5}}{2}$	↗ $+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên suy ra $f(t) \geq f\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right) = \dfrac{11+\sqrt{5}}{2}$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

$$t = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow a = \frac{3+\sqrt{5} \pm \sqrt{6\sqrt{5}-2}}{4}b.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\dfrac{11+5\sqrt{5}}{2}$ đạt tại $c = 0, a = \dfrac{3+\sqrt{5} \pm \sqrt{6\sqrt{5}-2}}{4}b$ hoặc các hoán vị.

Ví dụ 4. Cho a,b,c là các số thực phân biệt thỏa mãn $a+b+c=1$ và $ab+bc+ca>0$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \dfrac{2}{|a-b|} + \dfrac{2}{|b-c|} + \dfrac{2}{|c-a|} + \dfrac{5}{\sqrt{ab+bc+ca}}$.

Lời giải

Không mất tính tổng quát giả sử $a > b > c$ khi đó:

$$P = \frac{2}{a-b} + \frac{2}{b-c} + \frac{2}{a-c} + \frac{5}{\sqrt{ab+bc+ca}} \geq \frac{8}{a-b+b-c} + \frac{2}{a-c} + \frac{5}{\sqrt{ab+bc+ca}}$$

$$= \frac{10}{a-c} + \frac{5}{\sqrt{ab+bc+ca}}$$

Đặt $t = \sqrt{ab+bc+ca}, \left(0 < t < \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ do $ab+bc+ca < \dfrac{1}{3}(a+b+c)^2 = \dfrac{1}{3}$.

Ta có: $(a-b)^2 + (b-c)^2 \geq \dfrac{1}{2}\left[(a-b)+(b-c)\right]^2 = \dfrac{1}{2}(a-c)^2$.

Suy ra:

$$\frac{3}{2}(a-c)^2 \leq (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 2\left[(a+b+c)^2 - 3(ab+bc+ca)\right] = 2 - 6t^2$$

$$\Rightarrow a-c \leq \frac{2\sqrt{1-3t^2}}{\sqrt{3}} \Rightarrow P \geq f(t) = \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{1-3t^2}} + \frac{5}{t}$$

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{5\sqrt{3}}{\sqrt{1-3t^2}} + \dfrac{5}{t}$ với $t \in \left(0; \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ ta có:

$$f'(t) = \frac{15\sqrt{3}t}{\sqrt{\left(1-3t^2\right)^3}} - \frac{5}{t^2};\ f'(t) = 0 \Leftrightarrow 3\sqrt{3}t^3 = \sqrt{\left(1-3t^2\right)^3} \Leftrightarrow t = \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

Ta có f'(t) đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua $t=\frac{1}{\sqrt{6}}$ nên f(t) đạt cực tiểu tại $t=\frac{1}{\sqrt{6}}$. Do đó $P\ge f(t)\ge f\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)=10\sqrt{6}$.

Đẳng thức xảy ra tại $a=\frac{1}{3}+\frac{1}{\sqrt{6}},b=\frac{1}{3},c=\frac{1}{3}-\frac{1}{\sqrt{6}}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $10\sqrt{6}$ đạt tại $a=\frac{1}{3}+\frac{1}{\sqrt{6}},b=\frac{1}{3},c=\frac{1}{3}-\frac{1}{\sqrt{6}}$ hoặc các hoán vị.

Cách 2: Đánh giá thông qua bất đẳng thức AM-GM.

Không mất tính tổng quát ta giả sử $a>b>c$ ta có:

$$P=\frac{2}{a-b}+\frac{2}{b-c}+\frac{2}{a-c}+\frac{5}{\sqrt{ab+bc+ca}}.$$

Sử dụng bất đẳng thức: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\ge\frac{4}{x+y},\forall x,y>0$ ta được:

$$P\ge 2.\frac{4}{a-b+b-c}+\frac{2}{a-c}+\frac{5}{\sqrt{ab+bc+ca}}=5\left(\frac{2}{a-c}+\frac{1}{\sqrt{ab+bc+ca}}\right)$$

$$\ge\frac{5.2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{(a-c)^2(ab+bc+ca)}}=\frac{20}{\sqrt[4]{(a-c)^2(4ab+4bc+4ca)}}$$

$$\ge\frac{20}{\sqrt{\frac{(a-c)^2+4ab+4bc+4ca}{2}}}=\frac{20\sqrt{2}}{\sqrt{(a+c)^2+4b(a+c)}}=\frac{20\sqrt{2}}{\sqrt{(a+c)(a+c+4b)}}$$

$$=\frac{20\sqrt{2}}{\sqrt{(1-b)(1+3b)}}=\frac{20\sqrt{6}}{\sqrt{(3-3b)(1+3b)}}\ge\frac{40\sqrt{6}}{3-3b+1+3b}=10\sqrt{6}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}a-b=b-c\\ \frac{2}{a-c}=\frac{1}{\sqrt{ab+bc+ca}}\\ 3-3b=1+3b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{2+\sqrt{6}}{6}\\ b=\frac{1}{3}\\ c=\frac{2-\sqrt{6}}{6}\end{cases}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $10\sqrt{6}$ đạt tại $a=\frac{1}{3}+\frac{1}{\sqrt{6}},b=\frac{1}{3},c=\frac{1}{3}-\frac{1}{\sqrt{6}}$ hoặc các hoán vị.

Ví dụ 5. Cho a,b,c là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện

$$2\left(a^2+b^2+c^2\right)=\left(ab+bc+ca+1\right)\left(ab+bc+ca\right).$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=2\sqrt{a^2+b^2+c^2}-|a-b|-|b-c|-|c-a|$.

Lời giải

Không mất tính tổng quát giả sử $a\ge b\ge c\Rightarrow P=2\sqrt{a^2+b^2+c^2}-2\left(a-c\right)$.

Đặt $t=ab+bc+ca,\left(t\ge 0\right)$ theo giả thiết ta có: $a^2+b^2+c^2=\dfrac{t\left(t+1\right)}{2}$.

Nếu $t=0\Leftrightarrow a=b=c=0\Rightarrow P=0$.

Xét $t>0$ khi đó sử dụng bất đẳng thức cơ bản ta có:

$$a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca\Rightarrow \frac{t\left(t+1\right)}{2}\ge t\Leftrightarrow t\ge 1.$$

Ta có

$$\left(a-b\right)^2+\left(b-c\right)^2+\left(c-a\right)^2=2\left(a^2+b^2+c^2\right)-2\left(ab+bc+ca\right)=t\left(t+1\right)-2t=t\left(t-1\right).$$

$$\left(a-c\right)^2=\left[\left(a-b\right)+\left(b-c\right)\right]^2=\left(a-b\right)^2+\left(b-c\right)^2+2\left(a-b\right)\left(b-c\right)\ge\left(a-b\right)^2+\left(b-c\right)^2.$$

Suy ra $2\left(a-c\right)^2\ge\left(a-b\right)^2+\left(b-c\right)^2+\left(c-a\right)^2=t\left(t-1\right)\Rightarrow a-c\ge\sqrt{\dfrac{t\left(t-1\right)}{2}}$.

Do đó $P\le f(t)=\sqrt{2t\left(t+1\right)}-\sqrt{2t\left(t-1\right)}=\dfrac{2\sqrt{2t}}{\sqrt{t+1}+\sqrt{t-1}}$.

Xét hàm số $f(t)=\sqrt{2t\left(t+1\right)}-\sqrt{2t\left(t-1\right)}$ với $t\ge 1$ ta có:

$$f'(t)=\frac{2t+1}{\sqrt{2t\left(t+1\right)}}-\frac{2t-1}{\sqrt{2t\left(t-1\right)}};\ f'(t)=0\Leftrightarrow\left(2t+1\right)\sqrt{t\left(t-1\right)}=\left(2t-1\right)\sqrt{t\left(t+1\right)}.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}t\ge 1\\ \left(2t+1\right)^2\left(t-1\right)=\left(2t-1\right)^2\left(t+1\right)\end{cases}\text{(vô nghiệm).}$$

Vậy f’(t) không đổi dấu trên $\left(1;+\infty\right)$ ta có $f'(2)<0$ nên $f'(t)<0,\forall t>1$.

Vậy f(t) là hàm nghịch biến trên $\left[1;+\infty\right)$.

Suy ra $P\le f(t)\le f(1)=2$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng 2 đạt tại $a=b=c=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Ví dụ 6. Cho a,b,c là các số thực thỏa mãn điều kiện $a^2+b^2+c^2=5$.

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức

$$P=(a-b)(b-c)(c-a)(ab+bc+ca).$$

Lời giải

Ta có: $P^2=(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2(ab+bc+ca)^2$.

Để tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của P ta tìm giá trị lớn nhất của P^2.

Khi đó ta có thể giả sử $a\ge b\ge c$ khi đó:

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$(a-b)^2(b-c)^2=\left[(a-b)(b-c)\right]^2\le\left[\frac{(a-b)+(b-c)}{2}\right]^4=\frac{(a-c)^4}{16}.$$

Suy ra $P^2\le\frac{1}{16}(c-a)^6(ab+bc+ca)^2$.

Đặt $t=ab+bc+ca,(t\le 5)$ do $ab+bc+ca\le a^2+b^2+c^2=5$.

Ta có: $(a-b)^2+(b-c)^2\ge\frac{1}{2}\left[(a-b)+(b-c)\right]^2=\frac{1}{2}(a-c)^2$.

Suy ra:

$$\frac{3}{2}(a-c)^2\le(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=2\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\right)=10-2t$$

$$\Rightarrow(a-c)^2\le\frac{20-4t}{3}\Rightarrow P\le\frac{1}{16}\left(\frac{20-4t}{3}\right)^3t^2=\frac{4}{27}t^2(5-t)^3$$

Xét hàm số $f(t)=\frac{4}{27}t^2(5-t)^3$ với $t\le 5$ ta có:

$$f'(t)=-\frac{20}{27}t(t-2)(t-5)^2;\ f'(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\\t=2\\t=5\end{array}\right..$$

Bảng biến thiên:

t	$-\infty$		0		2		5
f'(t)			0		0		0
f(t)	$+\infty$	↘	0	↗	16	↘	0

Dựa vào bảng biến thiên suy ra $P^2\le f(t)\le f(2)=16\Rightarrow -4\le P\le 4$.

Tại $a=2,b=1,c=0$ thì $P=-4$; tại $a=-2,b=-1,c=0$ thì $P=4$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng -4; giá trị lớn nhất của P bằng 4.

Nhận xét. Phép toán bình phương đưa về đa thức đối xứng với ba biến a,b,c giúp ta có thể giả sử được $a\ge b\ge c$. Đây là một cách rất hay được áp dụng khi giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của bài toán có giá trị đối nhau.

Bài tập tương tự

Với mọi a,b,c tìm số thực M nhỏ nhất thoả mãn bất đẳng thức

$$\left|ab\left(a^2-b^2\right)+bc\left(b^2-c^2\right)+ca\left(c^2-a^2\right)\right|\le M\left(a^2+b^2+c^2\right)^2.$$

Ví dụ 7. Cho a,b,c là các số thực thoả mãn điều kiện $a^2+b^2+c^2=1$.

Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c).$$

Lời giải

Chuyển P về dạng đối xứng

$$\begin{aligned}P&=(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2(a+b+c)^2\\&=(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2\left[1+2(ab+bc+ca)\right]\end{aligned}.$$

Không mất tính tổng quát giả sử $a\ge b\ge c$ và đặt $x=ab+bc+ca, x\in\left[-\frac{1}{2};1\right]$.

Ta có :

$$(a-b)(b-c)\le\left(\frac{a-b+b-c}{2}\right)^2=\left(\frac{a-c}{2}\right)^2\Rightarrow(a-b)(b-c)(a-c)\le\frac{1}{4}(a-c)^3$$

Mặt khác lại có

$$\begin{aligned}a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca&=\frac{1}{2}(a-b)^2+\frac{1}{2}(b-c)^2+\frac{1}{2}(a-c)^2\\&\ge\frac{1}{2}(a-c)^2+\frac{1}{4}(a-b+b-c)^2\end{aligned}$$

Suy ra $1-x\ge\frac{3}{4}(a-c)^2\Rightarrow a-c\le\sqrt{\frac{4}{3}(1-x)};-\frac{1}{2}\le x\le 1$

Suy ra $P^2\le(1+2x)\left[\frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{4}{3}(1-x)}\right)^3\right]^2=\frac{4}{27}(2x+1)(1-x)^3$.

Xét hàm số $f(x)=\frac{4}{27}(2x+1)(1-x)^3$ trên đoạn $\left[-\frac{1}{2};1\right]$ ta có

$$f'(x)=-\frac{4}{27}(x-1)^2(8x+1);\ f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-\dfrac{1}{8}\end{array}\right..$$

Từ đó dễ có $\max\limits_{x\in\left[-\frac{1}{2};1\right]} f(x)=f\left(-\frac{1}{8}\right)=\frac{81}{512}$.

Suy ra $P^2\le\frac{81}{512}\Leftrightarrow-\frac{9}{16\sqrt{2}}\le P\le\frac{9}{16\sqrt{2}}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $-\frac{9}{16\sqrt{2}}$ đạt tại

$$a=\frac{3\sqrt{3}+\sqrt{6}}{6\sqrt{2}},b=\frac{1}{2\sqrt{3}},c=\frac{\sqrt{6}-3\sqrt{3}}{6\sqrt{2}}$$

Ví dụ 8. Cho *a*,*b*,*c* là các số thực thỏa mãn điều kiện $a^2+b^2+c^2=8$.

Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức

$$P=(a-b)^5+(b-c)^5+(c-a)^5.$$

Lời giải

Ta có:

$$(a-b)^5+(b-c)^5+(c-a)^5=5(a-b)(b-c)(c-a)\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\right)$$
$$=5(a-b)(b-c)(c-a)(8-ab-bc-ca)$$

Vậy để tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của P ta tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P^2=(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2(8-ab-bc-ca)^2$.

Khi đó ta có thể giả sử $a\ge b\ge c$.

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$(a-b)^2(b-c)^2=\left[(a-b)(b-c)\right]^2\le\left[\frac{(a-b)+(b-c)}{2}\right]^4=\frac{(a-c)^4}{16}.$$

Suy ra $P^2\le\frac{25}{16}(c-a)^6(8-ab-bc-ca)^2$.

Đặt $t=ab+bc+ca,(t\le 8)$ do $ab+bc+ca\le a^2+b^2+c^2=8$.

Ta có: $(a-b)^2+(b-c)^2\ge\frac{1}{2}\left[(a-b)+(b-c)\right]^2=\frac{1}{2}(a-c)^2$.

Suy ra:

$$\frac{3}{2}(a-c)^2 \le (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 = 2\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\right)=16-2t$$

$$\Rightarrow (a-c)^2 \le \frac{32-4t}{3} \Rightarrow P \le \frac{25}{16}\left(\frac{32-4t}{3}\right)^3 (8-t)^2 = f(t)=\frac{100}{27}(8-t)^5$$

Mặt khác:

$$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)=8+2t \ge 0 \Leftrightarrow t \ge -4 \Rightarrow -4 \le t \le 8.$$

Xét hàm số $f(t)=\frac{100}{27}(8-t)^5$ trên đoạn $[-4;8]$ ta có:

$f'(t)=-\frac{500}{27}(t-8)^2 \le 0$, do đó f(t) là hàm nghịch biến trên đoạn $[-4;8]$.

Suy ra $P \le f(t) \le f(-4)=921600 \Rightarrow -960 \le P \le 960$.

Với $a=-2, b=0, c=2 \Rightarrow P=960$. Với $a=-2, b=2, c=0$ thì $P=-960$.

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng 960 và giá trị nhỏ nhất của P bằng -960.

Ví dụ 9. Cho a,b,c là các số thực không âm thoả mãn điều kiện $ab+bc+ca=1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{1}{\sqrt{b^2+c^2}}+\frac{1}{\sqrt{c^2+a^2}}$.

Lời giải

Không mất tính tổng quát giả sử $c=\min\{a,b,c\}$, khi đó ta có:

$$a^2+b^2 \le \left(a+\frac{c}{2}\right)^2+\left(b+\frac{c}{2}\right)^2;$$

$$a^2+c^2 \le \left(a+\frac{c}{2}\right)^2;$$

$$b^2+c^2 \le \left(b+\frac{c}{2}\right)^2;$$

$$1=ab+bc+ca \ge \left(a+\frac{c}{2}\right)\left(b+\frac{c}{2}\right)$$

Đặt $x=a+\frac{c}{2}, y=b+\frac{c}{2}$ suy ra

$$P \ge \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y} \ge \sqrt{\frac{xy}{x^2+y^2}}+xy\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=\sqrt{\frac{1}{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}}}+\frac{x}{y}+\frac{y}{x}.$$

Đặt $t=\sqrt{\frac{1}{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}}}, \left(0<t\le\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ khi đó $P \ge f(t)=t+\frac{1}{t^2}$.

Ta có $f'(t)=1-\frac{2}{t^3}=\frac{t^3-2}{t^3}<0,\forall t\in\left(0;\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ nên f(t) là hàm nghịch biến trên $\left(0;\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$.

Do đó $P\ge f(t)\ge f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=2+\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $2+\frac{1}{\sqrt{2}}$ đạt tại $a=b=1,c=0$ hoặc các hoán vị(xem thêm kỹ thuật sử dụng tính đẳng cấp).

Cách 3: Đặt $x=a^2,y=b^2,z=c^2$ khi đó $xy+yz+zx\le 1$. Bài toán đưa về tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{1}{\sqrt{x+y}}+\frac{1}{\sqrt{y+z}}+\frac{1}{\sqrt{z+x}}$. Bài toán này tôi trích riêng và trình bày dưới đây.

Ví dụ 10. Cho a,b,c là các số thực không âm thay đổi thỏa mãn điều kiện $ab+bc+ca=1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{1}{\sqrt{a+b}}+\frac{1}{\sqrt{b+c}}+\frac{1}{\sqrt{c+a}}$.

Lời giải

Nhận xét. Với điều kiện a,b,c không âm và $ab+bc+ca=1$ nghĩ đến P đạt giá trị nhỏ nhất khi một số bằng 0 và hai số bằng 1. Vậy ta có ghép cặp hai căn lại với nhau xem có đánh giá được qua căn thức còn lại hay không.

Ta có: $\left(\frac{1}{\sqrt{a+b}}+\frac{1}{\sqrt{a+c}}\right)^2=\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}+\frac{2}{\sqrt{(a+b)(a+c)}}$

$$=\frac{2a+b+c}{a^2+ab+bc+ca}+\frac{2}{\sqrt{a^2+ab+bc+ca}}=\frac{2a+b+c}{a^2+1}+\frac{2}{\sqrt{a^2+1}}.$$

Suy ra $\frac{1}{\sqrt{a+b}}+\frac{1}{\sqrt{a+c}}=\sqrt{\frac{2a+b+c+2\sqrt{a^2+1}}{a^2+1}}$.

Không mất tính tổng quát giả sử $a=\max\{a,b,c\}$ khi đó:

$$P=\frac{1}{\sqrt{b+c}}+\sqrt{\frac{2a+b+c+2\sqrt{1+a^2}}{1+a^2}}.$$

Coi đây là hàm số với biến a và b,c là các hằng số ta được:

$$f'(a)=\frac{bc-a^2-a\sqrt{a^2+1}}{\sqrt{\left(a^2+1\right)^3\left(2a+b+c+2\sqrt{a^2+1}\right)}}\le 0.$$

Do đó f(a) là hàm nghịch biến nên từ $a=\dfrac{1-bc}{b+c}\le\dfrac{1}{b+c}$ suy ra

$f(a)\ge f\left(\dfrac{1}{b+c}\right)$.

Mặt khác: $f\left(\dfrac{1}{b+c}\right)=\sqrt{b+c}+\dfrac{1}{\sqrt{b+c}}+\sqrt{\dfrac{b+c}{(b+c)^2+1}}$.

Đặt $t=\sqrt{b+c}\Rightarrow P\ge t+\dfrac{1}{t}+\dfrac{t}{\sqrt{t^4+1}}=t+\dfrac{1}{t}+\sqrt{\dfrac{1}{t^2+\dfrac{1}{t^2}}}=t+\dfrac{1}{t}+\dfrac{1}{\sqrt{\left(t+\dfrac{1}{t}\right)^2-2}}$.

Đặt $u=t+\dfrac{1}{t},(u\ge 2)$. Khi đó $P\ge g(u)=u+\dfrac{1}{\sqrt{u^2-2}}$ trên $[2;+\infty)$ ta có:

$g'(u)=1-\dfrac{u}{\sqrt{(u^2-2)^3}}\ge 1-\dfrac{u}{\sqrt{u^3}}=\dfrac{\sqrt{u}-1}{\sqrt{u}}>0,\forall u\ge 2$.

Do đó g(u) là hàm đồng biến trên $[2;+\infty)$ nên $P\ge g(u)\ge g(2)=2+\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $2+\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ đạt tại $a=b=1,c=0$ hoặc các hoán vị.

Nhận xét. Ta có thể khảo sát trực tiếp hàm số $g(t)=t+\dfrac{1}{t}+\dfrac{t}{\sqrt{t^4+1}}$ trên $(0;+\infty)$ ta được:

$$g'(t)=1-\frac{1}{t^2}+\frac{\sqrt{t^4+1}-\dfrac{2t^4}{\sqrt{t^4+1}}}{t^4+1}=\frac{t^2-1}{t^2}+\frac{1-t^4}{(t^4+1)\sqrt{t^4+1}}$$

$$=(t^2-1)\left(\frac{1}{t^2}-\frac{t^2+1}{(t^4+1)\sqrt{t^4+1}}\right)=\frac{(t^2-1)\left(\sqrt{(t^4+1)^3}-t^4-t^2\right)}{t^2\sqrt{(t^4+1)^3}};g'(t)=0\xleftrightarrow{t>0}t=1$$

Ta có g’(t) đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua $t=1$ nên g(t) đạt cực tiểu tại $t=1$ trên khoảng $(0;+\infty)$ hay $\min\limits_{t\in(0;+\infty)}g(t)=g(1)=2+\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $2+\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ đạt tại $a=b=1,c=0$ hoặc các hoán vị.

<u>**Cách 2:**</u> Đặt $x^2=a,y^2=b,z^2=c$. Khi đó $x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2=1$.

Suy ra

$$\left(xy+yz+zx\right)^2=x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+2xyz\left(x+y+z\right)\geq x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2=1.$$

Bài toán đưa về tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{1}{\sqrt{y^2+z^2}}+\frac{1}{\sqrt{z^2+x^2}} \text{ với } xy+yz+zx\geq 1.$$

Đây chính là bài toán vừa trình bày trước đó.

B. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1. Cho *x,y,z* là ba số thực dương thỏa mãn điều kiện $x+y+z\leq\frac{3}{2}$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x^3+y^3+z^3+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$.

Bài 2. Cho *x,y,z* là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $x^2+y^2+z^2=3$.

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức

$$P=xy+yz+zx+\frac{5}{x+y+z}.$$

Bài 3. Cho *x,y,z* là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $x+y+z=1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=3\left(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2\right)+3\left(xy+yz+zx\right)+x^2+y^2+z^2.$$

Bài 4. Cho các số thực *x,y,z* thỏa mãn điều kiện $x^2+y^2+z^2=1$.

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức

$$P=xy+yz+zx+\frac{4}{xy+yz+zx+2}.$$

Bài 5. Cho *x,y,z* là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện

$$3\left(x^2+y^2+z^2\right)+xy+yz+zx=12.$$

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{x^2+y^2+z^2}{x+y+z}+xy+yz+zx.$$

Bài 6. Cho x,y,z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $x+y+z=3$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x^2+y^2+z^2+\frac{xy+yz+zx}{x^2+y^2+z^2+3}$.

Bài 7. Cho *x,y,z* là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $x+y+z=3$.

Chứng minh rằng $\sqrt[3]{\frac{x^3+y^3+z^3}{3}}+8\sqrt[3]{xyz}\le 9$.

Bài 8. Cho *x,y,z* là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $x^2+y^2+z^2=3$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{(x+y+z-1)^2}{x^2y+y^2z+z^2x}+\frac{1}{x+y+z}$.

Bài 9. Cho *x,y,z* là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $x+y+z=3$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x^2+y^2+z^2+\frac{xy+yz+zx}{x^2y+y^2z+z^2x}$.

Bài 10. Cho các số thực dương *x,y,z* thỏa mãn điều kiện $xy+yz+zx=3$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\left(x^2+y^2+z^2\right)^2+\frac{324}{x+y+z}$.

Bài 11. Cho x,y,z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $xyz=1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=(x+y)(y+z)(z+x)+\frac{72}{\sqrt{x+y+z+1}}$.

Bài 12. Cho *a,b,c* là các số thực dương thỏa mãn điều kiện

$$3\left(a^2+b^2+c^2\right)=3(a+b+c)+4.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=a^3+b^3+c^3-\frac{a+b+c}{a^2+b^2+c^2}-6(ab+bc+ca).$$

Bài 13. Cho *x,y,z* là các số thực thỏa mãn điều kiện $x^2+y^2+z^2=3$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=(x+2)(y+2)(z+2)$.

Bài 14. Cho các số dương x, y, z . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$S=\frac{x^2y}{z^3}+\frac{y^2z}{x^3}+\frac{z^2x}{y^3}+\frac{13xyz}{3\left(xy^2+yz^2+zx^2\right)}.$$

Bài 15. Cho *x,y,z* là các số thực thuộc đoạn $[0;1]$ và $x+y+z=\frac{3}{2}$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=x^2+y^2+z^2$.

Bài 16. Cho *x,y,z* là các số thực dương thỏa mãn $x+y+z=10$ và $xy+yz+zx=xyz$.

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P=x^2+y^2+z^2$.

Bài 17. Cho x,y,z là các số thực thỏa mãn điều kiện $\begin{cases}x+y+z=4\\xyz=2\end{cases}$.

Chứng minh rằng $183-165\sqrt{5}\le x^4+y^4+z^4\le 18$.

Bài 18. Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a+2014}{b+2014}+\frac{b+2014}{c+2014}+\frac{c+2014}{a+2014}\le \frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\ .$$

Bài 19. Cho *x,y,z* là các số thực thỏa mãn $1\le x\le y\le z\le 4$.

Chứng minh rằng $(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\le(1+y+z)\left(1+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$.

Bài 20. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện $a+b+c=3$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P=\frac{2}{3+ab+bc+ca}+\sqrt[3]{\frac{abc}{(1+a)(1+b)(1+c)}}$.

Bài 21. Cho *x,y,z* là các số thực thuộc đoạn $\left[\frac{1}{2};1\right]$.

Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{y+z}{x+1}+\frac{z+x}{y+1}+\frac{x+y}{z+1}$.

Bài 22. Cho a,b,c là các số thực thỏa mãn $a+b+c=3$.

Chứng minh rằng $abc\left(a^2+b^2+c^2\right)\le 3$.

Bài 23. Cho *x,y,z* là các số thực thỏa mãn điều kiện $x+y+z=0$ và $x^2+y^2+z^2=1$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=x^2y^2z^2$.

Bài 24. Cho *a,b,c* là các số thực. Chứng minh rằng

$$6(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2\right)+27abc\le 10\sqrt{\left(a^2+b^2+c^2\right)^3}\ .$$

Bài 25. Cho *a,b,c* là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $ab+bc+ca=3$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{1}{abc}+\frac{4}{(a+b)(b+c)(c+a)}$.

Bài 26. Cho *a,b,c,d,e* là các số thực dương thay đổi thỏa mãn $a+b+c+d+e=1$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=abc+bcd+cde+eda+eab$.

Bài 27. Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $ab+bc+ca=3$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{a}{(a+b)(a+c)}+\frac{b}{(b+c)(b+a)}+\frac{c}{(c+a)(c+b)}-a^2-b^2-c^2+2(a+b+c)\ .$$

Bài 28. Cho *a,b,c* là các số thực thuộc đoạn $\left[0;\sqrt{3}\right]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=-\frac{8}{\sqrt{a+b+c+1}}+\sqrt{31-a^2(a+1)-b^2(b+1)-c^2(c+1)}$.

Bài 29. Cho a,b,c là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $a+b+c=3$.

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\sqrt{\frac{a^4+b^4+c^4}{a^3+b^3+c^3}}+3(ab+bc+ca).$$

Bài 30. Cho a,b,c là các số thực không âm và không có hai số nào đồng thời bằng 0. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{1}{\sqrt{a^2-ab+b^2}}+\frac{1}{\sqrt{b^2-bc+c^2}}+\frac{1}{\sqrt{c^2-ca+a^2}}.$$

Bài 31. Cho *a,b,c* là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $ab+bc+ca>0$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{\sqrt{2(a^2+b^2+c^2)}}{a+b+c}+\frac{3}{4}.\frac{abc}{a^2b+b^2c+c^2a}$.

Bài 32. Cho *x,y,z* là các số thực thuộc khoảng $(0;1)$ thỏa mãn điều kiện

$$xyz=(1-x)(1-y)(1-z).$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x^2+y^2+z^2$.

Bài 33. Cho *x,y,z* là các số thực thỏa mãn điều kiện $x^3+y^3+z^3-3xyz=1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x^2+y^2+z^2$.

Bài 34. Cho x,y,z là các số thực thoả mãn điều kiện $\begin{cases}x+y+z=0\\ x^2+y^2+z^2=\frac{8}{3}\end{cases}$.

Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=xy^2+yz^2+zx^2$.

Bài 35. Cho a,b,c là các số thực thoả mãn điều kiện $\begin{cases}a^2+c^2=1\\ b^2+2b(a+c)=6\end{cases}$.

Chứng minh rằng $b(c-a)\le 4$.

Bài 36. Cho a,b,c số thực không âm thỏa mãn điều kiện

$$\sqrt{a+2b+1}+\sqrt{a+2c+1}=4.$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P=a(1+b)+b(1+c)+c(1+a)$.

Bài 37. Cho x,y,z là các số thực không âm thoả mãn điều kiện $x^3+y^3+z^3=2+3xyz$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{x^2+2y^2+z^2}{x^2+y^2+z^2+1}$.

Bài 38. Cho a,b,c là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $a+b+c=3$.

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P=(a-1)^3+(b-1)^3+(c-1)^3$.

Bài 3 9. Cho a,b,c là các số thực không âm đôi một khác nhau.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\left[(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2\right]\left[\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}\right].$$

D. HƯỚNG DẪN GIẢI – ĐÁP SỐ

Bài 1. Ta có: $x^3+y^3+z^3\geq 3\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3$ và $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq\frac{9}{x+y+z}$.

Suy ra $P\geq 3\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3+\frac{9}{x+y+z}$.

Đặt $t=x+y+z,\left(0<t\leq\frac{3}{2}\right)$ ta có $P\geq\frac{t^3}{9}+\frac{9}{t}$.

Xét hàm số $f(t)=\frac{t^3}{9}+\frac{9}{t}$ với $0<t\leq\frac{3}{2}$ ta có

$$f'(t)=\frac{t^2}{3}-\frac{9}{t^2}=\frac{t^3-27}{3t^2}<0,\forall t\in\left(0;\frac{3}{2}\right]\Rightarrow P\geq f(t)\geq \mathrm{f}\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{51}{8}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\frac{51}{8}$ đạt tại $x=y=z=\frac{1}{2}$.

Bài 2. Đặt $t=x+y+z\Rightarrow t^2=3+2(xy+yz+zx)\Rightarrow xy+yz+zx=\frac{t^2-3}{2}$.

Do $0\leq xy+yz+zx\leq x^2+y^2+z^2=3\Rightarrow 0\leq\frac{t^2-3}{2}\leq 3\Leftrightarrow t\in\left[\sqrt{3};3\right]$.

Khi đó $P=f(t)=\frac{t^2-3}{2}+\frac{5}{t}$.

Xét hàm số $f(t)=\frac{t^2-3}{2}+\frac{5}{t}$ với $t\in\left[\sqrt{3};3\right]$ ta có

$$f'(t)=t-\frac{5}{t^2}=\frac{t^3-5}{t^2}>0,\forall t\in\left[\sqrt{3};3\right].$$

Vậy f(t) là hàm đồng biến trên đoạn $\left[\sqrt{3};3\right]$. Do đó $P=f(t)\geq f(\sqrt{3})=\frac{5}{\sqrt{3}}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi có một số bằng $\sqrt{3}$ và hai số còn lại bằng 0.

$P \le f(3) = \frac{14}{3}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\frac{5}{\sqrt{3}}$ đạt tại $x = \sqrt{3}, y = z = 0$ hoặc các hoán vị ;

giá trị lớn nhất của P bằng $\frac{14}{3}$ đạt tại $x = y = z = 1$.

Bài 3. Ta có $P = 3\left(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2\right) + xy + yz + zx + 1 \ge 1$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = 0; z = 1$ hoặc các hoán vị.

Bài 4. HD : Đánh giá $t = xy + yz + zx \in \left[-\frac{1}{2};1\right]$.

Bài 5. HD : Đánh giá $t = x^2 + y^2 + z^2 \in [3;4]$.

Bài 6. HD : Đặt $t = x^2 + y^2 + z^2 \in [3;9)$.

Bài 7. HD : Sử dụng đẳng thức kết hợp AM – GM ta có :

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 + z^3 &= (x+y+z)^3 - 3(x+y)(y+z)(z+x) \\ &= 27 - 3(x+y)(y+z)(z+x) \le 27 - 24xyz \end{aligned}$$

Đưa về khảo sát hàm số với $t = xyz$.

Bài 8. Sử dụng bất đẳng thức C-S ta có :

$$\begin{aligned} (x+y+z)\left(x^2+y^2+z^2\right) &= \left(x^3+xy^2\right) + \left(y^3+yz^2\right) + \left(z^3+zx^2\right) + x^2y + y^2z + z^2x \\ &\ge 2x^2y + 2y^2z + 2z^2x + x^2y + y^2z + z^2x = 3\left(x^2y + y^2z + z^2x\right) \end{aligned}$$

Do đó $x^2y + y^2z + z^2x \le x + y + z \Rightarrow P \ge \frac{(x+y+z-1)^2}{x+y+z} + \frac{1}{x+y+z}$.

Đặt $t = x + y + z$. Ta có

$x^2 + y^2 + z^2 < (x+y+z)^2 \le 3\left(x^2+y^2+z^2\right) \Rightarrow t \in \left(\sqrt{3};3\right]$.

Xét hàm số $f(t) = \frac{(t-1)^2}{t} + t$ với $t \in \left(\sqrt{3};3\right]$ ta có

$f'(t) = 1 - \frac{10}{t^2} = \frac{t^2 - 10}{t^2} < 0, \forall t \in \left(\sqrt{3};3\right]$.

Do đó f(t) là hàm nghịch biến trên $\left(\sqrt{3};3\right]$. Suy ra $P \ge f(t) \ge f(3) = \frac{13}{3}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\frac{13}{3}$ đạt tại $x = y = z = 1$.

Bài 9. Ta có :

$$3\left(x^2+y^2+z^2\right)=\left(x+y+z\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)$$
$$=\left(x^3+xy^2\right)+\left(y^3+yz^2\right)+\left(z^3+zx^2\right)+x^2y+y^2z+z^2x$$
$$\geq 2x^2y+2y^2z+2z^2x+x^2y+y^2z+z^2x=3\left(x^2y+y^2z+z^2x\right)$$
$$\Rightarrow x^2y+y^2z+z^2x\leq x^2+y^2+z^2$$

Suy ra :

$$P\geq x^2+y^2+z^2+\frac{xy+yz+zx}{x^2+y^2+z^2}=x^2+y^2+z^2+\frac{\left(x+y+z\right)^2-x^2-y^2-z^2}{2\left(x^2+y^2+z^2\right)}.$$
$$=x^2+y^2+z^2+\frac{9-x^2-y^2-z^2}{2\left(x^2+y^2+z^2\right)}$$

Đặt $t=x^2+y^2+z^2,\left(t\geq 3\right)$ khi đó $P\geq f(t)=t+\frac{9-t}{2t}\geq f(3)=4$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$.

Bài 10. HD : Đặt $t=x+y+z,\left(t\geq 3\right)$.

Bài 11. Sử dụng đẳng thức kết hợp bất đẳng thức AM – GM ta có :

$$\begin{aligned}\left(x+y\right)\left(y+z\right)\left(z+x\right)&=\left(x+y+z\right)\left(xy+yz+zx\right)-xyz\\&=\left(x+y+z\right)\left(xy+yz+zx\right)-1\\&\geq\left(x+y+z\right)\sqrt{3xyz\left(x+y+z\right)}-1\\&=\left(x+y+z\right)\sqrt{3\left(x+y+z\right)}-1\end{aligned}.$$

Đặt $t=x+y+z,\left(t\geq 3\right)$ khi đó $P\geq t\sqrt{3t}+\frac{72}{\sqrt{t+1}}-1$.

Xét hàm số $f(t)=t\sqrt{3t}+\frac{72}{\sqrt{t+1}}-1$ với $t\geq 3$ ta có

$f'(t)=\frac{3\sqrt{3t\left(t+1\right)^3}-72}{2\sqrt{\left(t+1\right)^3}}>0,\forall t\geq 3$ do đó f(t) là hàm đồng biến trên $\left[3;+\infty\right)$.

Vì vậy $P\geq f(t)\geq f(3)=44$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 44 đạt tại $x=y=z=1$.

Bài 12. Ta có

$$6(ab+bc+ca)=3\left[(a+b+c)^2-a^2-b^2-c^2\right]=3(a+b+c)^2-3(a+b+c)-4.$$

Và theo bất đẳng thức AM – GM dạng luỹ thừa ta có :

$$a^3+b^3+c^3\ge\frac{1}{9}(a+b+c)^3.$$

Suy ra $P\ge\dfrac{(a+b+c)^3}{9}-\dfrac{3(a+b+c)}{3(a+b+c)+4}-3(a+b+c)^2+3(a+b+c)+4$.

Theo giả thiết ta có : $3(a+b+c)+4=3\left(a^2+b^2+c^2\right)\ge(a+b+c)^2$

$\Leftrightarrow(a+b+c+1)(a+b+c-4)\le0\Leftrightarrow a+b+c\le4$.

Suy ra $-\dfrac{3(a+b+c)}{3(a+b+c)+4}=-1+\dfrac{4}{3(a+b+c)+4}\ge-1+\dfrac{4}{3.4+4}=-\dfrac{3}{4}$.

Do đó $P\ge\dfrac{(a+b+c)^3}{9}-3(a+b+c)^2+3(a+b+c)+\dfrac{13}{4}$.

Đặt $t=a+b+c,(0<t\le4)$ khi đó :

$$P\ge\frac{t^3}{9}-3t^2+3t+\frac{13}{4}=\frac{1}{9}(t-4)\left(t^2-23t-65\right)-\frac{923}{36}\ge-\frac{923}{36},\forall0<t\le4.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\dfrac{4}{3}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $-\dfrac{923}{36}$ đạt tại $a=b=c=\dfrac{4}{3}$.

Bài 13. Theo giả thiết ta có $-\sqrt{3}\le x,y,z\le\sqrt{3}$.

Do đó $x+2>0,y+2>0,z+2>0$.

Vì vậy P đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi cả x,y,z đều âm.

Không mất tính tổng quát giả sử $x=max\{x,y,z\}$ khi đó $-1\le x\le0$ và

$$P=(x+2)(yz+2(y+z)+4)=\frac{1}{2}(x+2)\left[(y+z+2)^2+x^2+1\right]\ge\frac{1}{2}(x+2)\left(x^2+1\right)$$

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{1}{2}(x+2)\left(x^2+1\right)$ với $x\in[-1;0]$ ta có

$$f'(x)=\frac{3}{2}x^2+2x+\frac{1}{2};f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=-\frac{1}{3}\end{array}\right..$$

Lập bảng biến thiên suy ra $\min\limits_{x\in[-1;0]}f(x)=f\left(-\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{25}{27}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x = -\dfrac{1}{3} \\ y+z+2=0 \\ x^2+y^2+z^2=3 \end{cases} \Leftrightarrow (x;y;z) = \left(-\frac{1}{3};-\frac{1}{3};-\frac{5}{3}\right);\left(-\frac{1}{3};-\frac{5}{3};-\frac{1}{3}\right).$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\frac{25}{27}$ đạt tại hai biến bằng $-\frac{1}{3}$ và một biến bằng $-\frac{5}{3}$.

Bài 14. Ta có

$$+\frac{xy^2+yz^2+zx^2}{xyz} = \frac{y}{z}+\frac{z}{x}+\frac{x}{y}$$

$$+\frac{x^2y}{z^3}+\frac{y^2z}{x^3}+\frac{z^2x}{y^3} = \frac{y/z}{(z/x)^2}+\frac{z/x}{(x/y)^2}+\frac{x/y}{(y/z)^2}$$

$$= \frac{a}{b^2}+\frac{b}{c^2}+\frac{c}{a^2} \ge \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

$$= ab+bc+ca \ge \sqrt{3abc(a+b+c)} = \sqrt{3(a+b+c)}$$

$$\Rightarrow S \ge f(t) = \sqrt{3t}+\frac{13}{3t}, t = a+b+c \ge 3, a = \frac{x}{y}, b = \frac{y}{z}, c = \frac{z}{x}$$

$$+f'(t) = \frac{3}{2\sqrt{3t}}-\frac{13}{3t^2} > 0, \forall t \ge 3 \Rightarrow S \ge f(t) \ge f(3) = \frac{40}{9}$$

Bài tập tương tự

Cho x,y,z là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{x^5}{y^3z^2}+\frac{y^5}{z^3x^2}+\frac{z^5}{x^3y^2}+\frac{9xyz}{2(x^2y+y^2z+z^2x)}.$$

Bài 15. Không mất tính tổng quát giả sử $x = max\{x,y,z\}$, khi đó $x \in \left[\frac{1}{2};1\right]$.

Ta có $P = x^2+y^2+z^2 = x^2+(y+z)^2-2yz \le x^2+(y+z)^2 = x^2+\left(\frac{3}{2}-x\right)^2$.

Xét hàm số $f(x) = x^2+\left(\frac{3}{2}-x\right)^2$ trên đoạn $\left[\frac{1}{2};1\right]$ ta có

$f'(x) = 4x-3; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}$. Ta có $f\left(\frac{1}{2}\right) = f(1) = \frac{5}{4}; f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{9}{8}$.

Do đó $P \le \frac{5}{4}$ đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = \frac{1}{2}, y = 0, z = 1$ và các hoán vị.

Bài 16. Ta có : $P=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)=100-2xyz$.

Từ điều kiện ta có : $\begin{cases} y+z=10-x \\ yz(x-1)=x(y+z)=x(10-x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y+z=10-x \\ yz=\dfrac{x(10-x)}{x-1} \end{cases}$.

Suy ra $P=f(x)=100-\dfrac{2x^2(10-x)}{x-1}$.

Mặt khác : $(y+z)^2 \ge 4yz \Leftrightarrow (10-x)^2 \ge 4.\dfrac{x(10-x)}{x-1}$

$\Leftrightarrow (x-1)(10-x) \ge 4x \Leftrightarrow x^2-7x+10 \le 0 \Leftrightarrow 2 \le x \le 5$.

Xét hàm số $f(x)=100-\dfrac{2x^2(10-x)}{x-1}$ liên tục trên $[2;5]$ ta có

$f'(x)=\dfrac{2x(2x^2-13x+20)}{(x-1)^2}$; $f'(x)=0 \xleftrightarrow{x\in[2;5]} \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{5}{2} \\ x=4 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên :

t	2		$\frac{5}{2}$		4		5
f'(t)		+	0	–	0	+	
f(t)	36	↗	$\frac{75}{2}$	↘	36	↗	$\frac{75}{2}$

Từ bảng biến thiên suy ra giá trị lớn nhất của P bằng $\frac{75}{2}$ đạt tại $x=5, y=z=\frac{5}{2}$.

Giá trị nhỏ nhất của P bằng 36 đạt tại $x=2, y=z=4$ (chú ý chỉ có một trường hợp xảy ra dấu bằng ở bất đẳng thức $(y+z)^2 \ge 4yz$ trong mỗi trường hợp max và min).

Bài 17. Ta có $P=x^4+y^4+z^4=(x^2+y^2+z^2)^2-2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)$

$=\left[(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)\right]^2-2(xy+yz+zx)^2+2xyz(xy+yz+zx)$

Theo giả thiết ta có $\begin{cases} x+y+z=4 \\ xyz=2 \end{cases}$, đặt $t=xy+yz+zx \Rightarrow P=2(t^2-32t+144)$

Ta có $(y+z)^2 \geq 4yz \Rightarrow (4-x)^2 \geq \frac{8}{x}$, giải bất phương trình này ta suy ra $3-\sqrt{5} \leq x \leq 2$.

Ta có $t = x(y+z) + yz = x(4-x) + \frac{2}{x}$, xét hàm số $f(x) = x(4-x) + \frac{2}{x}$ trên đoạn $\left[3-\sqrt{5}, 2\right]$ ta được $t \in \left[5, \frac{5\sqrt{5}-1}{2}\right]$

Tương tự xét hàm số $f(t) = 2\left(t^2 - 32t + 144\right)$ trên đoạn $\left[5, \frac{5\sqrt{5}-1}{2}\right]$ ta có điều phải chứng minh.

Bài 18. ***Nhận xét.*** Để ý hai vế của bất đẳng thức nếu bỏ đi số 2014 ta có đẳng thức và nếu thay $t = 2014$ ta được ngay một hàm số mà $f(t) \leq f(0)$.

Xét hàm số $f(t) = \frac{t+a}{t+b} + \frac{t+b}{t+c} + \frac{t+c}{t+a}$ trên $[0;+\infty)$.

Bất đẳng thức được chứng minh nếu chứng minh được f(t) là hàm nghịch biến trên $[0;+\infty)$.

$$f'(t) = \frac{b-a}{(t+b)^2} + \frac{c-b}{(t+c)^2} + \frac{a-c}{(t+a)^2} = \frac{b-c+c-a}{(t+b)^2} + \frac{c-b}{(t+c)^2} + \frac{a-c}{(t+a)^2}$$

$$= (a-c)\left[\frac{1}{(t+a)^2} - \frac{1}{(t+b)^2}\right] + (b-c)\left[\frac{1}{(t+b)^2} - \frac{1}{(t+c)^2}\right].$$

$$= \frac{(a-c)(b-a)(2t+a+b)}{(t+a)^2(t+b)^2} - \frac{(b-c)^2(2t+b+c)}{(t+b)^2(t+c)^2}$$

Để $f'(t) \leq 0$ ta chỉ cần giả sử $a = max\{a,b,c\}$ và bài toán được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $f'(t) = 0, \forall t \geq 0 \Leftrightarrow a = b = c$.

Bài 19. Xét hàm số $f(x) = (x+y+z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) - (1+y+z)\left(1 + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)$ trên $[1;4]$ ta có:

$$f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} - \frac{x+y+z}{x^2} = (y+z)\left(\frac{1}{yz} - \frac{1}{x^2}\right) = \frac{\left(x^2 - yz\right)(y+z)}{x^2 yz} \leq 0.$$

Do đó f(x) là hàm nghịch biến trên $[1;4]$ suy ra $f(x) \leq f(1) = 0$ hay

$$\left(x+y+z\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\le\left(1+y+z\right)\left(1+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right).$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=1$.

Nhận xét. Để tìm giá trị lớn nhất của $P=\left(x+y+z\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$ với cùng điều kiện ta xét tiếp hàm số $g(y)=\left(1+y+z\right)\left(1+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$ (xem thêm chủ đề kỹ thuật khảo sát hàm nhiều biến).

Bài 20. Ta có $ab+bc+ca\ge 3\sqrt[3]{(abc)^2}$.

$$\left(1+a\right)\left(1+b\right)\left(1+c\right)=1+ab+bc+ca+a+b+c+abc\ge\left(1+\sqrt[3]{abc}\right)^3.$$

Khi đó $P\le\frac{2}{3+3t^2}+\frac{t}{t+1}, t=\sqrt[3]{abc}, 0<t\le 1$.

Xét hàm số $f\left(t\right)=\frac{2}{3+3t^2}+\frac{t}{t+1},\ 0<t\le 1\Rightarrow f'\left(t\right)=\frac{t\left(t+1\right)\left(3t^2+t-1\right)}{3\left(t+1\right)^2\left(1+t^2\right)^2}$.

Từ đó suy ra $MaxP=\frac{5}{6}\Leftrightarrow t=1\Leftrightarrow a=b=c=1$.

Bài 21. Ta có:

$$P+3=\frac{x+y+z+1}{x+1}+\frac{x+y+z+1}{y+1}+\frac{x+y+z+1}{z+1}$$
$$=\left(x+y+z+1\right)\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}+\frac{1}{z+1}\right)$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của P.

Sử dụng bất đẳng thức C-S ta có:

$$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}+\frac{1}{z+1}\ge\frac{9}{x+y+z+3}.$$

Suy ra $P+3\ge\left(x+y+z+1\right).\frac{9}{x+y+z+3}$.

Đặt $t=x+y+z, t\in\left[\frac{3}{2};3\right]$ khi đó $P\ge f(t)=\frac{9\left(t+1\right)}{t+3}-3$.

Xét hàm số $f(t)=\frac{9\left(t+1\right)}{t+3}-3$ liên tục trên đoạn $\left[\frac{3}{2};3\right]$ ta có:

$f'(t)=\dfrac{18}{(t+3)^2}>0,\forall t\in\left[\dfrac{3}{2};3\right]$ do đó f(t) đồng biến trên $\left[\dfrac{3}{2};3\right]$.

Suy ra $P\ge f(t)\ge f\left(\dfrac{3}{2}\right)=5$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=\dfrac{1}{2}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 5 đạt tại $x=y=z=\dfrac{1}{2}$.

Tìm giá trị lớn nhất của P.

Ta có:

$$(1-x)\left(x-\frac{1}{2}\right)\ge 0\Leftrightarrow -x^2+\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}\ge 0\Leftrightarrow -2x^2+3x-1\ge 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(-2x+5)\ge 6\Leftrightarrow \frac{1}{x+1}\le -\frac{x}{3}+\frac{5}{6}$$

Tương tự ta có: $\dfrac{1}{y+1}\le -\dfrac{y}{3}+\dfrac{5}{6};\dfrac{1}{z+1}\le -\dfrac{z}{3}+\dfrac{5}{6}$.

Cộng theo vế 3 bất đẳng thức trên ta được:

$$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}+\frac{1}{z+1}\le -\frac{x+y+z}{3}+\frac{5}{2}.$$

Suy ra $P\le (x+y+z+1)\left(-\dfrac{x+y+z}{3}+\dfrac{5}{2}\right)$.

Đặt $t=x+y+z,t\in\left[\dfrac{3}{2};3\right]$ ta được: $P\le (t+1)\left(-\dfrac{t}{3}+\dfrac{5}{2}\right)=\dfrac{1}{6}(2t-7)(3-t)+6\le 6$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$.

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng 6 đạt tại $x=y=z=1$.

Bài 22. Gọi biểu thức vế trái của bất đẳng thức là P ta có

$$P=abc\left[(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)\right]=9abc-2abc(ab+bc+ca).$$

Ta có $(ab+bc+ca)^2\ge 3abc(a+b+c)=9abc$.

Suy ra

$$P\le \frac{(ab+bc+ca)^2}{9}\left[9-2(ab+bc+ca)\right]=\frac{-2(ab+bc+ca)^3}{9}+(ab+bc+ca)^2.$$

Đặt $t=ab+bc+ca$ suy ra $P\le f(t)=\dfrac{-2t^3}{9}+t^2$.

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{-2t^3}{9}+t^2$ với $t\in(0;3]$ ta có

$f'(t) = -\dfrac{2t^2}{3} + 2t;\ f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 3$.

Ta có f'(t) đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua $t = 3$ nên f(t) đạt cực đại tại $t = 3$. Suy ra $P \le f(t) \le f(3) = 3$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Bài 23. Ta có: $2yz = (y+z)^2 - (y^2 + z^2) = x^2 - (1 - x^2) = 2x^2 - 1$.

Suy ra $P = x^2\left(x^2 - \dfrac{1}{2}\right)^2 = x^6 - x^4 + \dfrac{1}{4}x^2$.

Mặt khác: $(y+z)^2 \ge 4yz \Leftrightarrow x^2 \ge 2(2x^2 - 1) \Leftrightarrow 0 \le x^2 \le \dfrac{2}{3}$.

Đặt $t = x^2, \left(t \in \left[0; \dfrac{2}{3}\right]\right)$ và $P = f(t) = t^3 - t^2 + \dfrac{1}{4}t$.

Xét hàm số $f(t) = t^3 - t^2 + \dfrac{1}{4}t$ liên tục trên đoạn $\left[0; \dfrac{2}{3}\right]$ ta có

$f'(t) = 3t^2 - 2t + \dfrac{1}{4};\ f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{1}{6}$ hoặc $t = \dfrac{1}{2}$.

Ta có $f(0) = f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0,\ f\left(\dfrac{1}{6}\right) = f\left(\dfrac{2}{3}\right) = \dfrac{1}{54}$.

Suy ra $\max\limits_{t \in \left[0; \frac{2}{3}\right]} f(t) = \dfrac{1}{54}$. Do đó $P \le \dfrac{1}{54}$ đẳng thức xảy ra khi

$x = \sqrt{\dfrac{2}{3}}, y = z = -\dfrac{1}{\sqrt{6}}$.

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng $\dfrac{1}{54}$ đặt tại $x = \sqrt{\dfrac{2}{3}}, y = z = -\dfrac{1}{\sqrt{6}}$.

Bài 24. Nếu $a^2 + b^2 + c^2 = 0 \Leftrightarrow a = b = c = 0$ bất đẳng thức trở thành đẳng thức.

+ Nếu $a^2 + b^2 + c^2 > 0$ viết lại bất đẳng thức dưới dạng :

$$\frac{6(a+b+c)(a^2+b^2+c^2) - 27abc}{\sqrt{(a^2+b^2+c^2)^3}} \le 10.$$

Đặt $x = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, y = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, z = \dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Bất đẳng thức trở thành: $6(x+y+z) - 27xyz \le 10 \Leftrightarrow 2(x+y+z) - 9xyz \le \dfrac{10}{3}$.

Không mất tính tổng quát giả sử $x^2 = max\left\{x^2, y^2, z^2\right\} \Rightarrow x^2 \ge \dfrac{x^2+y^2+z^2}{3} = \dfrac{1}{3}$.

Ta có

$$\left(x\left(2-9yz\right)+2\left(y+z\right)\right)^2 \le \left[x^2+\left(y+z\right)^2\right].\left[\left(2-9yz\right)^2+4\right] = \left(2yz+1\right)\left(81y^2z^2-36yz+8\right).$$

Đặt $t = yz \Rightarrow |t| \le \dfrac{y^2+z^2}{2} = \dfrac{1-x^2}{2} \le \dfrac{1}{3}$.

Khi đó $P \le f(t) = \left(2t+1\right)\left(81t^2-36t+8\right)$ với $t \in \left[-\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{3}\right]$ ta có:

$$f'(t) = 486t^2+18t-20;\ f'(t)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -\dfrac{2}{9} \\ t = \dfrac{5}{27} \end{array}\right..$$

Ta có $f\left(-\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{29}{3};\ f\left(-\dfrac{2}{9}\right) = \dfrac{100}{9};\ f\left(\dfrac{5}{27}\right) = \dfrac{1369}{243};\ f\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{25}{3}$.

Suy ra $\underset{t\in\left[-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right]}{Max} f(t) = f\left(-\dfrac{2}{9}\right) = \dfrac{100}{9} \Rightarrow P^2 \le \dfrac{100}{9} \Rightarrow P \le \dfrac{10}{3}$.

Đẳng thức xảy ra chẳng hạn tại $a=-1, b=c=2$.

Bài 25. Ta có:

$$\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right) = \left(a+b+c\right)\left(ab+bc+ca\right)-abc = 3\left(a+b+c\right)-abc.$$

Khi đó $P = \dfrac{1}{abc} + \dfrac{4}{3\left(a+b+c\right)-abc}$.

Mặt khác $\left(ab+bc+ca\right)^2 \ge 3abc\left(a+b+c\right) \Rightarrow a+b+c \le \dfrac{3}{abc}$.

Suy ra $P \ge \dfrac{1}{abc} + \dfrac{4}{\dfrac{9}{abc}-abc} = \dfrac{1}{abc} + \dfrac{4abc}{9-\left(abc\right)^2}$.

Đặt $t = abc, \left(0 < t \le 1\right)$ khi đó $P \ge f(\text{t}) = \dfrac{1}{t} + \dfrac{4t}{9-t^2}$.

Xét hàm số $f(\text{t}) = \dfrac{1}{t} + \dfrac{4t}{9-t^2}$ trên $\left(0;1\right]$ ta có:

$$f'(t) = -\frac{1}{t^2} + \frac{4t^2+36}{\left(9-t^2\right)^2} = \frac{t^2\left(4t^2+36\right)-\left(9-t^2\right)^2}{t^2\left(9-t^2\right)^2} < 0, \forall t \in \left(0;1\right]$$

nên f(t) là hàm nghịch biến trên $\left(0;1\right]$. Do đó $f(t) \geq f(1) = \frac{3}{2}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\frac{3}{2}$ đạt tại $a = b = c = 1$.

Cách 2: Ta có thể đánh giá nhanh thông qua bất đẳng thức AM-GM như sau:

$$P = \frac{1}{2abc} + \frac{1}{2abc} + \frac{4}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{2abc} + \frac{4}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

$$\geq \frac{1}{2} + 2\sqrt{\frac{2}{(ac+bc)(ab+ac)(bc+ab)}} \geq \frac{1}{2} + 2\sqrt{\frac{2}{\left(\frac{2ab+2bc+2ca}{3}\right)^3}} = \frac{3}{2}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\frac{3}{2}$ xảy ra khi $a = b = c = 1$.

Bài 26. Không mất tính tổng quát giả sử $e = \min\{a,b,c,d,e\}$ viết lại biểu thức P dưới dạng: $P = bc(a+d-e) + e(a+c)(b+d)$.

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta được:

$bc(a+d-e) \leq \left(\frac{b+c+a+d-e}{3}\right)^3 = \left(\frac{1-2e}{3}\right)^3$ và

$e(a+c)(b+d) \leq e\left(\frac{a+c+b+d}{2}\right)^2 = e\left(\frac{1-e}{2}\right)^2$.

Suy ra $P \leq \left(\frac{1-2e}{3}\right)^3 + e\left(\frac{1-e}{2}\right)^2$.

Với $a,b,c,d,e > 0$ và $a+b+c+d+e = 1, e = \min\{a,b,c,d,e\} \Rightarrow 0 < e \leq \frac{1}{5}$.

Xét hàm số $f(e) = \left(\frac{1-2e}{3}\right)^3 + e\left(\frac{1-e}{2}\right)^2$ trên $\left(0;\frac{1}{5}\right]$ ta được:

$f'(e) = \frac{1}{36}\left(-5e^2 - 4e + 1\right) = \frac{1}{36}(1-5e)(e+1) \geq 0, \forall e \in \left(0;\frac{1}{5}\right]$ nên f(e) là hàm đồng biến trên $\left(0;\frac{1}{5}\right]$. Do đó $f(e) \leq \mathrm{f}\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{25}$.

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng $\frac{1}{25}$ đạt tại $a = b = c = d = e = \frac{1}{5}$.

Bài 27. Ta có: $\frac{a}{(a+b)(a+c)} + \frac{b}{(b+c)(b+a)} + \frac{c}{(c+a)(c+b)}$

$$=\frac{2\left(ab+bc+ca\right)}{\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)}=\frac{6}{\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)}.$$

Và

$$2\left(a+b+c\right)-a^2-b^2-c^2=2\left(a+b+c\right)-\left(a+b+c\right)^2+2\left(ab+bc+ca\right)$$
$$=2\left(a+b+c\right)-\left(a+b+c\right)^2+6$$

Mặt khác:

$$\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)=\left(a+b+c\right)\left(ab+bc+ca\right)-abc$$
$$\geq\left(a+b+c\right)\left(ab+bc+ca\right)-\frac{1}{9}\left(a+b+c\right)\left(ab+bc+ca\right)$$

Suy ra: $\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)\geq\frac{8}{9}\left(a+b+c\right)\left(ab+bc+ca\right)=\frac{8}{3}\left(a+b+c\right)$.

Suy ra $P\leq\frac{9}{4\left(a+b+c\right)}+2\left(a+b+c\right)-\left(a+b+c\right)^2+6$.

Đặt $t=a+b+c,\left(t\geq\sqrt{3\left(ab+bc+ca\right)}=3\right)\Rightarrow P\leq f(t)=\frac{9}{4t}+2t-t^2+6$.

Xét hàm số $f(t)=\frac{9}{4t}+2t-t^2+6$ với $t\geq 3$ ta có:

$f'(t)=-\frac{9}{4t^2}+2\left(1-t\right)<0,\forall t\geq 3$. Do đó f(t) là hàm nghịch biến trên $\left[3;+\infty\right)$.

Suy ra $P\leq f(t)\leq f(3)=\frac{15}{4}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng $\frac{15}{4}$ đạt tại $a=b=c=1$.

Bài 28. Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$a^2\left(a+1\right)+b^2\left(b+1\right)+c^2\left(c+1\right)=a^3+b^3+c^3+a^2+b^2+c^2\geq\frac{1}{9}\left(a+b+c\right)^3+\frac{1}{3}\left(a+b+c\right)^2.$$

Đặt $t=a+b+c,\left(t\in\left[0;3\sqrt{3}\right]\right)\Rightarrow P\leq f(t)=-\frac{8}{\sqrt{t+1}}+\sqrt{31-\frac{t^3}{9}-\frac{t^2}{3}}$.

Xét hàm số $f(t)=-\frac{8}{\sqrt{t+1}}+\sqrt{31-\frac{t^3}{9}-\frac{t^2}{3}}$ liên tục trên đoạn $\left[0;3\sqrt{3}\right]$ ta có:

$$f'(t)=\frac{1}{2}\left[\frac{8}{\sqrt{\left(t+1\right)^3}}-\frac{t\left(t+2\right)}{\sqrt{-t^3-3t^2+279}}\right].$$

Ta có: $f'(t)=0 \Leftrightarrow 8\sqrt{-t^3-3t^2+279}-t(t+2)\sqrt{(t+1)^3} \Leftrightarrow t=3$ (do vế trái là hàm số nghịch biến).

Ta có $f'(t)$ đổi dấu từ dương sang âm khi đi qua $t=3$ nên f(t) đạt cực đại tại $t=3$. Do đó $P \le f(t) \le f(3)=3$.

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng 3 đạt tại $a=b=c=1$.

Bài 29. Tìm giá trị nhỏ nhất của P

Ta có: $x^4-3x^3-9x(x-3)=x(x-3)^2(x+3)\ge 0, \forall x \in [0;3]$.

Nếu $ab+bc+ca \ge \frac{9}{5} \Rightarrow P \ge 3.\frac{9}{5}=\frac{27}{5}>\sqrt{3}$.

Xét với $ab+bc+ca \le \frac{9}{5}$ ta có:

$$\frac{a^4+b^4+c^4}{a^3+b^3+c^3} \ge 3+9.\frac{a(a-3)+b(b-3)+c(c-3)}{a^3+b^3+c^3}$$

$$=3+9.\frac{a^2+b^2+c^2-3(a+b+c)}{a^3+b^3+c^3}=3+9.\frac{a^2+b^2+c^2-(a+b+c)^2}{a^3+b^3+c^3}$$

$$=3-18.\frac{ab+bc+ca}{a^3+b^3+c^3} \ge 3-18.\frac{ab+bc+ca}{a^3+b^3+c^3-3abc}=3-18.\frac{ab+bc+ca}{3.[9-3(ab+bc+ca)]}$$

$$=3+2.\frac{ab+bc+ca}{ab+bc+ca-3}$$

Vậy $P \ge \sqrt{3+2.\frac{ab+bc+ca}{ab+bc+ca-3}}+3(ab+bc+ca)$.

Đặt $t=ab+bc+ca, \left(t \in \left[0;\frac{9}{5}\right)\right)$ khi đó $P \ge f(t)=\sqrt{3+\frac{2t}{t-3}}+3t=3t+\sqrt{5+\frac{6}{t-3}}$.

Xét hàm số $f(t)=3t+\sqrt{3+\frac{6}{t-3}}$ ta có:

$$f'(t)=-\frac{3}{\sqrt{5+\frac{6}{t-3}}}+3=\frac{4t-6}{(t-3)\left(\sqrt{5+\frac{6}{t-3}}+1\right)};\ f'(t)=0 \Leftrightarrow t=\frac{3}{2}.$$

Bảng biến thiên:

t	0		$\frac{3}{2}$		$\frac{9}{5}$
f'(t)		+	0	−	
f(t)	$\sqrt{3}$	↗	$\frac{11}{2}$	↘	$\frac{27}{5}$

Dựa vào bảng biến thiên suy ra $P \geq f(0) = \sqrt{3}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\sqrt{3}$ đạt tại $a = 3, b = c = 0$ hoặc các hoán vị.

Bài 30. Không mất tính tổng quát giả sử $c = \min\{a,b,c\}$ khi đó

$$b^2 - bc + c^2 = b^2 + c(c-b) \leq b^2, c^2 - ca + a^2 = a^2 + c(c-a) \leq a^2.$$

Suy ra:

$$P \geq \frac{1}{\sqrt{a^2 - ab + b^2}} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b+c}{\sqrt{(a+b)^2 - 3ab}} + \frac{a+b}{ab}$$

$$\geq \frac{a+b}{\sqrt{(a+b)^2 - 3ab}} + \frac{(a+b)^2}{ab} = \sqrt{\frac{1}{1 - 3\frac{ab}{(a+b)^2}}} + \frac{(a+b)^2}{ab}$$

Đặt $t = \frac{ab}{(a+b)^2}, \left(0 < t \leq \frac{1}{4}\right)$ khi đó $P \geq f(t) = \frac{1}{\sqrt{1-3t}} + \frac{1}{t}$.

Xét hàm số $f(t) = \frac{1}{\sqrt{1-3t}} + \frac{1}{t}$ trên $\left(0; \frac{1}{4}\right]$ ta có

$$f'(t) = \frac{3}{2\sqrt{(1-3t)^3}} - \frac{1}{t^2} = \frac{3t^2 - 2\sqrt{(1-3t)^3}}{2t^2\sqrt{(1-3t)^3}} \leq \frac{\frac{3}{16} - 2.\frac{1}{4}}{2t^2\sqrt{(1-3t)^3}} < 0, \forall t \in \left(0; \frac{1}{4}\right].$$

Suy ra f(t) nghịch biến trên $\left(0; \frac{1}{4}\right]$ do đó $P \geq f(t) \geq f\left(\frac{1}{4}\right) = 6$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 6 đạt tại $a = b = \frac{1}{2}, c = 0$ hoặc các hoán vị.

Bài 31. Không mất tính tổng quát giả sử b là số nằm giữa a và c.

Khi đó:

$(b-a)(b-c)\le 0 \Leftrightarrow b^2+ac\le ab+bc \Rightarrow b^2c+c^2a\le abc+bc^2$

$$\Rightarrow a^2b+b^2c+c^2a\le a^2b+abc+bc^2=b\left(a^2+ac+c^2\right).$$

Suy ra $\dfrac{abc}{a^2b+b^2c+c^2a}\ge \dfrac{abc}{b\left(a^2+ac+c^2\right)}=\dfrac{ac}{a^2+ac+c^2}$.

Ta cần đánh giá $\dfrac{\sqrt{2\left(a^2+b^2+c^2\right)}}{a+b+c}$ và $\dfrac{ac}{a^2+ac+c^2}$.

Ta có: $\dfrac{\sqrt{2\left(a^2+b^2+c^2\right)}}{a+b+c}=\sqrt{2-4.\dfrac{ab+bc+ca}{(a+b+c)^2}}$.

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$4(ab+bc+ca)\left(a^2+ac+c^2\right)\le\left(ab+bc+ca+a^2+ac+c^2\right)^2$$
$$=\left[b(a+c)+(a+c)^2\right]^2=(a+b+c)^2(a+c)^2.$$

Suy ra $\dfrac{ab+bc+ca}{(a+b+c)^2}\le\dfrac{(a+c)^2}{4\left(a^2+ac+c^2\right)}$.

Do đó

$$P\ge\sqrt{2-\frac{(a+c)^2}{a^2+ac+c^2}}+\frac{3ac}{4\left(a^2+ac+c^2\right)}=\sqrt{1-\frac{ac}{a^2+ac+c^2}}+\frac{3ac}{4\left(a^2+ac+c^2\right)}.$$

Đặt $t=\sqrt{1-\dfrac{ac}{a^2+ac+c^2}},\left(\sqrt{\dfrac{2}{3}}\le t\le 1\right)$ khi đó:

$$P\ge f(t)=t+\frac{3}{4}\left(1-t^2\right)=-\frac{3}{4}t^2+t+\frac{3}{4}.$$

Xét hàm số $f(t)=-\dfrac{3}{4}t^2+t+\dfrac{3}{4}$ liên tục trên đoạn $\left[\sqrt{\dfrac{2}{3}};1\right]$ ta có

$f'(t)=-\dfrac{3}{2}t+1<0,\forall t\in\left[\sqrt{\dfrac{2}{3}};1\right]$. Do đó f(t) nghịch biến trên $\left[\sqrt{\dfrac{2}{3}};1\right]$.

Suy ra $P\ge f(t)\ge f(1)=1$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b,c=0$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 1 đạt tại $a=b,c=0$ hoặc các hoán vị.

Bài 34. Đây là một biểu thức hoán vị cần tìm cách đánh giá chuyển về biểu thức đối xứng cách thực hiện là xét phần tương ứng với P cụ thể là

$$Q = x^2y + y^2z + z^2x.$$

Theo giả thiết ta có

$$\begin{cases} xy + yz + zx = \dfrac{(x+y+z)^2 - x^2 - y^2 - z^2}{2} = -\dfrac{4}{3} \\ x^3 + y^3 + z^3 = (x+y+z)^3 - 3(x+y)(y+z)(z+x) = 3xyz \\ x^3y^3 + y^3z^3 + z^3x^3 = (xy+yz+zx)^3 - 3\left[xyz(x+y+z)(xy+yz+zx) - x^2y^2z^2\right] = 3x^2y^2z^2 - \dfrac{64}{27} \end{cases}.$$

Khi đó

$$\begin{cases} P + Q = xy(x+y) + yz(y+z) + zx(x+z) = -3xyz \\ P.Q = x^3y^3 + y^3z^3 + z^3x^3 + xyz\left(x^3+y^3+z^3\right) + 3x^2y^2z^2 = 9x^2y^2z^2 - \dfrac{64}{27} \end{cases}.$$

Theo định lý Vi-ét P,Q là 2 nghiệm của phương trình

$$x^2 + 3tx + 9t^2 - \frac{64}{27} = 0 \text{ với } t = xyz.$$

Suy ra $P = \dfrac{-3t + \sqrt{\dfrac{256}{27} - 27t^2}}{2}$ hoặc $P = \dfrac{-3t - \sqrt{\dfrac{256}{27} - 27t^2}}{2}$.

Khảo sát P như trên ta tìm được Max và Min.

Bài tập tương tự

Cho x,y,z là các số thực thỏa mãn $x + y + z = 5$ và $x^2 + y^2 + z^2 = 9$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2y + y^2z + z^2x$.

Bài 35. Theo giả thiết ta có $\begin{cases} (a+c)^2 - 2ac = 1 \\ a + c = \dfrac{6-b^2}{2b} \end{cases} \Rightarrow 2ac = \left(\dfrac{6-b^2}{2b}\right)^2 - 1.$

Do đó $P^2 = b^2(c-a)^2 = b^2\left(c^2 + a^2 - 2ca\right) = b^2\left\{1 - \left[\left(\dfrac{6-b^2}{2b}\right)^2 - 1\right]\right\} \le 16.$

Bài 36. Ta có $P = a + (a+1)(b+c) + bc \le a + (a+1)(b+c) + \left(\dfrac{b+c}{2}\right)^2.$

Ta chỉ cần rút được b+c theo a.

Theo giả thiết ta có $\begin{cases} x + 2 = \sqrt{a+2b+1} \\ 2 - x = \sqrt{a+2c+1} \end{cases} \Rightarrow x \in [-1;1]$ ta có

$$\begin{cases} a+b+c=x^2+3 \\ b-c=4x \\ \sqrt{a^2+2(b+c+1)a+(2b+1)(2c+1)}=4-x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=x^2+3 \\ b-c=4x \end{cases}.$$

Ta có

$$4(a+b+c)^2-3(b-c)^2=12(ab+bc+ca)-(2a-b-c)^2\geq 12(ab+bc+ca).$$

Do đó

$$P=a+b+c+ab+bc+ca\leq a+b+c+\frac{1}{3}(a+b+c)^2-\frac{1}{4}(b-c)^2$$

$$=x^2+3+\frac{1}{3}\left(x^2+3\right)^2-4x^2=\frac{x^4}{3}-x^2+6=\frac{x^2\left(x^2-3\right)}{3}+6\leq 6,\forall x\in[-1;1]$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài 37. Theo giả thiết ta có:

$$(x+y+z)\left(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\right)=2$$

$$\Leftrightarrow (x+y+z)\left(\frac{3}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)-\frac{1}{2}(x+y+z)^2\right)=2.$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2=\frac{(x+y+z)^2}{3}+\frac{4}{3(x+y+z)}\geq\sqrt[3]{4}$$

Khi đó $P=\dfrac{x^2+2y^2+z^2}{x^2+y^2+z^2+1}\geq\dfrac{x^2+y^2+z^2}{x^2+y^2+z^2+1}=1-\dfrac{1}{x^2+y^2+z^2+1}\geq 1-\dfrac{1}{1+\sqrt[3]{4}}$.

Với $x=\sqrt[3]{2}, y=z=0$ thì $P=1-\dfrac{1}{1+\sqrt[3]{4}}$.

Bài tập tương tự

Cho x,y,z là các số thực không âm thoả mãn điều kiện $x^3+y^3+z^3=2+3xyz$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x^2+2y^2+3z^2$.

Bài 38. Tìm giá trị nhỏ nhất

Không mất tính tổng quát giả sử $a=\min\{a,b,c\}\Rightarrow a\leq 1\Rightarrow b+c=3-a\geq 2$.

Khi đó

$$(b-1)^3+(c-1)^3=(b+c-2)\left[(b-1)^2-(b-1)(c-1)+(c-1)^2\right]$$

$$\geq(b+c-2)\left[\frac{(b-1+c-1)^2}{2}-\frac{(b-1+c-1)^2}{4}\right]=\frac{(b+c-2)^3}{4}$$

Suy ra

$$P \ge (a-1)^3 + \frac{1}{4}(b+c-2)^3 = (a-1)^3 + \frac{1}{4}(1-a)^3 = \frac{3}{4}(a-1)^3 \ge -\frac{3}{4}, \forall a \in [0;1].$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $-\frac{3}{4}$ đạt tại $a=0, b=c=\frac{3}{2}$ hoặc các hoán vị.

\+ **Tìm giá trị lớn nhất.**

Sử dụng đẳng thức $x^3+y^3+z^3=(x+y+z)^3-3(x+y)(y+z)(z+x)$.

Ta có: $P=(a+b+c-3)^3-3(a+b-2)(b+c-2)(c+a-2)$.

$$=-3(a+b-2)(b+c-2)(c+a-2)$$

$$\Rightarrow P^2=9(b+c-2)^2(a+b-2)^2(c+a-2)^2$$

Ta có $b+c-2 \ge 0, (a+b-2)+(a+c-2)=a-1 \le 0$.

\+ Nếu cả $a+b-2 \le 0, a+c-2 \le 0 \Rightarrow P \le 0$.

\+ Nếu tồn tại một thừa số dương 1 thừa số âm ta giả sử $a+b-2 \le 0, a+c-2 \ge 0$ khi đó

$$P=3(b+c-2)(2-b-a)(a+c-2)$$

$$\le 3(2-b-a)\left(\frac{b+c-2+a+c-2}{2}\right)^2$$

$$=\frac{3}{4}(c-1)^3 \le \frac{3}{4}.(3-1)^3=6$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=0, c=3$.

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng 6.

Bài 39. Giả sử $c=\min\{a,b,c\} \Rightarrow 0 \le c < a,b$ khi đó

$$P \ge \left[(a+b)^2+a^2+b^2\right]\left[\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right].$$

Ta có:

$$\left[(a+b)^2+a^2+b^2\right]\left[\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right]=2.\frac{a^2+ab+b^2}{(a-b)^2}+2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)^2+2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)$$

$$=2.\frac{\frac{a}{b}+1+\frac{b}{a}}{\frac{a}{b}-2+\frac{b}{a}}+2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)^2+2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)$$

Đặt $t=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}, (t>2)$ khi đó $P \ge f(t)=2\left(t^2+t+\frac{t+1}{t-2}\right)$.

Xét hàm số $f(t)=2\left(t^2+t+\frac{t+1}{t-2}\right)$ trên $(2;+\infty)$ ta có

$f'(t)=2\left[2t+1-\frac{3}{(t-2)^2}\right]; f'(t)=0 \Leftrightarrow (2t+1)(t-2)^3-3=0$.

$\Leftrightarrow 2t^3-7t^2+4t+1=0 \xleftrightarrow{t>2} t=\frac{5+\sqrt{33}}{4}$.

Tại $t=\frac{5+\sqrt{33}}{4}$ thì f'(t) đổi dầu từ âm sang dương nên f(t) đạt cực tiểu tại $\frac{5+\sqrt{33}}{4}$ hay $f(t)\geq f\left(\frac{5+\sqrt{33}}{4}\right)=\frac{59+11\sqrt{33}}{4}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\frac{59+11\sqrt{33}}{4}$ đạt tại $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=\frac{5+\sqrt{33}}{4}, c=0$.

CHỦ ĐỀ 4: KỸ THUẬT SỬ DỤNG TÍNH THUẦN NHẤT

A. NỘI DUNG PHƯƠNG PHÁP

Xét một biểu thức $P(x_1;x_2;...;x_n)$ được gọi là biểu thức thuần nhất bậc k khi $P(tx_1;tx_2;...;tx_n)=t^kP(x_1;x_2;...;x_n)$.

Như đã đề cập trong chủ đề Bất đẳng thức AM – GM với bất đẳng thức thuần nhất ta có thể chuẩn hoá điều kiện của các biến để chứng minh cho đơn giản. Với dạng toán này chúng ta tiếp cận đưa về bài toán ít biến số hơn bất đẳng thức ban đầu và kết hợp sử dụng tính đơn điệu của hàm số.

➢ **PHƯƠNG PHÁP**

Phương pháp chung là giảm bài toán n biến về (n-1) biến hoặc nhỏ hơn bằng các phép đặt ẩn phụ.

Bằng cách đặt

$$\begin{matrix} x_2=t_1x_1 \\ x_3=t_2x_2 \\ ... \\ x_n=t_{n-1}x_{n-1} \end{matrix}.$$

Ta đưa về bài toán với (n-1) biến $t_1,t_2,...,t_{n-1}$.

Dấu hiện nhận diện:

- Giả thiết bài toán có dạng thuần nhất.
- Biểu thức của P thuần nhất.

1) Kỹ thuật đặt $x = ty$ hoặc $y = tx$ cho trường hợp bất đẳng thức và bài toán cực trị hai biến số.

Ví dụ 1. Cho x,y là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $x \ge 2y$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \dfrac{x^2+y^2}{xy}$.

Lời giải

Đặt $x = ty$ từ $x \ge 2y \Rightarrow t \ge 2$ và ta được:

$$P = \frac{t^2+1}{t} = \frac{t^2+1}{t} - \frac{5}{2} + \frac{5}{2} = \frac{2t^2-5t+2}{2t} + \frac{5}{2}$$
$$= \frac{(t-2)(2t-1)}{2t} + \frac{5}{2} \ge 0, \forall t \ge 2$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\dfrac{5}{2}$ đạt tại $x = 2y$.

Nhận xét. Ta có thể xử lý bằng cách khác như sau:

Với dự đoán dấu bằng xảy ra tại $x = 2y$ ta viết lại P dưới dạng:

$$P = \frac{3x^2}{4xy} + \frac{x^2+4y^2}{4xy} = \frac{3}{4}.\frac{x}{y} + \frac{x^2+4y^2}{4xy} \ge \frac{3}{4}.2 + \frac{4xy}{4xy} = \frac{5}{2}.$$

Trong trường hợp không dự đoán được dấu bằng ta sử dụng kỹ thuật đẳng cấp như trên ta dễ dàng tìm được giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức của P với việc coi P là hàm của t.

Ví dụ 2. (TSĐH Khối B 2006) Cho hai số thực x, y thay đổi và thỏa mãn điều kiện $x^2 + y^2 = 1$.

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \dfrac{2(x^2+6xy)}{1+2xy+2y^2}$.

Lời giải

Nhận xét. Biểu thức P chưa đồng bậc nhưng để ý nếu thay $x^2 + y^2 = 1$ vào biểu thức của P thì ta đưa P về dạng đồng bậc.

Viết lại biểu thức P dưới dạng: $P = \dfrac{2(x^2+6xy)}{x^2+y^2+2xy+2y^2} = \dfrac{2(x^2+6xy)}{x^2+3y^2+2xy}$.

<u>TH1:</u> Nếu $y = 0$ ta có $P = 2$.

<u>TH2:</u> Nếu $y \ne 0$ ta đặt $x = t.y$ ta có: $P = f(t) = \dfrac{2(t^2+6t)}{t^2+2t+3}$.

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{2\left(t^2+6t\right)}{t^2+2t+3}$ trên $\mathbb{R}$ ta có

$$f'(t)=-\frac{4\left(2t^2-3t-9\right)}{\left(t^2+2t+3\right)^2};\ f'(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-\dfrac{3}{2}\\ t=3\end{array}\right..$$

Bảng biến thiên:

t	$-\infty$		$-\dfrac{3}{2}$		3		$+\infty$
f'(t)		$-$	0	$+$	0	$-$	
f(t)	2	$\searrow$	-6	$\nearrow$	3	$\searrow$	2

Dựa vào bảng biến thiên suy ra $P_{\max}=f(3)=3$ đạt tại

$$x=3y\Leftrightarrow\left(x;y\right)=\left(\pm\frac{3}{\sqrt{10}};\pm\frac{1}{\sqrt{10}}\right).$$

$P_{\min}=P\left(-\dfrac{3}{2}\right)=-6$ đạt tại

$$x=-\frac{3}{2}y\Leftrightarrow\left(x;y\right)=\left(-\frac{3}{\sqrt{13}};\frac{2}{\sqrt{13}}\right);\left(\frac{3}{\sqrt{13}};-\frac{2}{\sqrt{13}}\right).$$

Ví dụ 3. Giả sử x, y là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $x+y\le 2$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=7(x+2y)-4\sqrt{x^2+2xy+8y^2}$.

Lời giải

Vì x, y là các số thực dương nên

$$P=(x+y)\left[\frac{7(x+2y)-4\sqrt{x^2+2xy+8y^2}}{x+y}\right]$$

$$=(x+y)\left(7+\frac{7y-4\sqrt{x^2+2xy+8y^2}}{x+y}\right).\qquad(1)$$

Đặt $t=\dfrac{x}{y}$, $t>0$ khi đó $\dfrac{7y-4\sqrt{x^2+2xy+8y^2}}{x+y}=\dfrac{7-4\sqrt{t^2+2t+8}}{t+1}$. (2)

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{7-4\sqrt{t^2+2t+8}}{t+1}$ với $t>0.$

Ta có $f'(t)=\dfrac{-7\sqrt{t^2+2t+8}+28}{(t+1)^2\sqrt{t^2+2t+8}}$; $f'(t)=0\Leftrightarrow\sqrt{t^2+2t+8}=4\Leftrightarrow t=2.$

Suy ra bảng biến thiên

t	0		2		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		$\nearrow$	-3	$\searrow$	

Từ bảng biến thiên ta suy ra $f(t)\le -3$ với mọi $t>0.$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $t=2.$ (3)

Từ (1), (2) và (3) ta suy ra $P\le (x+y)(7-3)\le 8,$ dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} x+y=2 \\ t=\dfrac{x}{y}=2 \end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{4}{3},\ y=\dfrac{2}{3}.$

Vậy giá trị lớn nhất của *P* là 8, đạt khi $x=\dfrac{4}{3},\ y=\dfrac{2}{3}.$

Ví dụ 4. (TSĐH Khối D 2013) Cho x,y là hai số thực dương thỏa mãn điều kiện $xy\le y-1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{x+y}{\sqrt{x^2-xy+3y^2}}-\frac{x-2y}{6\left(x+y\right)}.$$

Lời giải

Nhận xét. Nhận thấy P đồng bậc nên ta tìm cách đánh giá miền giá trị của $t=\dfrac{x}{y}$ và đưa về khảo sát hàm số với t.

Xuất phát từ giả thiết ta có: $0<\dfrac{x}{y}\le\dfrac{y-1}{y^2}=\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{y^2}=-\left(\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4}\le\dfrac{1}{4}.$

Đặt $t=\dfrac{x}{y}\Rightarrow 0<t\le\dfrac{1}{4}$ và $P=\dfrac{t+1}{\sqrt{t^2-t+3}}-\dfrac{t-2}{6\left(t+1\right)}.$

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{t+1}{\sqrt{t^2-t+3}}-\dfrac{t-2}{6\left(t+1\right)}$ trên $\left(0;\dfrac{1}{4}\right]$ ta được:

$$f'(t)=\frac{7-3t}{2\sqrt{\left(t^2-t+3\right)^3}}-\frac{1}{2\left(t+1\right)^2}.$$

Với $0<t\le\frac{1}{4}$ ta có $t^2-t+3=t\left(t-1\right)+3<3;7-3t>6;t+1>1$.

$$\Rightarrow\frac{7-3t}{2\sqrt{\left(t^2-t+3\right)^3}}-\frac{1}{2\left(t+1\right)^2}>\frac{6}{2.3\sqrt{3}}-\frac{1}{2}=\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{2}>0.$$

Vậy f(t) là hàm đồng biến trên $\left(0;\frac{1}{4}\right]$.

Do đó $f(t)\le f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{\sqrt{5}}{3}+\frac{7}{30}$.

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng $\frac{\sqrt{5}}{3}+\frac{7}{30}$ đạt tại $x=\frac{1}{2},y=2$.

2) Kỹ thuật giảm biến với bất đẳng thức và bài toán cực trị ba biến

Ta thường đặt $a=x.b;b=y.c$.

Ví dụ 1. (Bất đẳng thức Schur) Cho a,b,c là các số thực không âm ta luôn có

$$a^3+b^3+c^3+3abc\ge ab\left(a+b\right)+bc\left(b+c\right)+ca\left(c+a\right).$$

Chứng minh.

Không mất tính tổng quát giả sử $a\ge b\ge c$ khi đó tồn tại hai số thực không âm x,y sao cho $a=\left(x+1\right)c,b=\left(y+1\right)c$ và bất đẳng thức tương đương với:

$$\left(x+1\right)^3+\left(y+1\right)^3+1+3\left(x+1\right)\left(y+1\right)\ge\left(x+1\right)\left(y+1\right)\left(x+y+2\right)+\left(x+1\right)\left(x+2\right)+\left(y+1\right)\left(y+2\right)$$

$\Leftrightarrow\left(x-y\right)^2\left(x+y+1\right)\ge0$ (luôn đúng).

Ví dụ 2. Cho x,y,z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $z\left(x+y\right)=xy$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{x^2+y^2}{z^2}+\frac{z}{x+y}$.

Lời giải

Đặt $x=a.z,y=b.z$ ta có $a+b=ab$.

Khi đó

$$P=a^2+b^2+\frac{1}{a+b}=\left(a+b\right)^2-2ab+\frac{1}{a+b}=\left(a+b\right)^2-2\left(a+b\right)+\frac{1}{a+b}.$$

Mặt khác $\left(a+b\right)^2 \ge 4ab \Rightarrow \left(a+b\right)^2 \ge 4\left(a+b\right) \Leftrightarrow a+b \ge 4$.

Đặt $t = a+b, \left(t \ge 4\right)$ khi đó $P = f(t) = t^2 - 2t + \frac{1}{t}$.

Xét hàm số $f(t) = t^2 - 2t + \frac{1}{t}$ với $t \ge 4$ ta có $f'(t) = \frac{t^3 - 2t^2 - 1}{t^2} > 0, \forall t \ge 4$ nên

f(t) là hàm đồng biến trên $\left[4;+\infty\right)$ suy ra $P = f(t) \ge f(4) = \frac{33}{4}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\frac{33}{4}$ đạt tại $x = y = 2z$.

<u>Cách 2:</u> Từ giải thiết suy ra $\frac{xy}{z^2} = \frac{x+y}{z}$.

Khi đó $P = \left(\frac{x+y}{z}\right)^2 - 2\left(\frac{x+y}{z}\right) + \frac{z}{x+y}$.

Đặt $t = \frac{x+y}{z} \Rightarrow t = \frac{xy}{z^2} \le \left(\frac{x+y}{2z}\right)^2 = \frac{t^2}{4} \Rightarrow t \ge 4$.

Khi đó $P = f(t) = t^2 - 2t + \frac{1}{t}$.

Xét hàm số $f(t) = t^2 - 2t + \frac{1}{t}$ với $t \ge 4$ ta có $f'(t) = \frac{t^3 - 2t^2 - 1}{t^2} > 0, \forall t \ge 4$ nên

f(t) là hàm đồng biến trên $\left[4;+\infty\right)$ suy ra $P = f(t) \ge f(4) = \frac{33}{4}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\frac{33}{4}$ đạt tại $x = y = 2z$.

Ví dụ 3. Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \ge \frac{a+b}{b+c} + \frac{b+c}{a+b} + 1.$$

Lời giải

Đặt $a = x.b; c = y.b \ \left(x, y > 0\right)$ khi đó $\frac{a+b}{b+c} = \frac{x+1}{y+1}; \frac{b+c}{a+b} = \frac{y+1}{x+1}$.

Bất đẳng thức trở thành: $x + \frac{1}{y} + \frac{y}{x} \ge \frac{x+1}{y+1} + \frac{y+1}{x+1} + 1$

$\Leftrightarrow x^3y^2+x^2+x+y^3+y^2 \ge x^2y+2xy^2+2xy$.

Bất đẳng thức cuối đúng vì là tổng của ba bất đẳng

$\frac{x^3y^2+x}{2} \ge x^2y; \frac{x^3y^2+x+y^3+y^3}{2} \ge 2xy^2; x^2+y^2 \ge 2xy$.

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Ví dụ 4. Cho x,y,z là các số thực thuộc đoạn $[1;2]$.

Tìm giá trị giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\left(\frac{x^2+z^2+4xz}{x^2+z^2}\right)^3+\left(\frac{y^2+2yz-5z^2}{yz-4z^2}\right)^3-\sqrt{3x-x^2}.$$

Lời giải

Đặt $x=a.z; y=b.z; a,b \in \left[\frac{1}{2};2\right]$.

Khi đó $P=\left(\frac{a^2+4a+1}{a^2+1}\right)^3+\left(\frac{b^2+2b-5}{b-4}\right)^3-\sqrt{3x-x^2}$.

Xét hàm số

$f(a)=\frac{a^2+4a+1}{a^2+1}; g(b)=\frac{b^2+2b-5}{b-4}$ trên đoạn $\left[\frac{1}{2};2\right]$

và $h(x)=-\sqrt{3x-x^2}$ trên đoạn $[1;2]$ ta có

$f'(a)=-\frac{4(a^2-1)}{(a^2+1)^2}; f'(a)=0 \Leftrightarrow a=1 \in \left[\frac{1}{2};2\right]$.

Suy ra $\max f(a)=f(1)=3; \min f(a)=f(2)=f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{13}{5}$.

$g'(b)=\frac{b^2-8b-3}{(b-4)^2}<0, \forall b \in \left[\frac{1}{2};2\right]$

$\Rightarrow \max g(b)=g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{15}{14}; \min g(b)=g(2)=-\frac{3}{2}$

$h'(x)=-\frac{3-2x}{2\sqrt{3x-x^2}}; h'(x)=0 \Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$

$\Rightarrow \max h(x)=h(1)=h(2)-\sqrt{2}; \min h(x)=h\left(\frac{3}{2}\right)=-\frac{3}{2}$

Do vậy $P = (f(a))^3 + (g(b))^3 + h(x)$.

Vì vậy $P_{\max} = \left(\max f(a)\right)^3 + \left(\max g(b)\right)^3 + \max h(x) = 3^3 + \left(\frac{15}{14}\right)^3 - \sqrt{2}$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} a = 1 \\ b = \frac{1}{2} \\ \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = \frac{1}{2}z \\ \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ z = 2 \end{cases}$.

Ví dụ 5. Cho 3 số thực dương a,b,c thõa mãn điều kiện $\sqrt{a-c} + \sqrt{b-c} = \sqrt{\frac{ab}{c}}$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + \frac{c^2}{a^2+b^2}$.

Lời giải

Đặt $a = x.c, b = y.c, \left(x, y \geq 1\right)$ khi đó theo giả thiết ta có:

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} = \sqrt{xy} \Leftrightarrow (\sqrt{(x-1)(y-1)} - 1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow xy = x + y \geq 2\sqrt{xy} \Rightarrow xy \geq 4$$

Ta viết lại biểu thức P dưới dạng: $P = \frac{x}{y+1} + \frac{y}{x+1} + \frac{1}{x+y} + \frac{1}{x^2+y^2}$.

Sử dụng bất đẳng thức C-S ta có:

$$P = \frac{x^2}{xy+x} + \frac{y^2}{xy+y} + \frac{1}{x+y} + \frac{1}{(x+y)^2 - 2xy}$$

$$\geq \frac{(x+y)^2}{2xy+x+y} + \frac{1}{xy} + \frac{1}{x^2y^2 - 2xy}$$

$$= \frac{x^2y^2}{3xy} + \frac{1}{xy} + \frac{1}{x^2y^2 - 2xy}$$

$$= \frac{xy}{3} + \frac{1}{xy} + \frac{1}{x^2y^2 - 2xy}$$

Đặt $t = xy, \left(t \geq 4\right) \Rightarrow P \geq f(t) = \frac{t}{3} + \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2 - 2t}$.

Xét hàm số $f(t)=\frac{t}{3}+\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2-2t}$ trên $\left[4;+\infty\right)$ ta có:

$$f'(t)=\frac{t^2\left(t^2-4t+1\right)+6\left(t-1\right)}{6t^2\left(t-2\right)^2}>0,\forall t\geq 4.$$

Vì vậy f(t) đồng biến với $t\geq 4\Rightarrow P\geq f(t)=f(4)=\frac{41}{24}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\frac{41}{24}$ đạt tại $x=y=2$.

Ví dụ 6. Cho *a,b,c* là các số thực thỏa mãn điều kiện $a\geq b\geq c>0$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{\left(3ab+bc\right)^2}{b^4}+\frac{121b^2}{a^2+b^2+c^2+8ac}$.

Lời giải

Đặt $x=\frac{a}{b},y=\frac{c}{b},\left(x\geq 1\geq y>0\right)$ khi đó:

$$P=\left(3x+y\right)^2+\frac{121}{x^2+y^2+8xy+1}$$
$$=9x^2+6xy+y^2+\frac{121}{x^2+y^2+8xy+1}$$
$$\geq x^2+8xy+y^2+6+\frac{121}{x^2+y^2+8xy+1}$$

Đặt $t=x^2+8xy+y^2+1\Rightarrow P\geq f(t)=t+\frac{121}{t}+5$.

Ta có: $f'(t)=1-\frac{121}{t^2};f'(t)=0\Leftrightarrow t=11$.

Ta có f'(t) đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua $t=11$ nên f(t) đạt cực tiểu tại $t=11$ hay $P\geq f(t)\geq f(11)=27$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 27 đạt tại $a=b=c$.

Ví dụ 7. Cho *x,y,z* là các số thực dương thỏa mãn điều kiện

$$7\left(x^2+y^2+z^2\right)=11\left(xy+yz+zx\right).$$

Chứng minh rằng $\frac{51}{28}\leq\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}\leq 2$.

Lời giải

Đặt $P=\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}$ khi đó

$$P+3=\frac{x}{y+z}+1+\frac{y}{z+x}+1+\frac{z}{x+y}+1$$

$$=\frac{x+y+z}{y+z}+\frac{x+y+z}{z+x}+\frac{x+y+z}{x+y}=(x+y+z)\left(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}\right)$$

$$=\frac{(x+y+z)\left[(x+y)(x+z)+(y+z)(y+x)+(z+x)(z+y)\right]}{(x+y)(y+z)(z+x)}$$

$$=\frac{(x+y+z)\left[(x+y+z)^2+xy+yz+zx\right]}{(x+y)(y+z)(z+x)}$$

Theo giả thiết ta có: $7(x+y+z)^2=25(xy+yz+zx)$. Suy ra

$$P+3=\frac{(x+y+z)\left[(x+y+z)^2+\frac{7}{25}(x+y+z)^2\right]}{(x+y)(y+z)(z+x)}=\frac{32}{25}\frac{(x+y+z)^3}{(x+y)(y+z)(z+x)}$$

Do đó $\frac{32}{25}.\frac{1}{P+3}=\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{(x+y+z)^3}$.

Đặt $a=\frac{x}{x+y+z},b=\frac{y}{x+y+z},c=\frac{z}{x+y+z}\Rightarrow\begin{cases}a+b+c=1\\ ab+bc+ca=\frac{7}{25}\end{cases}$.

$$\frac{32}{25}.\frac{1}{P+3}=(a+b)(b+c)(c+a)=(1-a)(1-b)(1-c)$$

$$=1-(a+b+c)+ab+bc+ca-abc$$

$$=1-1+\frac{7}{25}-abc=\frac{7}{25}-abc$$

Vậy để tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của P ta tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $Q=abc$.

Ta có

$$Q=a\left(\frac{7}{25}-ab-ac\right)=a\left[\frac{7}{25}-a(b+c)\right]=a\left[\frac{7}{25}-a(1-a)\right]=a^3-a^2+\frac{7}{25}a$$

Ta có:

$$\begin{cases} b+c=1-a \\ bc=a^2-a-\dfrac{7}{25} \end{cases};(b+c)^2 \ge 4bc \Leftrightarrow (1-a)^2 \ge 4\left(a^2-a+\dfrac{7}{25}\right) \Leftrightarrow \dfrac{1}{15} \le a \le \dfrac{3}{5}.$$

Xét hàm số $f(a)=a^3-a^2+\dfrac{7}{25}a$ trên đoạn $\left[\dfrac{1}{15};\dfrac{3}{5}\right]$ ta có:

$$f'(a)=3a^2-2a+\frac{7}{25};\ f'(a)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=\dfrac{1}{5} \\ a=\dfrac{7}{15} \end{array}\right..$$

Ta có $f\left(\dfrac{1}{15}\right)=f\left(\dfrac{7}{15}\right)=\dfrac{49}{3375};\ f\left(\dfrac{3}{5}\right)=f\left(\dfrac{1}{5}\right)=\dfrac{3}{125}$.

Suy ra $Q_{\max}=\dfrac{3}{125};Q_{\min}=\dfrac{49}{3375} \Rightarrow P_{\max}=2;P_{\min}=\dfrac{51}{28}$.

3) Một đánh giá hay sử dụng

Với điều kiện các số thực a,b,c không âm ta các bất đẳng thức thường đạt điểm rơi tại một biến bằng 0 nên ta thường giả sử $c=\min\{a,b,c\}$ và tìm cách đánh giá đưa bất đẳng thức về hai biến.

Ta có các ước lượng hay sử dụng:

$$a^2+c^2 \le \left(a+\frac{c}{2}\right)^2;b^2+c^2 \le \left(b+\frac{c}{2}\right)^2;a^2+b^2 \le \left(a+\frac{c}{2}\right)^2+\left(b+\frac{c}{2}\right)^2;$$

$$a^2+b^2+c^2 \le \left(a+\frac{c}{2}\right)^2+\left(b+\frac{c}{2}\right)^2$$

$$ab+bc+ca \ge \left(a+\frac{c}{2}\right)\left(b+\frac{c}{2}\right)$$

$$a^2-ac+c^2=a^2+c(c-a) \le a^2 \le \left(a+\frac{c}{2}\right)^2;$$

$$b^2-bc+c^2=b^2+c(c-b) \le b^2 \le \left(b+\frac{c}{2}\right)^2;$$

$$a^2-ab+b^2 \le \left(a+\frac{c}{2}\right)^2-\left(a+\frac{c}{2}\right)\left(b+\frac{c}{2}\right)+\left(b+\frac{c}{2}\right)^2$$

Ví dụ 1. Cho a,b,c là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $a+b+c=3$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\left(a^2-ab+b^2\right)\left(b^2-bc+c^2\right)\left(c^2-ca+a^2\right)$.

Lời giải

Giả sử $c=\min\left\{a,b,c\right\}$ ta có:

$b^2-bc+c^2=b^2+c\left(c-b\right)\le b^2;$

$a^2-ac+c^2=a^2+c\left(c-a\right)\le a^2$

Suy ra

$P\le a^2b^2\left(a^2-ab+b^2\right)$

$$\Rightarrow \frac{P}{3^6}\le \frac{a^2b^2\left(a^2-ab+b^2\right)}{\left(a+b+c\right)^6}\le \frac{a^2b^2\left(a^2-ab+b^2\right)}{\left(a+b\right)^6}=\frac{\frac{a}{b}-1+\frac{b}{a}}{\left(\frac{a}{b}+2+\frac{b}{a}\right)^3}$$

Đặt $t=\frac{a}{b}+\frac{b}{a},\left(t\ge 2\right)\Rightarrow P\le f(t)=3^6.\frac{t-1}{\left(t+2\right)^3}$.

Xét hàm số $f(t)=3^6.\frac{t-1}{\left(t+2\right)^3}$ với $t\ge 2$ ta có:

$f'(t)=3^6.\frac{5-2t}{\left(t+2\right)^4};f'(t)=0\Leftrightarrow t=\frac{5}{2}$.

Ta có f'(t) đổi dấu từ dương sang âm khi đi qua $t=\frac{5}{2}$ nên f(t) đạt cực đại tại $t=\frac{5}{2}$ hay $P\le f(t)\le f\left(\frac{5}{2}\right)=12$.

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng 12 đạt tại $a=2,b=1,c=0$ hoặc các hoán vị.

<u>Cách 2:</u> Thực hiện đánh giá như trên và sử dụng AM-GM ta có:

$$P\le a^2b^2\left(a^2-ab+b^2\right)=\frac{4}{9}.\frac{3}{2}ab.\frac{3}{2}ab\left(a^2-ab+b^2\right)\le \frac{4}{9}\left(\frac{\frac{3}{2}ab+\frac{3}{2}ab+a^2-ab+b^2}{3}\right)^3$$

$$=\frac{4}{9}.\frac{\left(a+b\right)^6}{27}\le \frac{4\left(a+b+c\right)^6}{9.27}=12$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$a+b+c=3, c=0, \frac{3}{2}ab=a^2-ab+b^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=2, b=1, c=0 \\ a=1, b=2, c=0 \end{array}\right.$$

<u>Cách 3:</u> Giả sử $c=\min\left\{a,b,c\right\}$ khi đó ta có:

$$a^2-ac+c^2=a^2+c\left(c-a\right)\le a^2\le\left(a+\frac{c}{2}\right)^2;$$

$$b^2-bc+c^2=b^2+c\left(c-b\right)\le b^2\le\left(b+\frac{c}{2}\right)^2;$$

$$a^2-ab+b^2\le\left(a+\frac{c}{2}\right)^2-\left(a+\frac{c}{2}\right)\left(b+\frac{c}{2}\right)+\left(b+\frac{c}{2}\right)^2$$

Đặt $x=a+\frac{c}{2}, y=b+\frac{c}{2}, \left(x,y\ge 0\right)\Rightarrow x+y=a+b+c=3$ khi đó:

$$P\le x^2y^2\left(x^2-xy+y^2\right)=x^2\left(3-x\right)^2\left(x^2-x\left(3-x\right)+\left(3-x\right)^2\right)$$

$$=3x^6-27x^5+90x^4-135x^3+81x^2\le 12$$

Ví dụ 2. Cho a,b,c là các số thực không âm không có hai số nào đồng thời bằng 0 thỏa mãn $a+b+c=2$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{1}{\sqrt[4]{a^2+b^2}}+\frac{1}{\sqrt[4]{b^2+c^2}}+\frac{1}{\sqrt[4]{a^2+c^2}}$.

Lời giải

Không mất tính tổng quát giả sử $c=\min\left\{a,b,c\right\}$ khi đó ta có:

$$a^2+b^2\le\left(a+\frac{c}{2}\right)^2+\left(b+\frac{c}{2}\right)^2;$$

$$b^2+c^2\le\left(b+\frac{c}{2}\right)^2;$$

$$a^2+c^2\le\left(a+\frac{c}{2}\right)^2$$

Khi đó $P\ge\frac{1}{\sqrt{a+\frac{c}{2}}}+\frac{1}{\sqrt{b+\frac{c}{2}}}+\frac{1}{\sqrt[4]{\left(a+\frac{c}{2}\right)^2+\left(b+\frac{c}{2}\right)^2}}$

Đặt $x = a + \frac{c}{2}, y = b + \frac{c}{2}, (x, y > 0) \Rightarrow x + y = a + b + c = 2$.

Theo bất đẳng thức AM-GM ta có: $xy \le \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = 1$ và

$$P \ge \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt[4]{x^2+y^2}} \ge \frac{2}{\sqrt[4]{xy}} + \frac{1}{\sqrt[4]{x^2+y^2}} = \frac{1}{\sqrt[4]{2xy}} + \frac{1}{\sqrt[4]{x^2+y^2}} + \left(2 - \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right).\frac{1}{\sqrt[4]{xy}}$$

$$\ge \frac{2}{\sqrt[8]{2xy\left(x^2+y^2\right)}} + 2 - \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \ge \frac{2}{\sqrt[8]{\left(\frac{2xy+x^2+y^2}{2}\right)^2}} + 2 - \frac{1}{\sqrt[4]{2}} = 2 + \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = y = 1 \Rightarrow a = b = 1, c = 0$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $2 + \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$ đạt tại $a = b = 1, c = 0$ hoặc các hoán vị.

B. BÀI TẬP CHỌN LỌC

Bài 1. ***(TSĐH Khối A, A1 2013)*** Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn điều kiện $(a+c)(b+c) = 4c^2$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{32a^3}{(b+3c)^3} + \frac{32b^3}{(a+3c)^3} - \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{c}$.

Lời giải

Đặt $a = cx, b = cy, (x, y > 0)$ từ điều kiện bài toán ta có:

$(x+1)(y+1) = 4 \Leftrightarrow xy + x + y = 3$.

Ta có: $P = \frac{32x^3}{(y+3)^3} + \frac{32y^3}{(x+3)^3} - \sqrt{x^2+y^2}$.

Trước tiên ta chứng minh bất đẳng thức quen thuộc sau đây:

Với mọi a,b dương ta luôn có $a^3 + b^3 \ge \frac{1}{4}(a+b)^3$.

Thật vậy bất đẳng thức tương đương với: $4(a+b)\left(a^2 - ab + b^2\right) \ge (a+b)^3$.

$\Leftrightarrow 4\left(a^2 - ab + b^2\right) \ge a^2 + 2ab + b^2 \Leftrightarrow 3(a-b)^2 \ge 0$.

Bất đẳng thức luôn đung và bài toán phụ được chứng minh.

Áp dụng ta có:

$$\frac{32x^3}{(y+3)^3}+\frac{32y^3}{(x+3)^3}\ge 8\left(\frac{x}{y+3}+\frac{y}{x+3}\right)^3=8\left(\frac{x^2+y^2+3x+3y}{xy+3x+3y+9}\right)^3.$$

$$=8\left[\frac{(x+y)^2+3(x+y)-2xy}{xy+3(x+y)+9}\right]^3$$

Thay $xy=3-x-y$ vào biểu thức trên ta được:

$$\frac{32x^3}{(y+3)^3}+\frac{32y^3}{(x+3)^3}\ge 8\left[\frac{(x+y)^2-2(3-x-y)+3(x+y)}{3-x-y+3(x+y)+9}\right]^3=(x+y-1)^3.$$

Do đó

$$P\ge (x+y-1)^3-\sqrt{x^2+y^2}=(x+y-1)^3-\sqrt{(x+y)^2-2xy}$$

$$=(x+y-1)^3-\sqrt{(x+y)^2-2(3-x-y)}$$

$$=(x+y-1)^3-\sqrt{(x+y)^2+2(x+y)-6}$$

Đặt $t=x+y$ ta có $P\ge (t-1)^3-\sqrt{t^2+2t-6}$ và

$$3-x-y=xy\le\left(\frac{x+y}{2}\right)^2\Rightarrow 3-t\le\frac{t^2}{4}\Leftrightarrow (t-2)(t+6)\ge 0\Leftrightarrow t\ge 2.$$

Xét hàm số $f(t)=(t-1)^3-\sqrt{t^2+2t-6}$ với $t\ge 2$ ta được:

$$f'(t)=3(t-1)^2-\frac{t+1}{\sqrt{t^2+2t-6}}=\frac{3\sqrt{t^2+2t-6}\,(t-1)^2-t-1}{\sqrt{t^2+2t-6}}$$

$$\ge\frac{3\sqrt{2}\,(t-1)^2-t-1}{\sqrt{t^2+2t-6}}>\frac{4(t-1)^2-t-1}{\sqrt{t^2+2t-6}}=\frac{4t^2-9t+3}{\sqrt{t^2+2t-6}}>0,\forall t\ge 2$$

Vậy f(t) là hàm đồng biến trên $[2;+\infty)$ do đó

$$f(t)\ge f(2)=1-\sqrt{2}\Rightarrow P\ge 1-\sqrt{2}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $1-\sqrt{2}$ đạt tại $a=b=c$.

Bài 2. Cho a,b,c là các số thực dương đôi một phân biệt thỏa mãn $b \le 8a \le 4c$ và $ab + bc = 2c^2$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{a}{a-b} + \frac{b}{b-c} + \frac{c}{c-a}.$$

Lời giải

Đặt $a = x.c, b = y.c, \left(0 < \frac{1}{8}y \le x \le \frac{1}{2}\right)$ và $xy + y = 2 \Leftrightarrow y = \frac{2}{x+1}$.

Khi đó

$$P = \frac{x}{x-y} + \frac{y}{y-1} + \frac{1}{1-x} = \frac{x}{x - \frac{2}{x+1}} + \frac{\frac{2}{x+1}}{\frac{2}{x+1} - 1} + \frac{1}{1-x}$$

$$= \frac{x^2 + x}{x^2 + x - 2} + \frac{3}{1-x} = \frac{x^2 + x - 3(x+2)}{x^2 + x - 2} = \frac{x^2 - 2x - 6}{x^2 + x - 2}$$

Ta có $\frac{1}{8}y \le x \le \frac{1}{2} \Rightarrow x \in \left[\frac{-1+\sqrt{2}}{2}; \frac{1}{2}\right]$

Xét hàm số $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 6}{x^2 + x - 2}$ liên tục trên $\left[\frac{-1+\sqrt{2}}{2}; \frac{1}{2}\right]$ ta có

$$f'(x) = \frac{3x^2 + 8x + 10}{\left(x^2 + x - 2\right)^2} > 0, \forall x \in \left[\frac{-1+\sqrt{2}}{2}; \frac{1}{2}\right]$$

suy ra f(x) là hàm đồng biến trên $\left[\frac{-1+\sqrt{2}}{2}; \frac{1}{2}\right]$

Suy ra $f\left(\frac{-1+\sqrt{2}}{2}\right) \le f(x) \le f\left(\frac{1}{2}\right)$ hay $\frac{17+6\sqrt{2}}{7} \le P \le \frac{27}{5}$.

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng $\frac{27}{5}$ đạt tại $b = 2a, c = \frac{8}{3}a$ và giá trị nhỏ nhất của P bằng $\frac{17+6\sqrt{2}}{7}$ đạt tại $a = \frac{-1+\sqrt{2}}{2}c, b = 4\left(\sqrt{2} - 1\right)c$.

Bài 3. Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a^3+b^3=c^3$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{(c-a)(c-b)}$.

Lời giải

Nhận xét. Điều kiện đề bài cho đồng bậc 3 và biểu thức P bậc 0 nên ta đặt $a=xc, b=yc, (x,y>0)$.

Khi đó $x^3+y^3=1$ và $P=\dfrac{x^2+y^2-1}{(1-x)(1-y)}=\dfrac{(x+y)^2-2xy-1}{xy-(x+y)+1}$.

Xuất phát từ $1=x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)\Rightarrow xy=\dfrac{(x+y)^3-1}{3(x+y)}$.

Đặt $t=x+y$ ta có $t>1$ và $(x+y)^2\ge 4xy\Rightarrow t^2\ge 4.\dfrac{t^3-1}{3t}\Leftrightarrow 1<t\le\sqrt[3]{4}$.

Ta có $P=\dfrac{t+2}{t-1}$ dễ thấy đây là hàm nghịch biến với $1<t\le\sqrt[3]{4}$ suy ra $P\ge\dfrac{\sqrt[3]{4}+2}{\sqrt[3]{4}-1}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\dfrac{\sqrt[3]{4}+2}{\sqrt[3]{4}-1}$ đạt tại $a=b, c=a\sqrt[3]{2}$.

Bài 4. Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a\ge b\ge c$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M=\dfrac{(a^2+c^2)\sqrt{ab+bc+ca}}{ac(a+b+c)}$.

Lời giải

Nhận xét. Điều kiện cho $a\ge b\ge c\Rightarrow(b-a)(b-c)\le 0$ và M bậc 0 nên đặt $a=x.b, c=y.b, (x\ge 1, 0<y\le 1)$ và

$$(1-x)(1-y)\le 0\Leftrightarrow xy-x-y+1\le 0\Rightarrow x+y\ge 1+xy.$$

Khi đó: $M=\dfrac{(x^2+y^2)\sqrt{x+y+xy}}{xy(x+y+1)}$.

Đây là biểu thức đối xứng với tổng $x+y$ và tích xy nên suy nghĩ ngay đến việc đặt $S=x+y, P=xy$ từ điều kiện ta có ngay $0<P\le S-1$.

Ta có: $M=\dfrac{\left(S^2-2P\right)\sqrt{S+P}}{P\left(S+1\right)}$.

Coi vế phải là hàm số với P và tham số S ta được:

$$f'(P)=-\frac{2S^3+S^2P+2P^2}{2\left(S+1\right)P^2\sqrt{S+P}}<0,\forall S,P>0$$

do đó f(P) là hàm nghịch biến trên $\left(0;S-1\right]$.

Do đó $f(P)\ge f\left(S-1\right)=\dfrac{\left(S^2-2S+2\right)\sqrt{2S-1}}{S^2-1}$.

Xét hàm số $g(S)=\dfrac{\left(S^2-2S+2\right)\sqrt{2S-1}}{S^2-1}$ trên $\left(1;+\infty\right)$ ta được:

$$g'(S)=\frac{S^4+2S^3-13S^2+12S-4}{\sqrt{2S-1}\left(S^2-1\right)^2}=\frac{\left(S-2\right)\left(S^3+4S^2-5S+2\right)}{\sqrt{2S-1}\left(S^2-1\right)^2};$$

$$g'(S)=0\xleftrightarrow{S>1}S=2$$

Ta có g'(S) đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua $S=2$ nên g(S) đạt cực tiểu tại $S=2$ trên $\left(1;+\infty\right)$ hay $g(S)\ge g(2)=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của M bằng $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ đạt tại $a=b=c$.

Bình luận. Ngoài lời giải trên ta có thể xét hàm số trực tiếp bằng cách coi b là ẩn và a,c là tham số ta có kết quả tương tự hoặc chứng minh

$\dfrac{b^2+2ac}{\left(a+b+c\right)^2}\ge\dfrac{4ac}{3\left(a+c\right)^2}$. Khi đó $M\ge\dfrac{\left(a+c\right)^2\sqrt{b^2+2ac}}{ac\left(a+b+c\right)}\ge\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

Nhưng rõ ràng với dấu hiệu đẳng cấp từ điều kiện cho đến biểu thức M việc sử dụng kỹ thuật giảm về hai biến x,y tỏ ra hiệu quả. Đây là một bài toán hay đòi hỏi phải tư duy logic khi gặp tổng và tích đối xứng của $S=x+y, P=xy$.

Bài 5. Cho a,b,c là các số thực dương thay đổi thỏa mãn điều kiện $\left(a+b+c\right)^3=32abc$.

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{a^4+b^4+c^4}{(a+b+c)^4}$.

Lời giải

Theo giả thiết ta có: $\frac{a}{a+b+c}.\frac{b}{a+b+c}.\frac{c}{a+b+c}=\frac{1}{32}$.

Đặt $x=\frac{a}{a+b+c},y=\frac{b}{a+b+c},z=\frac{c}{a+b+c},x,y,z>0$ và $xyz=\frac{1}{32},x+y+z=1$.

Khi đó $P=x^4+y^4+z^4$ và ta có:

$$P=\left(x^2+y^2+z^2\right)^2-2\left(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2\right)$$
$$=\left[(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)\right]^2-2\left[(xy+yz+zx)^2-2xyz(x+y+z)\right]$$
$$=\left[1-2(xy+yz+zx)\right]^2-2\left[(xy+yz+zx)^2-\frac{1}{16}\right]$$
$$=2(xy+yz+zx)^2-4(xy+yz+zx)+\frac{9}{8}$$

Đặt $t=xy+yz+zx$ ta có $P=2t^2-4t+\frac{9}{8}$.

Ta có: $t=x(y+z)+yz=x(1-x)+\frac{1}{32x}=-x^2+x+\frac{1}{32x}$.

Mặt khác:

$$(y+z)^2\ge 4yz\Rightarrow(1-x)^2\ge\frac{4}{32x}\Leftrightarrow(2x-1)\left(4x^2-6x+1\right)\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\frac{3-\sqrt{5}}{4}\le x\le\frac{1}{2}\\ x\ge\frac{3+\sqrt{5}}{4}\end{array}\right..$$

Xét hàm số $f(x)=-x^2+x+\frac{1}{32x}$ trên $\left[\frac{3-\sqrt{5}}{4};\frac{1}{2}\right]\cup\left[\frac{3+\sqrt{5}}{4};+\infty\right)$ ta được:

$$f'(x)=-2x+1-\frac{1}{32x^2};f'(x)=0\xleftrightarrow{x\in\left[\frac{3-\sqrt{5}}{4};\frac{1}{2}\right]\cup\left[\frac{3+\sqrt{5}}{4};+\infty\right)}\left[\begin{array}{l}x=\frac{1}{4}\\ x=\frac{1+\sqrt{5}}{8}\end{array}\right..$$

Ta có:

$$f\left(\frac{3-\sqrt{5}}{4}\right)=f\left(\frac{1+\sqrt{5}}{8}\right)=\frac{5\sqrt{5}-1}{32},f\left(\frac{1}{4}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{16},f\left(\frac{3+\sqrt{5}}{4}\right)=-\frac{5\sqrt{5}+1}{32}.$$

Suy ra $\frac{5}{16}\le t\le\frac{5\sqrt{5}-1}{32}$. Xét hàm số $g(t)=2t^2-4t+\frac{9}{8}$ trên $\left[\frac{5}{16};\frac{5\sqrt{5}-1}{32}\right]$

Ta có: $g'(t)=4t-4<0,\forall t\in\left[\frac{5}{16};\frac{5\sqrt{5}-1}{32}\right]$.

Suy ra $g\left(\frac{5}{16}\right)\ge g(t)\ge g\left(\frac{5\sqrt{5}-1}{32}\right)$ hay ta có $\frac{383-165\sqrt{5}}{256}\le P\le\frac{9}{128}$.

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng $\frac{9}{128}$ đạt tại $a=2,b=c=1$ hoặc các hoán vị và giá trị nhỏ nhất của P bằng $\frac{383-165\sqrt{5}}{256}$ đạt tại $a=3-\sqrt{5},b=c=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Bài 6. Cho a,b,c là các số thực thỏa mãn điều kiện $a\ge b\ge c\ge 0$ và $2b+2c-a>0$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=2\left(\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}}\right)-\sqrt{\frac{2b+2c-a}{a}}$.

Lời giải

TH1: Nếu $c=0\Rightarrow P=2\sqrt{\frac{b}{a}}-\sqrt{\frac{2b-a}{a}}$.

Đặt $t=\sqrt{\frac{b}{a}},\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\le t\le 1\right)$ khi đó $P=f(t)=2t-\sqrt{2t^2-1}$.

Xét hàm số $f(t)=2t-\sqrt{2t^2-1}$ liên tục trên $\left[\frac{1}{\sqrt{2}};1\right]$ ta có

$$f'(t)=2-\frac{2t}{\sqrt{2t^2-1}}=\frac{2\left(\sqrt{2t^2-1}-t\right)}{\sqrt{2t^2-1}}=\frac{2\left(t^2-1\right)}{\sqrt{2t^2-1}\left(\sqrt{2t^2-1}+t\right)}\le 0,\forall t\in\left(\frac{1}{\sqrt{2}};1\right].$$

Do đó f(t) là hàm nghịch biến trên $\left[\frac{1}{\sqrt{2}};1\right]$, suy ra $P=f(t)\ge f(1)=1$.

Trường hợp này giá trị nhỏ nhất của P bằng 1 đạt tại $a=b, c=0$.

TH2: Nếu $c>0 \Rightarrow a \ge b \ge c > 0$ đặt $c = x.a, b = y.a, \left(0 < x, y \le 1\right)$.

Khi đó: $P = 2\left(\sqrt{\frac{x}{y+1}} + \sqrt{\frac{y}{x+1}}\right) - \sqrt{2x+2y-1}$.

Ta chứng minh $\sqrt{\frac{x}{y+1}} + \sqrt{\frac{y}{x+1}} \ge \sqrt{x+y}$.

Thật vậy bất đẳng thức tương đương với:

$$\sqrt{x^2+x} + \sqrt{y^2+y} \ge \sqrt{(x+y)(x+1)(y+1)}$$

$$\Leftrightarrow x^2+x+y^2+y+2\sqrt{xy(x+1)(y+1)} \ge (x+y)(x+1)(y+1).$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{xy(x+1)(y+1)} \ge xy(x+y+2) \Leftrightarrow 4(xy+x+y+1) \ge xy(x+y+2)^2.$$

Bất đẳng thức luôn đúng do $xy(x+y+2)^2 \le 4xy(x+y+2)$ và

$$xy+x+y+1-xy(x+y+2) = (x+y+1)(1-xy) \ge 0.$$

Vậy $P \ge 2\sqrt{x+y} - \sqrt{2x+2y-1}$

Đặt $t = \sqrt{x+y}, \left(0 < t \le \sqrt{2}\right)$ suy ra $P \ge f(t) = 2t - \sqrt{2t^2-1}$.

Ta có: $f'(t) = 2 - \frac{2t}{\sqrt{2t^2-1}}; f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1$.

Do đó $P \ge f(1) = 1$. Nhưng trường hợp này dấu bằng không xảy ra.

Kết hợp hai trường hợp suy ra giá trị nhỏ nhất của P bằng 1 đạt tại $a=b, c=0$.

Bài 7. (TSĐH Khối A 2009) Chứng minh rằng với mọi số thực dương x,y,z thỏa mãn điều kiện $x(x+y+z) = 3yz$ ta luôn có

$$(x+y)^3 + (x+z)^3 + 3(x+y)(y+z)(z+x) \le 5(y+z)^3.$$

Lời giải

Đặt $y = a.x,\ z = b.x,\ (a, b > 0)$ ta có $a+b+1 = 3ab$.

Ta cần chứng minh $(a+1)^3 + (b+1)^3 + 3(a+1)(b+1)(a+b) \le 5(a+b)^3$.

$$\Leftrightarrow (a+b+2)^3 - 3(a+1)(b+1)(a+b+2) + 3(a+1)(b+1)(a+b) \le 5(a+b)^3.$$

$\Leftrightarrow (a+b+2)^3 - 6(a+1)(b+1) \le 5(a+b)^3$

$\Leftrightarrow (a+b+2)^3 - 6(ab+a+b+1) \le 5(a+b)^3$

Thay $a+b+1=3ab$ vào bất đẳng thức ta cần chứng minh

$(3ab+1)^3 - 6(ab+3ab) \le 5(3ab-1)^3 \Leftrightarrow (3ab-1)(ab-1)(6ab-1) \ge 0$

(luôn đúng)

Do $3ab = a+b+1 \ge 2\sqrt{ab}+1 \Rightarrow (\sqrt{ab}-1)(3\sqrt{ab}+1) \ge 0 \Leftrightarrow ab \ge 1$.

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z$.

Bài tập tương tự

1) Cho a,b là hai số thực và c không âm thỏa mãn điều kiện $a^2+b^2+ab=3c^2$.

Chứng minh rằng $a^3+b^3+4abc \le 6c^3$.

Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện $a^2+2a(b+c)=5bc$.

Chứng minh rằng $(a+b)^3+(a+c)^3+(a+b)(a+c)(b+c) \le 3(b+c)^3$.

Bài 8. Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=6$ và $a^2+b^2+c^2=14$.

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{4a+b}{c}$.

Lời giải

Đặt $a=x.c, b=y.c, (x,y>0)$ theo giả thiết ta có: $\begin{cases} c(x+y+1)=6 \\ c^2(x^2+y^2+1)=14 \end{cases}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)c = 6-c \\ \left[(x+y)c\right]^2 - 2xyc^2 = 14-c^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=\dfrac{6-c}{c} \\ xy=\dfrac{(6-c)^2-(14-c^2)}{2c^2}=\dfrac{c^2-6c+11}{c^2} \end{cases}.$$

Trước hết ta phải có:

$$(x+y)^2 \ge 4xy \Leftrightarrow \left(\frac{6-c}{c}\right)^2 \ge 4.\frac{c^2-6c+11}{c^2} \Leftrightarrow \frac{6-2\sqrt{3}}{3} \le c \le \frac{6+2\sqrt{3}}{3}.$$

Suy ra x,y là hai nghiệm dương của phương trình:

$$t^2-\frac{6-c}{c}t+\frac{c^2-6c+11}{c^2}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} t_1 &= \frac{6-c-\sqrt{-3c^2+12c-8}}{2c} \\ t_2 &= \frac{6-c+\sqrt{-3c^2+12c-8}}{2c} \end{aligned}\right..$$

Ta có: $P = 4x + y$.

Tìm giá trị lớn nhất của P.

Để tìm giá trị lớn nhất của P ta xét với $x = t_2, y = t_1$ vì $t_2 \ge t_1$.

Khi đó

$$P = 4.\frac{6-c+\sqrt{-3c^2+12c-8}}{2c} + \frac{6-c-\sqrt{-3c^2+12c-8}}{2c} = \frac{30-5c+3\sqrt{-3c^2+12c-8}}{2c}.$$

Xét hàm số $f(c) = \frac{30-5c+3\sqrt{-3c^2+12c-8}}{2c}$ liên tục trên đoạn $\left[\frac{6-2\sqrt{3}}{3};\frac{6+2\sqrt{3}}{3}\right]$.

$$f'(c) = -\frac{3\left(5\sqrt{-3c^2+12c-8}+3c-4\right)}{c^2\sqrt{-3c^2+12c-8}}; f'(c) = 0 \Leftrightarrow 5\sqrt{-3c^2+12c-8}+3c-4=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4-3c \ge 0 \\ 25\left(-3c^2+12c-8\right) = \left(4-3c\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow c = \frac{6}{7}.$$

Ta có f'(c) đổi dấu từ dương sang âm khi đi qua $c = \frac{6}{7}$ nên f(c) đạt cực đại tại $c = \frac{6}{7}$ hay $P \le f(c) \le f\left(\frac{6}{7}\right) = \frac{31}{2}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = \frac{19}{7}, b = \frac{17}{7}, c = \frac{6}{7}$.

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng $\frac{31}{2}$ đạt tại $a = \frac{19}{7}, b = \frac{17}{7}, c = \frac{6}{7}$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của P.

Để tìm giá trị nhỏ nhất của P ta xét với $x = t_1, y = t_2$.

Khi đó

$$P = 4.\frac{6-c-\sqrt{-3c^2+12c-8}}{2c} + \frac{6-c+\sqrt{-3c^2+12c-8}}{2c} = \frac{30-5c-3\sqrt{-3c^2+12c-8}}{2c}.$$

Xét hàm số $g(c) = \frac{30-5c-3\sqrt{-3c^2+12c-8}}{2c}$ liên tục trên đoạn $\left[\frac{6-2\sqrt{3}}{3};\frac{6+2\sqrt{3}}{3}\right]$.

$$g'(c) = -\frac{3\left(5\sqrt{-3c^2+12c-8}-3c+4\right)}{c^2\sqrt{-3c^2+12c-8}}; g'(c) = 0 \Leftrightarrow 5\sqrt{-3c^2+12c-8}-3c+4=0.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3c-4\ge 0 \\ 25\left(-3c^2+12c-8\right)=\left(3c-4\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow c=3.$$

Ta có g'(c) đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua $c=3$ nên g(c) đạt cực tiểu tại $c=3$ hay $P\ge g(c)\ge g(3)=2$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=1, b=2, c=3$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 2 đạt tại $a=1, b=2, c=3$.

Bài 9. Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện

$$\left(3a+2b+c\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}\right)=30.$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\dfrac{b+2c-7\sqrt{72a^2+c^2}}{a}$.

Lời giải

Đặt $x=\dfrac{b}{2a}, y=\dfrac{c}{3a}$. Suy ra: $30=\left(4x+3y+3\right)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+1\right)$

$$=x\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+1\right)+3\left(x+y+1\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+1\right)\ge \frac{x\left(y+1\right)}{2y}+28$$

$$\Rightarrow x\le \frac{2y}{y+1}\Rightarrow P=2x+6y-21\sqrt{y^2+8}\le \frac{4y}{y+1}+6y-21\sqrt{y^2+8}\le -55$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $6a=3b=2c$.

<u>Cách 2:</u> Trước tiên ta biến đổi điều kiện bài toán

$$\left(3a+2b+c\right)\left(\frac{1}{6a}+\frac{1}{3b}+\frac{1}{2c}\right)=5$$

$$\Leftrightarrow \left(6a+3b+2c\right)\left(\frac{1}{6a}+\frac{1}{3b}+\frac{1}{2c}\right)+b\left(\frac{1}{6a}+\frac{1}{3b}+\frac{1}{2c}\right)=10$$

$$\Rightarrow b\left(\frac{1}{6a}+\frac{1}{3b}+\frac{1}{2c}\right)\le 1\Rightarrow b\left(\frac{1}{6a}+\frac{1}{2c}\right)\le \frac{2}{3}\Leftrightarrow b\le \frac{4ac}{3a+c}$$

$$\Rightarrow P\le \frac{\frac{4ac}{3a+c}+2c-7\sqrt{72a^2+c^2}}{a}=\frac{4c}{3a+c}+\frac{2c}{a}-7\sqrt{72+\left(\frac{c}{a}\right)^2}$$

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{4t}{3+t}+2t-7\sqrt{t^2+72}\le -55, \left(t=c/a\right)$ ta có

$$f'(t)=2+\frac{4}{t+3}-\frac{4t}{(t+3)^2}-\frac{7t}{\sqrt{t^2+72}}.$$

ĐS: $P_{\max}=-55; 2a=3b=6c$.

Dưới đây tôi trình bày một bài toán tương tự nhưng đi theo một hướng khác

Bài 10. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện

$$(a+5b+3c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{4b}+\frac{1}{3c}\right)=\frac{39}{4}.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{2(a+3c)(a+3c-4b)-7c^2+4c\sqrt{a^2+7c^2}}{2ac}.$$

Lời giải

Theo giả thiết ta có

$$\frac{39}{4}=(a+4b+3c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{4b}+\frac{1}{3c}\right)+b\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{4b}+\frac{1}{3c}\right)\ge 9+b\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{4b}+\frac{1}{3c}\right)$$

$$\Rightarrow 3ac\ge 2b(a+3c)$$

Chú ý AM – GM ta có $(a+4b+3c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{4b}+\frac{1}{3c}\right)\ge 9$.

Khi đó

$$P=\frac{2(a+3c)^2-8b(a+3c)-7c^2+4c\sqrt{a^2+7c^2}}{2ac}$$

$$\ge\frac{2(a+3c)^2-12ac-7c^2+4c\sqrt{a^2+7c^2}}{2ac}=\frac{2a^2+11c^2+4c\sqrt{a^2+7c^2}}{2ac}.$$

$$=\frac{2x^2+11+4\sqrt{x^2+7}}{2x}, x=\frac{a}{c}$$

Xét hàm số $f(x)=\frac{2x^2+11+4\sqrt{x^2+7}}{2x}$ với x dương ta có

$$f'(x)=\frac{(2x^2-11)\sqrt{x^2+7}-28}{2x^2\sqrt{x^2+7}}; f'(x)=0\Leftrightarrow x=3.$$

Ta có f'(x) đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua x=3 nên $f(x)\ge f(3)=\frac{15}{2}$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=4b=3c$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\frac{15}{2}$.

Bài tập tương tự

Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện

$$\left(a+3b+c\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{c}\right)=\frac{21}{2}.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{a^2+\left(a+c\right)\left(a+c-2b\right)+\sqrt{2a^2+2c^2}}{ac}.$$

ĐS: $P_{\min}=5; a=2b=c$.

C. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1. Cho x,y là hai số thực dương. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{4xy^2}{\left(x+\sqrt{x^2+4y^2}\right)^3}.$$

Bài 2. Cho x,y là hai số không âm . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{xy+\sqrt{x^4+9x^2y^2}}{x^2+8y^2}.$$

Bài 3. Cho x,y là hai số thực dương thỏa mãn $xy\le y-1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{y^3}{x^3}+\frac{2x^2}{y^2}$.

Bài 4. Cho a,b,c là các số thực dương thay đổi thỏa mãn

$\left(a+2b\right)\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=4, c\le 3a$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{a^2+2b^2}{ac}.$$

Bài 5. Cho x,y là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\sqrt{\frac{x^3}{x^3+8y^3}}+\sqrt{\frac{4y^3}{y^3+\left(x+y\right)^3}}.$$

Bài 6. Cho a,b,c là các số thực dương thay đổi thỏa mãn

$$\left(a+b+c\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=16.$$

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{a^2+2b^2}{ab}$.

Bài 7. (TSĐH Khối A 2011) Cho các số thực $x, y, z \in [1;4], x \geq y, z \geq z$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x}{2x+3y} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+x}$.

Bài 8. Cho a,b,c là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{bc}{(b+a)(c+a)} - \frac{4abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

Bài 9. Cho các số thực dương thỏa mãn điều kiện $(a+c)(b+c) = 4c^2$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{a}{b+3c} + \frac{b}{a+3c} + \frac{ab}{bc+ca}$.

Bài 10. Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $a \geq 2b$.

Chứng minh: $14\left(a^2+b^2+c^2\right) \geq 5(a+b+c)^2$.

Bài 11. Cho a,b là hai số thực và c không âm thỏa mãn $a^2+b^2+ab = 3c^2$.

Chứng minh rằng $a^3+b^3+4abc \leq 6c^3$.

Bài 12. Cho a,b,c là các số thực dương thay đổi thỏa mãn $(a+b-c)^2 = ab$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{\sqrt{ab}}{a+b} + \frac{c^2}{a^2+b^2} + \left(\frac{c}{a+b-c}\right)^2$.

Bài 13. Cho các số thực không âm a,b,c thỏa mãn $a+b+c > 0$.

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{a^3+b^3+16c^3}{(a+b+c)^3}$.

Bài 14. Cho các số thực a,b,c.

Chứng minh rằng $8a^4+8b^4+27c^4 \geq \frac{27}{64}(a+b+c)^4$.

Bài 15. Cho a,b,c là các số thực thỏa mãn $(a+b+c)^2 = 2\left(a^2+b^2+c^2\right)$ và $a+b+c \neq 0$.

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{a^3+b^3+c^3}{(a+b+c)(ab+bc+ca)}$.

Bài 16. Cho x,y,z là các số thực không âm đôi một phân biệt. Chứng minh rằng

$$\frac{x+y}{(x-y)^2} + \frac{y+z}{(y-z)^2} + \frac{z+x}{(z-x)^2} \geq \frac{9}{x+y+z}.$$

Bài 17. Cho a,b,c là các số thực không âm đôi một phân biệt thỏa mãn $a+b+c = 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}$.

Bài 18. Cho a,b,c là các số thực không âm không có hai số nào đồng thời bằng 0.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=(a+b+c)^2\left(\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{1}{b^2+c^2}+\frac{1}{c^2+a^2}\right).$$

Bài 19. Cho a,b,c là các số thực không âm và không có 2 số nào đồng thời bằng 0.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=(ab+bc+ca)\left(\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{1}{b^2+c^2}+\frac{1}{c^2+a^2}\right).$$

Bài 20. Cho a,b,c là các số thực không âm không có 2 số nào đồng thời bằng 0 thỏa mãn $a+b+c=1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{1}{b^2+c^2}+\frac{1}{c^2+a^2}$.

Bài 21. Cho các số thực $a>0,b,c\ge 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=(ab+bc+ca)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{1}{a^2+b^2+c^2}\right).$$

Bài 22. Cho a,b,c là các số thực không âm và $c<a,c<b$. Chứng minh rằng

$$\left(\frac{a}{b-c}\right)^2+\left(\frac{b}{c-a}\right)^2\ge\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}.$$

Bài 23. Cho x,y,z là các số thực thuộc đoạn $[1;2]$.

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2}{xyz(x+y+z)}$.

Bài 24. Cho a,b,c là các số thực dương.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{4a^3+3b^3+2c^3-3b^2c}{(a+b+c)^3}$

Bài 25. Cho a,b,c là độ dài một tam giác không nhọn. Chứng minh rằng

$$(a^2+b^2+c^2)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\ge 10.$$

Bài 26. Cho x,y,z là các số thực dương thỏa mãn $x^2+y^2+6z^2=4z(x+y)$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{x^3}{y(x+z)^2}+\frac{y^3}{x(y+z)^2}+\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}$.

Bài 27. Cho a,b,c là các số thực thỏa mãn $(a+b+c)^2=4(ab+bc+ca)$ và $a+b+c\neq 0$.

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{a^2b+b^2c+c^2a}{(a+b+c)^3}$.

Bài 28. Cho $a,b\geq 0, c>0$ và thoả mãn điều kiện $a^3+b^3=c(c-1)$.

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{(a+b+c)^2}$.

Bài 29. Cho x,y là các số thực dương thay đổi thỏa mãn $x+2\sqrt{xy}\geq 8y$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=4\left(\dfrac{x^3}{y^3}+\dfrac{y^3}{x^3}\right)-9\left(\dfrac{x^2}{y^2}+\dfrac{y^2}{x^2}\right)$.

Bài 30. Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $0<4a\leq c\leq 9a$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{12a}{a+b}+\dfrac{12b}{b+c}+\dfrac{25c}{c+a}$.

Bài 31. Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $\dfrac{4}{5}b\geq a-c\geq \dfrac{3}{5}b$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\dfrac{12(a-b)}{c}+\dfrac{12(b-c)}{a}+\dfrac{25(c-a)}{b}$.

Bài 32. Cho a,b,c là các số thực không âm thay đổi thỏa mãn $2a^3-(b+c)^3\leq 4abc$.

Chứng minh $\dfrac{7}{16}a^4+3\left(b^4+c^4\right)\geq 2a^2b^2-3b^2c^2+2c^2a^2$.

Bài 33. Cho a,b,c là các số thực dương thay đổi thỏa mãn $ab+bc+ca=3b^2$.

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{a}{b+c}+\frac{c}{a+b}+\frac{abc-(a+c)\left(a^2+c^2\right)}{(a+c)b^2}.$$

Bài 34. Cho a,b,c là các số thực dương thay đổi thỏa mãn

$$(a+c)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)=\frac{10}{b}, c\geq 4b.$$

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{a+c-b}{b}$.

Bài 35. Cho a,b,c là các số thực không âm. Chứng minh rằng

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)^3\geq 27(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2.$$

Bài 36. Cho a,b,c là các số thực không âm thỏa mãn $ab+bc+ca>0$.

Chứng minh rằng $\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{1}{b^2+c^2}+\frac{1}{c^2+a^2}+\frac{11}{a^2+b^2+c^2}\geq\frac{32}{(a+b+c)^2}$.

Bài 37. Cho a,b,c là các số thực không âm đôi một khác nhau thỏa mãn $a+b+c=0$.

Chứng minh rằng $(ab+bc+ca)^2\left[\frac{1}{(a-b)^4}+\frac{1}{(b-c)^4}+\frac{1}{(c-a)^4}\right]\geq\frac{33}{16}$.

Bài 38. Tìm hằng số k tốt nhất sao cho bất đẳng thức sau đúng với mọi số thực không âm a,b,c

$$(a+b+c)^5\geq k\left(a^2+b^2+c^2\right)(a-b)(b-c)(c-a).$$

Bài 39. Cho a,b,c là các số thực đôi một phân biệt. Chứng minh rằng

$$\left(\frac{a-b}{b-c}\right)^2+\left(\frac{b-c}{c-a}\right)^2+\left(\frac{c-a}{a-b}\right)^2\geq 5.$$

Bài 40. Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2+ab+b^2}+\frac{1}{b^2+bc+c^2}+\frac{1}{c^2+ca+a^2}\geq\frac{9}{(a+b+c)^2}$$

Bài 41. (Iran 1996) Cho a,b,c là các số thực không âm. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{1}{(b+c)^2}+\frac{1}{(c+a)^2}\geq\frac{9}{4(ab+bc+ca)}.$$

Bài 42. Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{1}{2c^2}$.

Tìm giá nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

Bài 43. Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$27(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2\right)+45abc\geq 32(a+b+c)(ab+bc+ca).$$

Bài 44. Cho a,b,c là các số thực dương. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{ab}{(a+b)^2}+\frac{bc}{(b+c)^2}+\frac{ca}{(c+a)^2}-\frac{4abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

Bài 45. Cho x,y,z là các số thực không đồng thời bằng 0 thỏa mãn

$$2\left(x^2+y^2+z^2\right)=3(xy+yz+zx).$$

Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của biểu thức $P=\frac{(y-2z)^2}{xy+yz+zx}$.

Bài 46. Cho a,b,c là các số thực thỏa mãn $a^2+b^2+c^2+4ab+4bc+4ca=0$ và $a+b+c\neq 0$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{a^3+b^3+c^3-abc}{\left(a+b+c\right)^3}.$$

Bài 47. Cho a,b,c là các số thực thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=4\left(ab+bc+ca\right)$ và $ab+bc+ca\neq 0$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{\left(a-b\right)\left(b-c\right)\left(c-a\right)\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\right)}{\left(a+b+c\right)^5}.$$

Bài 48. Cho x,y,z là các số thực dương thỏa mãn $5\left(x^2+y^2+z^2\right)=6\left(xy+yz+zx\right)$.

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\left(x+y+z\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right).$$

Bài 49. Cho x,y,z là các số thực không đồng thời bằng 0 và thỏa mãn

$$8\left(x^2+y^2+z^2\right)=11\left(xy+yz+zx\right).$$

Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{x^3+y^3+z^3}{\left(x+y+z\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)}$.

Bài 50. Cho a,b,c là các số thực thỏa mãn $a^2+b^2+c^2>0$.

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{2\left(a+b+c\right)\left(a^2+b^2+c^2\right)-9abc}{\sqrt{\left(a^2+b^2+c^2\right)^3}}.$$

C. HƯỚNG DẪN GIẢI – ĐÁP SỐ

Bài 1. Đặt $x=t.y,\left(t>0\right)$ ta có $P=f\left(t\right)=\dfrac{4t}{\left(t+\sqrt{t^2+4}\right)^3}$ ta có

$$f'(t)=\frac{4\left(\sqrt{t^2+4}-3t\right)}{\sqrt{t^2+4}\left(t+\sqrt{t^2+4}\right)^3};\ f'(t)=0\Leftrightarrow\sqrt{t^2+4}=3t\Leftrightarrow t=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Ta có f'(t) đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua $t=\frac{1}{\sqrt{2}}$ trên khoảng $(0;+\infty)$ nên tại $t=\frac{1}{\sqrt{2}}$ f(t) đạt cực tiểu hay $P=f(t)\geq \mathrm{f}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{8}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\frac{1}{8}$ đạt tại $y=\sqrt{2}x$.

Bài 2. Nếu $x=0\Rightarrow P=0$. Xét $x>0$ ta đặt $y=t.x(t\geq 0)$.

Khi đó $P=f(t)=\dfrac{t+\sqrt{t^4+9t^2}}{t^2+8}$.

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{t+\sqrt{t^4+9t^2}}{t^2+8}$ trên $[0;+\infty)$ ta có

$$f'(t)=\frac{7t^2+72+\left(8-t^2\right)\sqrt{t^2+9}}{\sqrt{t^4+9t^2}\left(t^2+8\right)^2};\ f'(t)=0$$

$$\Leftrightarrow 7t^2+72+\left(8-t^2\right)\sqrt{t^2+9}=0\Leftrightarrow t=6\sqrt{2}$$

Lập bảng biến thiên suy ra $P=f(t)\leq f(6\sqrt{2})=\frac{3\sqrt{2}}{4}$.

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ đạt tại $x=6\sqrt{2}y$.

Bài 3. Theo giả thiết ta có: $\frac{x}{y}\leq\frac{y-1}{y^2}=\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{2}\right)^2\leq\frac{1}{4}\Rightarrow t=\frac{y}{x}\geq 4$.

Khi đó $P=f(t)=t^3+\frac{2}{t^2}$. Xét hàm số $f(t)=t^3+\frac{2}{t^2}$ với $t\geq 4$ ta có

$f'(t)=3t^2-\frac{4}{t^3}=\frac{3t^5-4}{t^3}>0,\forall t\geq 4$ do đó f(t) là hàm đồng biến trên $[4;+\infty)$ suy ra $P=f(t)\geq f(4)=\frac{513}{8}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\frac{513}{8}$ đạt tại $x=\frac{1}{2},y=2$.

Bài 4. Đặt $a=x.b,c=y.b,(3x\geq y>0)$ khi đó từ điều kiện ta có:

$$(x+2)\left(1+\frac{1}{y}\right)=4\Rightarrow x=\frac{2(y-1)}{y+1}.$$

Mặt khác: $3x \ge y \Leftrightarrow 3.\dfrac{2(y-1)}{y+1} \ge y \Leftrightarrow y^2 - 5y + 6 \le 0 \Leftrightarrow 2 \le y \le 3$.

Khi đó $P = \dfrac{x^2+2}{xy} = \dfrac{\left(\dfrac{2(y-1)}{y+1}\right)^2 + 2}{\dfrac{2(y-1)}{y+1}.y} = f(y) = \dfrac{3y^2-2y+2}{y^3-y}$.

Xét hàm số $f(y) = \dfrac{3y^2-2y+2}{y^3-y}$ liên tục trên đoạn $[2;3]$ ta có:

$$f'(y) = \frac{-3y^4+4y^3+3}{\left(y^3-y\right)^2} = \frac{-3y^3(y-2)-2y^3+3}{\left(y^3-y\right)^2} < 0, \forall y \in [2;3].$$

Do đó f(y) là hàm nghịch biến trên $[2;3]$.

Suy ra $P_{\max} = f(2) = \dfrac{11}{6}$ đạt tại $a = \dfrac{2}{3}b, c = 2b$

$P_{\min} = f(3) = 1$ đạt tại $a = b, c = 3b$.

Bài 6. Đặt $c = x.a, b = y.a, (x, y > 0)$ theo giả thiết ta có: $(1+x+y)\left(1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right) = 16$.

Khi đó $P = f(y) = \dfrac{1+2y^2}{y}$.

Để khảo sát hàm f(y) ta cần tìm miền giá trị của y trước tiên.

Viết lại đẳng thức trên dưới dạng: $\left(1+\dfrac{1}{y}\right)x^2 + \left(y+\dfrac{1}{y}-13\right)x + y + 1 = 0$ (1).

Phương trình (1) phải có nghiệm x,y dương do đó điều kiện là:

$$\begin{cases} y > 0 \\ \Delta = \left(y+\dfrac{1}{y}-13\right)^2 - 4\left(1+\dfrac{1}{y}\right)(y+1) \ge 0 \Leftrightarrow \dfrac{7-3\sqrt{5}}{2} \le y \le \dfrac{7+3\sqrt{5}}{2}. \\ y + \dfrac{1}{y} - 13 > 0 \end{cases}$$

Việc còn lại ta chỉ khảo sát hàm số f(y) trên $\left[\dfrac{7-3\sqrt{5}}{2}; \dfrac{7+3\sqrt{5}}{2}\right]$ ta có:

$$P_{max} = f\left(\frac{7-3\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{21-3\sqrt{5}}{2}, P_{\min} = f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2\sqrt{2}.$$

Bài 7. Nhận xét. Biểu thức P đẳng cấp bậc 0 và có $x \ge y, x \ge z$ nên ta đặt ẩn phụ giảm biến bằng cách biểu diễn y theo x và z theo x.

Đặt $y = a.x, z = b.x$ do $x, y, z \in [1;4], x \ge y, x \ge z \Rightarrow a, b \in \left[\frac{1}{4};1\right]$.

Khi đó $P = \frac{1}{2+3a} + \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+1}$.

Ta chưa có mối liên hệ giữa a và b nên cứ mạnh dạn xét hàm số với a hoặc b xem sao và hy vọng được một hàm luôn đồng biến hoặc luôn ngịch biến.

Xét hàm số $f(\text{a}) = \frac{1}{2+3a} + \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+1}$ liên tục trên $\left[\frac{1}{4};1\right]$ ta có:

$$f'(a) = -\frac{3}{(2+3a)^2} + \frac{b}{(a+b)^2} = \frac{(2+3a)^2 b - 3(a+b)^2}{(2+3a)^2 (a+b)^2}.$$

Ta có:

$$\begin{aligned}(2+3a)^2 b - 3(a+b)^2 &= 9a^2b + 6ab + 4b - 3a^2 - 3b^2 \\ &\ge 9a^2b + 6a^2b + 4b - 3a^2 - 3b^2 \\ &= 3a^2(5b-1) + b(4-2b) > 0, \forall a, b \in \left[\frac{1}{4};1\right]\end{aligned}.$$

Do đó f(a) là hàm đồng biến trên $\left[\frac{1}{4};1\right]$ suy ra

$P = f(a) \ge f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{4}{11} + \frac{1}{1+4b} + \frac{b}{1+b}$.

Xét hàm số $g(b) = \frac{4}{11} + \frac{1}{1+4b} + \frac{b}{1+b}$ liên tục trên đoạn $\left[\frac{1}{4};1\right]$ ta có:

$$g'(b) = \frac{1}{(b+1)^2} - \frac{4}{(1+4b)^2}; g'(b) = 0 \Leftrightarrow (1+4b)^2 = 4(b+1)^2 \xleftrightarrow{b \in \left[\frac{1}{4};1\right]} b = \frac{1}{2}.$$

Ta có g'(b) đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua $b = \frac{1}{2}$ nên g(b) đạt cực tiểu tại $b = \frac{1}{2}$ hay $g(b) \ge g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{34}{33}$. Do đó $P \ge \frac{34}{33}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\frac{34}{33}$ đạt tại $a = \frac{1}{4}, b = \frac{1}{2}$ hay $x = 4y, x = 2z$ và do $x, y, z \in [1;4] \Rightarrow x = 4, y = 1, z = 2$.

Bài 8. Đặt $b = x.a, c = y.a, (x, y > 0)$ khi đó:

$$P=\frac{xy}{(x+1)(y+1)}-\frac{4xy}{(x+y)(x+1)(y+1)}=\frac{xy}{(x+1)(y+1)}\left(1-\frac{4}{x+y}\right).$$

Với $x+y>4\Rightarrow P>0$ ta xét với $x+y\le 4$.

Khi đó $P=\frac{xy}{xy+x+y+1}\left(1-\frac{4}{x+y}\right)$ khi đó nếu coi vế phải làm một hàm của xy ta có một hàm nghịch biến mặt khác $xy\le\left(\frac{x+y}{2}\right)^2$ suy ra:

$$P\ge\frac{\left(\frac{x+y}{2}\right)^2}{\left(\frac{x+y}{2}\right)^2+x+y+1}\left(1-\frac{4}{x+y}\right)=\frac{(x+y)(x+y-4)}{(x+y)^2+4(x+y)+4}.$$

Đặt $t=x+y,(0<t\le 4)\Rightarrow P\ge f(t)=\frac{t(t-4)}{(t+2)^2}$.

Xét hàm số $f(t)=\frac{t(t-4)}{(t+2)^2}$ trên $(0;4]$ ta có:

$$f'(t)=\frac{(2t-4)(t+2)-2\left(t^2-4t\right)}{(t+2)^3}=\frac{8t-8}{(t+2)^3};\ f'(t)=0\Leftrightarrow t=1.$$

Ta có f'(t) đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua $t=1$ nên f(t) đạt cực tiểu tại $t=1$ do đó $P\ge f(t)\ge \mathrm{f}(1)=-\frac{1}{3}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $-\frac{1}{3}$ đạt tại $x=y=\frac{1}{2}\Leftrightarrow a=2b=2c$.

Bài 9. Đặt $a=x.c,b=y.c,(x,y>0)$ theo điều kiện bài toán ta có:

$$(x+1)(y+1)=4.$$

Khi đó: $P=\frac{x}{y+3}+\frac{y}{x+3}+\frac{xy}{x+y}=\frac{x^2+y^2+3(x+y)}{xy+3(x+y)+9}+\frac{xy}{x+y}$

$$=\frac{(x+y)^2+3(x+y)-2xy}{xy+3(x+y)+9}+\frac{xy}{x+y}$$

Do $(x+1)(y+1)=4\Rightarrow xy=3-(x+y)$.

Đặt $t = x + y, \left(0 < t < 3\right) \Rightarrow xy = 3 - t$ và

$$3 - t = xy \le \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = \frac{t^2}{4} \Leftrightarrow t^2 + 4t - 12 \ge 0 \xleftrightarrow{t>0} t \ge 2 .$$

Khi đó $P = \dfrac{t^2 + 3t - 2\left(3 - t\right)}{3 - t + 3t + 9} + \dfrac{3 - t}{t} = \dfrac{t}{2} + \dfrac{3}{t} - \dfrac{3}{2}$.

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{t}{2} + \dfrac{3}{t} - \dfrac{3}{2}$ với $t \in \left[2;3\right)$ ta có

$f'(t) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{t^2}; f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \sqrt{6}$.

Dựa vào bảng biến thiên suy ra $\max\limits_{t\in\left[2;+3\right)} f(t) = \mathrm{f}(2) = 1$.

Bảng biến thiên:

t	2		$\sqrt{6}$		3
f'(t)		−	0	+	
f(t)	1	↘	$\sqrt{6} - \dfrac{3}{2}$	↗	0

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng 1 đạt tại $a = b = c$.

Bài 10. Đặt $a = x.c, \mathrm{b} = \mathrm{y.c}, \left(0 < 2y \le x\right)$ ta cần chứng minh

$$14\left(x^2 + y^2 + 1\right) \ge 5\left(x + y + 1\right)^2 \Leftrightarrow 9y^2 - 10\left(x+1\right)y + 9x^2 - 10x + 9 \ge 0 .$$

Coi vế trái là hàm của y và x là tham số

$f(y) = 9y^2 - 10\left(x+1\right)y + 9x^2 - 10x + 9$ ta có

$f'(y) = 18y - 10\left(x+1\right) \le 9x - 10\left(x+1\right) = -x - 10 < 0$ nên f(y) là hàm nghịch biến suy ra $f(y) \ge f\left(\dfrac{x}{2}\right) = \left(\dfrac{5}{2}x - 3\right)^2 \ge 0$.

Bất đẳng thức được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = 2b, 5a = 6c$.

Bài 11. Nếu $c = 0 \Rightarrow a^2 + ab + b^2 = 0 \Leftrightarrow \left(a + \dfrac{b}{2}\right)^2 + \dfrac{3b^2}{4} = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$ bất đẳng thức trở thành đẳng thức.

Nếu $c > 0$ đặt $a = x.c, b = y.c$ khi đó theo điều kiện ta có:

$x^2 + y^2 + xy = 3$ và bất đẳng thức cần chứng minh trở thành:

$x^3 + y^3 + 4xy \le 6 \Leftrightarrow \left(x + y\right)^3 - 3xy\left(x + y\right) + 4xy \le 6$.

Đặt

$$t = x + y \Rightarrow 3 = x^2 + y^2 + xy = \left(x + y\right)^2 - xy = t^2 - xy \Rightarrow t^2 - 3 = xy \le \frac{t^2}{4} \Leftrightarrow -2 \le t \le 2 .$$

Thay $xy = t^2 - 3$ vào bất đẳng thức trên ta cần chứng minh:

$$t^3 - 3\left(t^2-3\right)t + 4\left(t^2-3\right) \le 6, \forall t \in [-2;2].$$

$\Leftrightarrow 2t^3 - 4t^2 - 9t + 18 \ge 0, \forall t \in [-2;2] \Leftrightarrow (t-2)\left(2t^2-9\right) \ge 0, \forall t \in [-2;2]$ (luôn đúng).

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Bài 12. Đặt $a = x.c, b = y.c$ từ điều kiện ta có: $(x+y-1)^2 = xy$ và $P = \dfrac{\sqrt{xy}}{x+y} + \dfrac{1}{x^2+y^2} + \dfrac{1}{xy}$.

Ta có: $(x+y-1)^2 = xy \le \left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2 \Rightarrow (x+y)^2 - 4\left[(x+y)^2 - 2(x+y) + 1\right] \ge 0$.

$\Leftrightarrow 3(x+y)^2 - 8(x+y) + 4 \le 0 \Leftrightarrow \dfrac{2}{3} \le x+y \le 2$.

Đặt $t = x+y, \left(\dfrac{2}{3} \le t \le 2\right)$ thay $xy = (t-1)^2$ vào biểu thức của P ta được:

$$P = \frac{\sqrt{(t-1)^2}}{t} + \frac{1}{t^2 - 2(t-1)^2} + \frac{1}{(t-1)^2} = \frac{\sqrt{(t-1)^2}}{t} + \frac{1}{-t^2+4t-2} + \frac{1}{(t-1)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{(t-1)^2}}{t} + \frac{1}{2(t-1)^2} + \frac{1}{-t^2+4t-2} + \frac{1}{2(t-1)^2}$$

$$\ge \sqrt{\frac{2}{t|t-1|}} + \frac{4}{-t^2+4t-2+2(t-1)^2} = \sqrt{\frac{2}{t|t-1|}} + \frac{4}{t^2} \ge 2, \forall t \in \left[\frac{2}{3};2\right]$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 2 đạt tại $a = b = c = 1$.

Nhận xét. Ta có thể xử lý theo cách khác sau đây:

$$P = \frac{\sqrt{ab}}{a+b} + \frac{c^2}{a^2+b^2} + \frac{c^2}{ab} = \frac{\sqrt{ab}}{a+b} + \frac{c^2}{2ab} + \frac{c^2}{a^2+b^2} + \frac{c^2}{2ab}$$

$$\ge 2\sqrt{\frac{c^2\sqrt{ab}}{ab(a+b)}} + \frac{4c^2}{a^2+b^2+2ab} \ge \frac{2c}{a+b} + \left(\frac{2c}{a+b}\right)^2$$

Xuất phát từ giả thiết ta có: $\left(1 - \dfrac{c}{a+b}\right)^2 = \dfrac{ab}{(a+b)^2} \le \dfrac{1}{4} \Rightarrow \dfrac{1}{2} \le \dfrac{c}{a+b} \le \dfrac{3}{2}$.

Đặt $t = \dfrac{c}{a+b}$. Xét hàm số $g(t) = 2t + 4t^2$ trên $\left[\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right]$ ta có kết quả tương tự như lời giải trên. Qua bài toán này ta có nhận xét là đôi khi sử dụng kỹ thuật giảm biến đối với dạng đồng bậc đòi hỏi chúng ta phải biến đổi và vận dụng tinh tế các bất đẳng thức.

Bài 13. Ta có: $P=\left(\frac{a}{a+b+c}\right)^3+\left(\frac{b}{a+b+c}\right)^3+16\left(\frac{c}{a+b+c}\right)^3$.

Đặt $x=\frac{a}{a+b+c},y=\frac{b}{a+b+c},z=\frac{c}{a+b+c},\left(x,y,z\ge 0\right)$ và $x+y+z=1$.

Khi đó $P=x^3+y^3+16z^3$.

Để tìm giá trị lớn nhất ta thực hiện như sau:

$$P=x^3+y^3+z^3+15z^3\le\left(x+y+z\right)^3+15z^3=1+15z^3\le 16.$$

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng 16 đạt tại $a=b=0$.

Để tìm giá trị nhỏ nhất của P ta thực hiện như sau:

$$P=x^3+y^3+16z^3=\left(x+y\right)\left[\left(x+y\right)^2-3xy\right]+16z^3$$

$$\ge\left(x+y\right)\left[\left(x+y\right)^2-\frac{3}{4}\left(x+y\right)^2\right]+16z^3=\frac{1}{4}\left(1-z\right)^3+16z^3$$

Xét hàm số $f(z)=\frac{1}{4}\left(1-z\right)^3+16z^3$ liên tục trên đoạn $\left[0;1\right]$ ta được:

$$f'(z)=-\frac{3}{4}\left(1-z\right)^2+48z^2;\ f'(z)=0\xleftrightarrow{z\in[0;1]}z=\frac{1}{9}.$$

Ta có $f(0)=\frac{1}{4},f\left(\frac{1}{9}\right)=\frac{16}{81},f(1)=16$. Suy ra $P\ge f(z)\ge \mathrm{f}\left(\frac{1}{9}\right)=\frac{16}{81}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\frac{16}{81}$ đạt tại

$x=y,z=\frac{1}{9}\Leftrightarrow a=b,\frac{c}{a+b+c}=\frac{1}{9},a=b=4c$.

Bài 14. Nếu $a+b+c=0$, bất đẳng thức hiển nhiên đúng.

Nếu $a+b+c\ne 0$, khi đó viết lại bất đẳng thức dưới dạng:

$$8\left(\frac{a}{a+b+c}\right)^4+8\left(\frac{b}{a+b+c}\right)^4+27\left(\frac{c}{a+b+c}\right)^4\ge\frac{27}{64}.$$

Đặt $x=\frac{a}{a+b+c},y=\frac{b}{a+b+c},z=\frac{c}{a+b+c}$ suy ra $x+y+z=1$.

Khi đó vế trái của bất đẳng thức bằng $P=8x^4+8y^4+27z^4$.

Sử dụng bất đẳng thức C-S ta có:

$$8\left(x^4+y^4\right)\ge 4\left(x^2+y^2\right)^2=\left[2\left(x^2+y^2\right)\right]^2\ge\left(x+y\right)^4=\left(1-z\right)^4.$$

Suy ra $P\ge 27z^4+\left(1-z\right)^4$.

Xét hàm số $f(z)=27z^4+(1-z)^4$ ta được:

$$f'(z)=-4(1-z)^3+27.4z^3;\ f'(z)=0\Leftrightarrow(1-z)^3=27z^3\Leftrightarrow z=\frac{1}{4}.$$

Ta có f'(z) đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua $z=\frac{1}{4}$ nên tại $z=\frac{1}{4}$ thì f(z) đạt cực tiểu hay $P\ge f(z)\ge f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{27}{64}$.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=\frac{3c}{2}$.

Nhận xét. Trong trường hợp a,b,c dương và các hệ số của a^4,b^4,c^4 đôi một khác nhau ta sử dụng kỹ thuật cân bằng hệ số cho bất đẳng thức AM-GM hoặc dùng AM – GM dạng luỹ thừa.

Bài 15. Ta có: $(a+b+c)^2=2\left(a^2+b^2+c^2\right)\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2=2(ab+bc+ca)$.

$$\Leftrightarrow(a+b+c)^2=4(ab+bc+ca).$$

Khi đó $P=\frac{4\left(a^3+b^3+c^3\right)}{(a+b+c)^3}=4\left(\frac{a}{a+b+c}\right)^3+4\left(\frac{b}{a+b+c}\right)^3+4\left(\frac{c}{a+b+c}\right)^3$.

Đặt $x=\frac{a}{a+b+c},y=\frac{b}{a+b+c},z=\frac{c}{a+b+c}$ ta có $x+y+z=1$ và

$xy+yz+zx=\frac{ab+bc+ca}{(a+b+c)^2}=\frac{1}{4}$.

Suy ra $\begin{cases}y+z=1-x\\ yz+x(y+z)=\frac{1}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y+z=1-x\\ yz=x^2-x+\frac{1}{4}\end{cases}$.

Mặt khác $(y+z)^2\ge4yz\Rightarrow(1-x)^2\ge4\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)\Leftrightarrow0\le x\le\frac{2}{3}$.

Khi đó :

$$P=4\left(x^3+y^3+z^3\right)=4\left[x^3+(y+z)^3-3yz(y+z)\right]$$

$$=4\left[x^3+(1-x)^3-3\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)(1-x)\right]=12x^3-12x^2+3x+1$$

Xét hàm số $f(x)=12x^3-12x^2+3x+1$ liên tục trên $\left[0;\frac{2}{3}\right]$ ta được:

$$f'(x)=36x^2-24x+3;\ f'(x)=0 \xleftarrow{x\in\left[0;\frac{2}{3}\right]}\!\!\!\!\xrightarrow{\quad} \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{6} \\ x=\dfrac{1}{2} \end{array}\right..$$

Ta có $f(0)=f\left(\dfrac{1}{2}\right)=1,\ f\left(\dfrac{2}{3}\right)=f\left(\dfrac{1}{6}\right)=\dfrac{11}{9}$. Suy ra $1\le f(x)=P\le\dfrac{11}{9}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 1 đạt tại $a=0,b=c$. Giá trị lớn nhất của P bằng $\dfrac{11}{9}$ đạt tại $b=c=\dfrac{a}{2}$ hoặc $b=c=\dfrac{5}{2}a$.

Bài 16. Không mất tính tổng quát giả sử $z=\min\{x,y,z\}\Rightarrow x>y>z\ge 0$.

cần chứng minh: $(x+y+z)\left[\dfrac{x+y}{(x-y)^2}+\dfrac{y+z}{(y-z)^2}+\dfrac{z+x}{(z-x)^2}\right]\ge 9$.

Đặt P là biểu thức vế trái của bất đẳng thức.

Ta có

$$P\ge(x+y)\left[\frac{x+y}{(x-y)^2}+\frac{y}{y^2}+\frac{x}{x^2}\right]=\frac{(x+y)^2}{(x-y)^2}+\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+2=\frac{\frac{x}{y}+2+\frac{y}{x}}{\frac{x}{y}-2+\frac{y}{x}}+\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+2.$$

Đặt $t=\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x},(t>2)$ do $x>y$ khi đó $P\ge f(t)=\dfrac{t+2}{t-2}+t+2$.

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{t+2}{t-2}+t+2$ trên khoảng $(2;+\infty)$ ta có

$$f'(t)=-\frac{4}{(t-2)^2}+1;\ f'(t)=0\Leftrightarrow(t-2)^2=4\xleftrightarrow{t>2}t=4.$$

Ta có f’(t) đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua $t=4$ nên f(t) đạt cực tiểu tại $t=4$ hay $f(t)\ge f(4)=9$ do đó $P\ge 9$.

Bất đẳng thức được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=4,z=0$ hoặc các hoán vị.

Bài 17. Không mất tính tổng quát giả sử $c=\min\{a,b,c\}\Rightarrow a,b>c\ge 0$.

Khi đó:

$$P=(a+b+c)^2\left[\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}\right]$$

$$\geq (a+b)^2\left[\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right]=\frac{\frac{a}{b}+2+\frac{b}{a}}{\frac{a}{b}-2+\frac{b}{a}}+\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}+2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+2.$$

Đặt $t=\frac{a}{b}+\frac{b}{a},(t>2)$ do a,b dương phân biệt.

Khi đó $P\geq f(t)=\frac{t+2}{t-2}+(t+1)^2+1$.

Xét hàm số $f(t)=\frac{t+2}{t-2}+(t+1)^2+1$ với $t>2$

Ta có: $f'(t)=-\frac{4}{(t-2)^2}+2(t+1)$;

$f'(t)=0\xleftrightarrow{t>2}t=1+\sqrt{3}$.

Bảng biến thiên:

t	2		$1+\sqrt{3}$		$+\infty$
f'(t)		$-$	0	$+$	
f(t)	$+\infty$	$\searrow$	$11+6\sqrt{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên suy ra $P_{\min}=\min\limits_{t>2} f(t)=\text{f}(1+\sqrt{3})=11+6\sqrt{3}$ đạt tại $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=1+\sqrt{3},c=0$ hoặc các hoán vị.

Bài 18. Giả sử $c=\min\{a,b,c\}$ khi đó $a,b>c\geq 0$ ta có:

$$a^2+b^2\leq\left(a+\frac{c}{2}\right)^2+\left(b+\frac{c}{2}\right)^2;$$

$$b^2+c^2\leq\left(b+\frac{c}{2}\right)^2;$$

$$a^2+c^2\leq\left(a+\frac{c}{2}\right)^2;$$

$$(a+b+c)^2=\left(a+\frac{c}{2}+b+\frac{c}{2}\right)^2\ge 4\left(a+\frac{c}{2}\right)\left(b+\frac{c}{2}\right).$$

Suy ra: $P\ge 4\left(a+\frac{c}{2}\right)\left(b+\frac{c}{2}\right)\left[\frac{1}{\left(a+\frac{c}{2}\right)^2}+\frac{1}{\left(b+\frac{c}{2}\right)^2}+\frac{1}{\left(a+\frac{c}{2}\right)^2+\left(b+\frac{c}{2}\right)^2}\right].$

Đặt $x=a+\frac{c}{2}, y=b+\frac{c}{2}$ khi đó $P\ge 4xy\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{x^2+y^2}\right)=4\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\frac{4}{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}}.$

Đặt $t=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\ge 2$ xét hàm số $f(t)=4t+\frac{4}{t}$ với $t\ge 2$ ta có $f'(t)=4-\frac{4}{t^2}>0,\forall t\ge 2$ nên f(t) là hàm đồng biến với $t\ge 2$. Do đó $P\ge f(t)\ge f(2)=10$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y,c=0\Rightarrow a=b,c=0$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 10 đạt tại $a=b,c=0$ hoặc các hoán vị.

Bài 19. Giả sử $c=\min\{a,b,c\}$ ta có:

$$a^2+b^2\le\left(a+\frac{c}{2}\right)^2+\left(b+\frac{c}{2}\right)^2;$$

$$b^2+c^2\le\left(b+\frac{c}{2}\right)^2;$$

$$a^2+c^2\le\left(a+\frac{c}{2}\right)^2;$$

$$ab+bc+ca=ab+\frac{c}{2}(a+b)+\frac{c^2}{4}+\frac{c}{2}\left(a+b-\frac{c}{2}\right)\ge ab+\frac{c}{2}(a+b)+\frac{c^2}{4}=\left(a+\frac{c}{2}\right)\left(b+\frac{c}{2}\right)$$

Suy ra: $P\ge\left(a+\frac{c}{2}\right)\left(b+\frac{c}{2}\right)\left[\frac{1}{\left(a+\frac{c}{2}\right)^2}+\frac{1}{\left(b+\frac{c}{2}\right)^2}+\frac{1}{\left(a+\frac{c}{2}\right)^2+\left(b+\frac{c}{2}\right)^2}\right].$

Đặt $x=a+\frac{c}{2}, y=b+\frac{c}{2}$ khi đó $P\ge xy\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{x^2+y^2}\right)=\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\frac{1}{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}}.$

Đặt $t=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\ge 2$ xét hàm số $f(t)=t+\frac{1}{t}$ với $t\ge 2$ ta có $f'(t)=1-\frac{1}{t^2}>0,\forall t\ge 2$ nên f(t) là hàm đồng biến với $t\ge 2$. Do đó $P\ge f(t)\ge f(2)=\frac{5}{2}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y,c=0\Rightarrow a=b,c=0$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\frac{5}{2}$ đạt tại $a=b,c=0$ hoặc các hoán vị.

Cách 2: Coi P là hàm số của c ta chứng minh P đạt giá trị nhỏ nhất khi $c=0$.

Thật vậy ta cần chứng minh:

$$(ab+bc+ca)\left(\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{1}{b^2+c^2}+\frac{1}{c^2+a^2}\right)\ge ab\left(\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow c(a+b)\left(\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{1}{b^2+c^2}+\frac{1}{c^2+a^2}\right)\ge ab\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}-\frac{1}{b^2+c^2}-\frac{1}{a^2+c^2}\right).$$

$$\Leftrightarrow c(a+b)\left(\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{1}{b^2+c^2}+\frac{1}{c^2+a^2}\right)\ge ab\left(\frac{c^2}{a^2(a^2+c^2)}+\frac{c^2}{b^2(b^2+c^2)}\right)$$

Bất đẳng thức cuối đúng do:

$$\frac{c(a+b)}{a^2+b^2}\ge 0;$$

$$\frac{c(a+b)}{a^2+c^2}-\frac{abc^2}{a^2(a^2+c^2)}=\frac{ac\left[a^2+b(a-c)\right]}{a^2(a^2+c^2)}\ge 0$$

$$\frac{c(a+b)}{b^2+c^2}-\frac{abc^2}{b^2(a^2+c^2)}=\frac{bc\left[b^2+a(b-c)\right]}{b^2(b^2+c^2)}\ge 0$$

Vậy ta tìm giá trị nhỏ nhất của $Q=ab\left(\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)$.

Tương tự trên ta có: $Q=\frac{1}{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}}+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\ge\frac{5}{2}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\frac{5}{2}$ đạt tại $a=b,c=0$ hoặc các hoán vị.

Bài 20. Nhận xét. Bài toán này thực chất là một trường hợp riêng của hai bất đẳng thức trên:

Ta có:

$$P=(a+b+c)^2\left(\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{1}{b^2+c^2}+\frac{1}{c^2+a^2}\right)$$

$$\ge\left(a+\frac{c}{2}+b+\frac{c}{2}\right)^2\left(\frac{1}{\left(a+\frac{c}{2}\right)^2+\left(b+\frac{c}{2}\right)^2}+\frac{1}{\left(b+\frac{c}{2}\right)^2}+\frac{1}{\left(a+\frac{c}{2}\right)^2}\right).$$

$$=(x+y)^2\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{x^2+y^2}\right)\ge 10$$

Với $x=a+\frac{c}{2},y=b+\frac{c}{2},(x,y>0,x+y=1)$ và $c=\min\{a,b,c\}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 10 đạt tại $a=b=\frac{1}{2},\mathrm{c}=0$ hoặc các hoán vị.

Bài 21. Giả sử $c=\min\{a,b,c\}$ khi đó $a^2+b^2\le a^2+(b+c)^2$ và

$$a^2+b^2+c^2\le a^2+(b+c)^2.$$

Suy ra:

$$P\ge(ab+bc+ca)\left[\frac{1}{a^2}+\frac{1}{(b+c)^2}+\frac{1}{a^2+(b+c)^2}\right]$$
$$=\left[bc+a(b+c)\right]\left[\frac{1}{a^2}+\frac{1}{(b+c)^2}+\frac{1}{a^2+(b+c)^2}\right]\ge a(b+c)\left[\frac{1}{a^2}+\frac{1}{(b+c)^2}+\frac{1}{a^2+(b+c)^2}\right].$$

Đặt $x=a,y=b+c$ đưa về tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức quen thuộc

$$Q=xy\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{x^2+y^2}\right).$$

Ta có:

$$Q=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+\frac{1}{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}}=\frac{2\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)^2-5\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+2}{2\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)}+\frac{5}{2}$$

$$=\frac{\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-2\right)\left(\frac{2x}{y}+\frac{2y}{x}-1\right)}{2\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)}+\frac{5}{2}\ge\frac{5}{2}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y,c=0\Rightarrow a=b,c=0$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\frac{5}{2}$ đạt tại $a=b,c=0$ hoặc $a=c,b=0$.

Bài 22. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$\left(\frac{a}{b-c}\right)^2+\left(\frac{b}{c-a}\right)^2-\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}\ge 0.$$

Coi vế trái là hàm số của c ta có:

$$f'(c)=\frac{2a^2}{(b-c)^3}+\frac{2b^2}{(a-c)^3}+\frac{(b+c)\left(a^2+b^2+c^2\right)-2c(ab+bc+ca)}{(ab+bc+ca)^2}$$

$$>\frac{2c\left(a^2+b^2+c^2\right)-2c(ab+bc+ca)}{(ab+bc+ca)^2}=\frac{c\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]}{(ab+bc+ca)^2}\ge 0$$

Vậy vế trái là hàm đồng biến với c vậy ta chỉ cần chứng minh với $c=0$.

Khi đó ta cần chứng minh: $\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}\ge\frac{a^2+b^2}{ab}$

$\Leftrightarrow a^4+b^4\ge ab\left(a^2+b^2\right)\Leftrightarrow (a-b)^2\left(a^2+ab+b^2\right)\ge 0$ (luôn đúng).

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b,c=0$.

<u>Cách 2:</u> Ta có $\left(\frac{a}{b-c}\right)^2+\left(\frac{b}{c-a}\right)^2\ge\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}\ge\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=\frac{a^2+b^2}{ab}\ge\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}$.

Bất đẳng thức được chứng minh.

Bài 23. Giả sử $x\ge y\ge z.$ Đặt $x=a.z, y=b.z, (1\le b\le a\le 2)$, khi đó

$$P=f(a)=\frac{a^2b^2+a^2+b^2}{ab(a+b+1)}.$$

Ta có $f'(a)=\frac{(a+b+ab)\left[b^2(a-1)+a-b\right]}{a^2b(a+b+1)^2}\ge 0,\forall a\ge b\ge 1$ nên f(a) là hàm đồng biến trên $[1;2]$ suy ra $f(b)\le f(a)\le f(2)$.

Mặt khác $f(b)=\frac{b^4+2b^2}{b^2(2b+1)}=\frac{b^2+2}{2b+1}=\frac{(b-1)^2}{2b+1}+1\ge 1$ và

$$f(2)=\frac{5b^2+4}{2b(b+3)}=\frac{(13b-10)(b-2)}{10b(b+3)}+\frac{6}{5}\le\frac{6}{5}.$$

Do đó $1 \le P \le \frac{6}{5}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 1 đạt tại $x = y = z$ và giá trị lớn nhất của P bằng $\frac{6}{5}$ đạt tại $x = y = 2, z = 1$ hoặc các hoán vị.

Nhận xét. Ta có thể tìm nhanh Min của P như sau:

$x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 \ge xy.yz + yz.zx + zx.xy = xyz\left(x + y + z\right)$ suy ra $P \ge 1$.

Nếu thay điều kiện $x, y, z \in \left[1;2\right]$ bằng đoạn $\left[2;4\right]$ ta có kết quả tương tự.

Bài 24. Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta được: $b^3 + b^3 + c^3 \ge 3b^2c$.

Suy ra:

$$P = \frac{4a^3 + b^3 + c^3 + \left(2b^3 + c^3 - 3b^2c\right)}{\left(a+b+c\right)^3} \ge \frac{4a^3 + b^3 + c^3}{\left(a+b+c\right)^3}$$

$$\ge \frac{4a^3 + \frac{1}{4}\left(b+c\right)^3}{\left(a+b+c\right)^3} = \frac{16a^3 + \left(b+c\right)^3}{4\left(a+b+c\right)^3} = 4\left(\frac{a}{a+b+c}\right)^3 + \frac{1}{4}\left(\frac{b+c}{a+b+c}\right)^3$$

Đặt $x = \frac{a}{a+b+c}, y = \frac{b+c}{a+b+c}, \left(y > x > 0\right)$ khi đó $x + y = 1$ và

$$P \ge 4x^3 + \frac{1}{4}y^3 = f(y) = 4\left(1-y\right)^3 + \frac{1}{4}y^3.$$

Xét hàm số $f(y) = 4\left(1-y\right)^3 + \frac{1}{4}y^3$ với $y \in \left(0;1\right)$ ta có

$$f'(y) = -12\left(1-y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2;\ f'(y) = 0 \xleftrightarrow{0<y<1} y = \frac{4}{5}.$$

Ta có f'(y) đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua $y = \frac{4}{5}$ nên f(y) đạt cực tiểu tại $y = \frac{4}{5}$ hay $P \ge f(y) \ge f\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{4}{25}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\frac{4}{25}$ đạt tại $b = c = 2a$.

Bài 25. Không mất tính tổng quát giả sử a là độ dài cạnh lớn nhất khi đó góc A lớn nhất:

Tam giác không nhọn nên $\cos A \le 0 \Rightarrow b^2 + c^2 - a^2 \le 0 \Leftrightarrow b^2 + c^2 \le a^2$.

Đặt $b^2 = x.a^2, c^2 = y.a^2, \left(x, y > 0\right)$ và ta có: $x + y \le 1$.

Khi đó đặt P là biểu thức vế trái của bất đẳng thức.

$$P=\left(1+x+y\right)\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=\left(x+y+1\right)\left(\frac{xy+x+y}{xy}\right)$$

$$\geq\left(x+y+1\right).\frac{\frac{\left(x+y\right)^2}{4}+x+y}{\frac{\left(x+y\right)^2}{4}}=\frac{\left(x+y+1\right)\left(x+y+4\right)}{x+y}.$$

$$=\frac{\left(x+y+1\right)\left(x+y+4\right)}{x+y}-10+10=\frac{\left(x+y-1\right)\left(x+y-4\right)}{x+y}+10\geq 0$$

Bất đẳng thức được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác đó vuông.

Bài 26. Đặt $y=a.z, x=b.z, \left(a,b>0\right)$ khi đó ta có $a^2+b^2+6=4\left(a+b\right)$ và

$$P=\frac{a^3}{b\left(a+1\right)^2}+\frac{b^3}{a\left(b+1\right)^2}+\sqrt{a^2+b^2}.$$

Mặt khác $a^2+b^2\geq\frac{1}{2}\left(a+b\right)^2\Rightarrow\frac{1}{2}\left(a+b\right)^2+6\leq 4\left(a+b\right)$.

$\Leftrightarrow\left(a+b-2\right)\left(a+b-6\right)\leq 0\Leftrightarrow 2\leq t=a+b\leq 6$ và

$4\left(a+b\right)=a^2+b^2+6\geq 2ab+6\Rightarrow ab\leq 2\left(a+b\right)-3$.

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta có: $\sqrt{a^2+b^2}\geq\frac{1}{\sqrt{2}}\left(a+b\right)\geq\sqrt{2}$ và

$$\frac{a^3}{b\left(a+1\right)^2}+\frac{a+1}{8}+\frac{b\left(a+1\right)}{8}\geq\frac{3a}{4}$$

$$\frac{b^3}{a\left(b+1\right)^2}+\frac{b+1}{8}+\frac{a\left(b+1\right)}{8}\geq\frac{3b}{4}$$

Suy ra $P\geq\sqrt{2}+\frac{a+b}{2}-\frac{ab}{4}-\frac{1}{4}\geq\sqrt{2}+\frac{a+b}{2}-\frac{2\left(a+b\right)-3}{4}-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}+\sqrt{2}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\frac{1}{2}+\sqrt{2}$ đạt tại $x=y=z$.

Nhận xét. Ta có thể đánh giá như sau

$b\left(a+1\right)^2=\frac{1}{2}.2b\left(a+1\right)\left(a+1\right)\leq\frac{1}{2}\left(\frac{2a+2b+2}{3}\right)^3\leq\frac{1}{2}\left(a+b\right)^3$ và

$a\left(b+1\right)^2\leq\frac{1}{2}\left(a+b\right)^3$.

Do đó $P \ge 2\left[\frac{a^3}{(a+b)^3}+\frac{b^3}{(a+b)^3}\right]+\sqrt{2}=2.\frac{a^3+b^3}{(a+b)^3}+\sqrt{2}\ge 2.\frac{1}{4}+\sqrt{2}=\frac{1}{2}+\sqrt{2}$.

Bài 27. HD: Từ giả thiết ta có:

$$\frac{a}{a+b+c}.\frac{b}{a+b+c}+\frac{b}{a+b+c}.\frac{c}{a+b+c}+\frac{c}{a+b+c}.\frac{a}{a+b+c}=\frac{1}{4}.$$

Đặt $x=\frac{a}{a+b+c}, y=\frac{b}{a+b+c}, z=\frac{c}{a+b+c}$ ta có

$x+y+z=1, \text{xy}+\text{yz}+\text{zx}=\frac{1}{4}$ khi đó $P=x^2y+y^2z+z^2x$.

Bài 28. Ta có: $P=\frac{(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)}{(a+b+c)^2}=1-2.\frac{ab+bc+ca}{(a+b+c)^2}\le 1$.

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng 1 đạt tại $a=b=0, c=1$.

Từ điều kiện ta có: $a^3+b^3=c(c-1)\le c\left(\frac{1+c-1}{2}\right)^2=\frac{c^3}{4}$.

Mặt khác

$$a^3+b^3=(a+b)\left[(a+b)^2-3ab\right]\ge(a+b)\left[(a+b)^2-\frac{3}{4}(a+b)^2\right]=\frac{(a+b)^3}{4}.$$

Suy ra $(a+b)^3\le c^3 \Leftrightarrow a+b\le c$.

Đặt $a=x.c, b=y.c\,(x,y\ge 0)$ ta có $x+y\le 1$ và

$$P=\frac{x^2+y^2+1}{(x+y+1)^2}=\frac{(x+y)^2-2xy+1}{(x+y+1)^2}\ge\frac{(x+y)^2+1}{(x+y+1)^2}-\frac{2xy}{(x+y+1)^2}$$

$$\ge\frac{\frac{1}{2}(x+y+1)^2}{(x+y+1)^2}-\frac{xy}{2}\ge\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{x+y}{2}\right)^2\ge\frac{1}{2}-\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\frac{3}{8}$ đạt tại $a=b=1, c=2$.

Bài 35. Giả sử $c=\min\{a,b,c\}$ khi đó $(a-c)^2\le a^2, (b-c)^2\le b^2$.

Vậy ta đi chứng minh: $\left(a^2+b^2+c^2\right)^3\ge 27(a-b)^2a^2b^2$.

Để ý $\left(a^2+b^2+c^2\right)^3\ge\left(a^2+b^2\right)^3$. Vậy bất đẳng thức được chứng minh nếu bất đẳng thức sau đúng: $\left(a^2+b^2\right)^3\ge 27(a-b)^2a^2b^2$.

Nếu $b=0$ bất đẳng thức trở thành đẳng thức.

Nếu $b>0$ đặt $a=x.b,\left(x\geq 0\right)$ đưa về chứng minh bất đẳng thức.

$\left(x^2+1\right)^3\geq 27\left(x-1\right)^2x^2\Leftrightarrow\left(x^2-3x+1\right)^2\left(x^2+6x+1\right)\geq 0$ (luôn đúng).

Đẳng thức xảy ra khi $x=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2},c=0\Leftrightarrow a=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}b,\text{c}=0$.

Bài toán được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}b,\text{c}=0$ hoặc các hoán vị.

Nhận xét. Viết lại bất đẳng thức dưới dạng.

$$f(c)=\left(a^2+b^2+c^2\right)^3-27\left(a-b\right)^2\left(b-c\right)^2\left(a-c\right)^2\geq 0.$$

Coi vế trái bất đẳng thức là hàm số của c.

Ta có $f'(c)=6c\left(a^2+b^2+c^2\right)^3+54\left(a-b\right)^2\left[b-c+a-c\right]\geq 0$ (do $c=\min\left\{a,b,c\right\}\geq 0$).

Vậy $f(c)\geq f(0)=\left(a^2+b^2\right)^3-27a^2b^2\left(a-b\right)^2$.

Bài toán đưa về chứng minh bất đẳng thức $\left(a^2+b^2\right)^3-27a^2b^2\left(a-b\right)^2\geq 0$.

Đây chính là kết quả của cách trên. Trong trường hợp a,b,c là các số thực bất kỳ ta có bất đẳng thức sau:

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)^3\geq 2\left(a-b\right)^2\left(b-c\right)^2\left(c-a\right)^2.$$

Để chứng minh bất đẳng thức trên ta tìm cách đánh giá $\left(a-c\right)^2\left(b-c\right)^2\leq a^2b^2$.

Không mất tính tổng quát giả sử c là số nằm giữa a và b.

TH1: Nếu $c\geq 0$ ta có ngay điều phải chứng minh.

TH2: Nếu $c\leq 0$ và $a,b\leq 0$, ta đặt $x=-a,y=-b,z=-c$ đưa bất đẳng thức về trường hợp 1 và có ngay điều phải chứng minh.

TH3: Nếu $c\leq 0,ab\leq 0$, ta có thể giả sử $c\in\left[a;b\right]$, khi đó xét

$f(c)=\left(c-a\right)\left(c-b\right)+ab=c^2-\left(a+b\right)c+2ab$ trên đoạn $\left[a;b\right]$ ta có:

$f(c)\leq\max\left\{f(a),f(b)\right\}=ab$ tức $\left(c-a\right)\left(c-b\right)\leq -ab$. Mặt khác

$\left(c-a\right)\left(c-b\right)=c\left(c-a-b\right)+ab\geq ab$.

Vậy $\left|\left(c-a\right)\left(c-b\right)\right|\leq\left|ab\right|\Rightarrow\left(c-a\right)^2\left(c-b\right)^2\leq a^2b^2$.

Vậy đưa về chứng minh bất đẳng thức: $\left(a^2+b^2+c^2\right)^3 \geq 2(a-b)^2 a^2b^2$.

Đặt $a=x.b$ và đưa về chứng minh bất đẳng thức:

$\left(x^2+1\right)^3 \geq 2(x-1)^2 x^2 \Leftrightarrow (x+1)^2\left(x^4-2x^3+4x^2-2x+1\right) \geq 0$.

$\Leftrightarrow (x+1)^2\left[\left(x^2-x\right)^2+3x^2-2x+1\right] \geq 0$ (luôn đúng).

Bài toán được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a=-b, c=0$ hoặc các hoán vị.

Bài 36. Không mất tính tổng quát giả sử $c=\min\{a,b,c\}$, khi đó ta có:

$$a^2+b^2 \leq \left(a+\frac{c}{2}\right)^2+\left(b+\frac{c}{2}\right)^2;$$

$$b^2+c^2 \leq \left(b+\frac{c}{2}\right)^2;$$

$$a^2+c^2 \leq \left(a+\frac{c}{2}\right)^2;$$

$$a^2+b^2+c^2 \leq \left(a+\frac{c}{2}\right)^2+\left(b+\frac{c}{2}\right)^2.$$

Đặt $x=a+\frac{c}{2}, y=b+\frac{c}{2},(x,y>0)$ bất đẳng thức được chứng minh nếu ta chứng minh được: $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{12}{x^2+y^2} \geq \frac{32}{(x+y)^2}$.

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{12}{x^2+y^2}=\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{4}{x^2+y^2}\right)+\frac{8}{x^2+y^2} \geq \frac{4}{xy}+\frac{8}{x^2+y^2}$$

$$=\frac{8}{2xy}+\frac{8}{x^2+y^2} \geq 8.\frac{4}{2xy+x^2+y^2}=\frac{32}{(x+y)^2}$$

Bài toán được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b, c=0$ hoặc các hoán vị.

Bài 39. Không mất tính tổng quát giả sử $a>b>c$, đặt

$$a=x+y+c, b=y+c,(x,y>0).$$

Gọi P là biểu thức vế trái của bất đẳng thức cần chứng.

Ta có $P=\frac{y^2}{x^2}+\frac{x^2}{(x+y)^2}+\frac{(x+y)^2}{y^2}$.

Đặt $y=t.x$ ta có $P=t^2+\frac{1}{(t+1)^2}+\frac{(t+1)^2}{t^2}$.

Ta cần chứng minh: $t^2+\frac{1}{(t+1)^2}+\frac{(t+1)^2}{t^2}\geq 5$.

$\Leftrightarrow t^6+2t^5-3t^4-6t^3+2t^2+4t+1\geq 0\Leftrightarrow (t^3+t^2-2t-1)^2\geq 0$ (luôn đúng).

<u>Cách 2:</u> Đặt $x=\frac{a-b}{b-c},\ y=\frac{b-c}{c-a},\ z=\frac{c-a}{a-b}$, khi đó:

$$\begin{cases} x+\frac{1}{y}+1=0\\ y+\frac{1}{z}+1=0\\ z+\frac{1}{x}+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} xy+y+1=0\\ yz+z+1=0\\ zx+x+1=0\end{cases}\Rightarrow xy+yz+zx+x+y+z+3=0.$$

Ta cần chứng minh $x^2+y^2+z^2\geq 5\Leftrightarrow (x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)-5\geq 0$

$\Leftrightarrow (x+y+z)^2-2(-3-x-y-z)-5\geq 0\Leftrightarrow (x+y+z+1)^2\geq 0$ (luôn đúng).

Nhận xét. Tử cách 2 ta có một đẳng thức đẹp mặt sau đây:

$$\left(\frac{a-b}{b-c}\right)^2+\left(\frac{b-c}{c-a}\right)^2+\left(\frac{c-a}{a-b}\right)^2=5+\left(\frac{a-b}{b-c}+\frac{b-c}{c-a}+\frac{c-a}{a-b}+1\right)^2.$$

Bài 41. Nhận xét. Đây là một bài toán khó và đã có nhiều lời giải dành cho bất đẳng thức này.

Dưới đây trình bày một lời giải khác dựa vào dấu hiệu đồng bậc của bất đẳng thức trên.

Giả sử $c=max\{a,b,c\}\Rightarrow c>0$.

Đặt $a=c.\text{x},\text{b}=\text{c}.\text{y},(x,y\in[0;1])$ khi đó ta cần chứng minh

$$\frac{1}{(x+y)^2}+\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(y+1)^2}\geq\frac{9}{4(xy+x+y)}.$$

Quy đồng hai vế và rút gọn đưa về bất đẳng thức:

$$4\left[x+y+x^5+y^5+xy(x^4+y^4)\right]+2xy(1+x^3+y^3)+6x^2y^2$$

$$\geq x^2+y^2+x^4+y^4+6(x^3+y^3+x^3y^3)+2xy\left[x+y+x^2+y^2+xy(x+y)\right]+x^2y^2(x^2+y^2)$$

Ta có: $4(x+x^5)-x^2-x^4-6x^3=x(x-1)^2(4x^2+7x+4)\geq 0,\forall x\in[0;1]$ do đó

$$4\left(x+y+x^5+y^5\right)\ge x^2+y^2+x^4+y^4+6\left(x^3+y^3\right).$$

Vậy ta chỉ cần chứng minh

$$4\left(x^4+y^4\right)+2\left(1+x^3+y^3\right)+6xy\ge 2\left(x+y+x^2+y^2+xy\left(x+y\right)\right)+6x^2y^2+xy\left(x^2+y^2\right).$$

Ta có:

$$4\left(x^4+y^4\right)=3\left(x^4+y^4\right)+x^4+y^4\ge 3.2x^2y^2+xy\left(x^2+y^2\right)=6x^2y^2+xy\left(x^2+y^2\right).$$

Vậy ta chứng minh $1+x^3+y^3+3xy\ge x+y+x^2+y^2+xy\left(x+y\right)$.

Ta có thể giả sử $x\ge y\Rightarrow 0\le y\le x\le 1$ và bất đẳng thức tương đương với:

$y\left[\left(x-1\right)^2+\left(1-x\right)\left(x-y\right)+\left(1-y\right)^2\right]+\left(1-x\right)^2\left[1-x+2\left(x-y\right)\right]\ge 0$ (luôn đúng).

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Bài 42. Đặt $a=x.c,b=y.c,\left(x,y>0\right)$, khi đó theo giả thiết ta có:

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{1}{2}\Rightarrow x^2+y^2=\frac{x^2y^2}{2}.$$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta có: $\begin{cases} x^2+y^2\ge 2xy\Rightarrow \dfrac{x^2y^2}{2}\ge 2xy\Leftrightarrow xy\ge 4 \\ \dfrac{x^2y^2}{2}=x^2+y^2\ge \dfrac{1}{2}\left(x+y\right)^2\Leftrightarrow x+y\le xy \end{cases}.$

Khi đó: $P=\dfrac{x}{y+1}+\dfrac{y}{x+1}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+1}}$.

$$\frac{x}{y+1}+\frac{y}{x+1}=\frac{x^2+y^2+x+y}{xy+x+y+1}=\frac{x^2y^2+2\left(x+y\right)}{2xy+2\left(x+y\right)+2}\ge\frac{x^2y^2+2xy}{2xy+2xy+2}=\frac{x^2y^2+2xy}{4xy+2}$$

(hàm nghịch biến với x+y).

Do đó $P\ge\dfrac{x^2y^2+2xy}{4xy+2}+\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{x^2y^2}{2}+1}}$.

Đặt $xy=t,\left(t\ge 4\right)\Rightarrow P\ge f\left(t\right)=\dfrac{t^2+2t}{4t+2}+\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{t^2}{2}+1}}$.

Xét hàm số $f\left(t\right)=\dfrac{t^2+2t}{4t+2}+\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{t^2}{2}+1}}$ với $t\ge 4$ ta có:

$$f'(t)=\frac{t^2+t+1}{(2t+1)^2}-\frac{\sqrt{2}t}{\sqrt{(t^2+2)^3}}=\frac{(t^2+t+1)\sqrt{(t^2+2)^3}-\sqrt{2}t(2t+1)^2}{(2t+1)^2\sqrt{(t^2+2)^3}}>0,\forall t\geq 4.$$

Do đó f(t) là hàm đồng biến với $t\geq 4\Rightarrow P\geq f(t)\geq f(4)=\frac{5}{3}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\frac{5}{3}$ đạt tại $a=b=2c$.

Bài 43. Chia hai vế bất đẳng thức cho $(a+b+c)^3$ đưa về chứng minh bất đẳng thức: $27(x^2+y^2+z^2)+45xyz\geq 32(xy+yz+zx)$

$\Leftrightarrow P=27(x^2+y^2+z^2)+xy(45z-32)-32z(x+y)\geq 0$.

Trong đó $x=\frac{a}{a+b+c},y=\frac{b}{a+b+c},z=\frac{c}{a+b+c};x+y+z=1$.

Không mất tính tổng quát giả sử $z=\min\{x,y,z\}\Rightarrow z\leq\frac{1}{3}\Rightarrow 45z-32<0$.

Khi đó sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta được:

$$P\geq 27z^2+\frac{27}{2}(x+y)^2+\frac{(x+y)^2}{4}(45z-32)-32z(x+y)$$

$$=27z^2+\frac{27}{2}(1-z)^2+\frac{(1-z)^2}{4}(45z-32)-32z(1-z)=\frac{1}{4}(3z-1)^2(5z+22)\geq 0$$

Bài toán được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bài 44. Đặt $a=x.c,b=y.c,(x,y>0)$ ta có:

$$P=\frac{xy}{(x+y)^2}+\frac{x}{(x+1)^2}+\frac{y}{(y+1)^2}-\frac{4xy}{(x+y)(x+1)(y+1)}.$$

Nhận xét. Do biểu thức của P đối xứng với a,b,c nên dự đoán đẳng thức xảy ra khi $a=b=c\Leftrightarrow x=y=1$.

Vậy ta chứng minh $P\leq\frac{1}{4}$.

$$\frac{xy}{(x+y)^2}+\frac{x}{(x+1)^2}+\frac{y}{(y+1)^2}-\frac{4xy}{(x+y)(x+1)(y+1)}\leq\frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow\frac{xy(x+1)^2(y+1)^2+x(y+1)^2(x+y)^2+y(x+1)^2(x+y)^2-4xy(x+y)(x+1)(y+1)}{(x+y)^2(x+1)^2(y+1)^2}\leq\frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(x^2y+xy+x+y^2\right)\left(xy^2+xy+y+x^2\right)}{(x+y)^2(x+1)^2(y+1)^2} \le \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{(x-1)^2(y-1)^2(x-y)^2}{(x+y)^2(x+1)^2(y+1)^2} \ge 0$$

(luôn đúng).

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng $\frac{1}{4}$ đạt tại $a=b=c$.

<u>Cách 2:</u> Ta biến đổi đưa P về dạng:

$$P=\frac{3}{4}+\frac{ab}{(a+b)^2}-\frac{1}{4}+\frac{bc}{(b+c)^2}-\frac{1}{4}+\frac{ca}{(c+a)^2}-\frac{1}{4}-\frac{4abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

$$=\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\left[\frac{(a-b)^2}{(a+b)^2}+\frac{(b-c)^2}{(b+c)^2}+\frac{(c-a)^2}{(c+a)^2}+\frac{16abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}\right]$$

Đặt $x=\frac{a-b}{a+b}, y=\frac{b-c}{b+c}, z=\frac{c-a}{c+a} \Rightarrow x+1=\frac{2a}{a+b}, y+1=\frac{2b}{b+c}, z+1=\frac{2c}{c+a}$.

Do đó :

$$P=\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\left[x^2+y^2+z^2+2(x+1)(y+1)(z+1)\right]$$

$$=\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\left[x^2+y^2+z^2+2(1+x+y+z+xy+yz+zx+xyz)\right]$$

$$=\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\left(x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx+2\right)=\frac{1}{4}-(x+y+z)^2 \le \frac{1}{4}$$

Nhận xét. Lời giải trên ta sử dụng đẳng thức quen thuộc:

$$x+y+z+xyz=\frac{a-b}{a+b}+\frac{b-c}{b+c}+\frac{c-a}{c+a}+\frac{a-b}{a+b}.\frac{b-c}{b+c}.\frac{c-a}{c+a}=0$$

Bài 45. HD: Theo giả thiết ta có:

$$2(x+y+z)^2=7(xy+yz+zx) \Leftrightarrow \frac{xy+yz+zx}{(x+y+z)^2}=\frac{2}{7}.$$

Đặt $a=\frac{x}{x+y+z}, b=\frac{y}{x+y+z}, c=\frac{z}{x+y+z} \Rightarrow \begin{cases} a+b+c=1 \\ ab+bc+ca=\frac{2}{7} \end{cases}$ (1).

Khi đó $P=\frac{7(y-2z)^2}{2(x+y+z)^2}=\frac{7}{2}(b-2c)^2$.

Bài 46. Theo giả thiết ta có: $(a+b+c)^2=-2(ab+bc+ca) \Rightarrow \frac{ab+bc+ca}{(a+b+c)^2}=-\frac{1}{2}$.

Đặt $x=\dfrac{a}{a+b+c}, y=\dfrac{b}{a+b+c}, z=\dfrac{c}{a+b+c} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=1 \\ xy+yz+zx=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$.

Ta có: $(y+z)^2 \geq 4yz \Rightarrow (1-x)^2 \geq 4\left[-\dfrac{1}{2}-x(1-x)\right] \Leftrightarrow \dfrac{1-\sqrt{10}}{3} \leq x \leq \dfrac{1+\sqrt{10}}{3}$.

Khi đó :

$$P = x^3+y^3+z^3-xyz = x^3+(y+z)^3-3yz(y+z)-xyz$$
$$= x^3+(1-x)^3-3\left[-\frac{1}{2}-x(1-x)\right](1-x)-x\left[-\frac{1}{2}-x(1-x)\right]$$
$$= \frac{4x^3-4x^2-2x+5}{2}$$

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{4x^3-4x^2-2x+5}{2}$ liên tục trên đoạn $\left[\dfrac{1-\sqrt{10}}{3};\dfrac{1+\sqrt{10}}{3}\right]$ ta có:

$$f'(x)=6x^2-4x-1; f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{2-\sqrt{10}}{6} \\ x=\dfrac{2+\sqrt{10}}{6} \end{array}\right. .$$

Bài 47. HD: Ta có: $P=\dfrac{(a-b)^5+(b-c)^5+(c-a)^5}{5(a+b+c)^5}$.

Đặt $x=\dfrac{a-b}{a+b+c}, y=\dfrac{b-c}{a+b+c}, z=\dfrac{c-a}{a+b+c} \Rightarrow x+y+z=0$.

Theo giả thiết ta có:

$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=(a+b+c)^2 \Rightarrow x^2+y^2+z^2=1$.

Vậy bài toán đưa về tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức

$Q=x^5+y^5+z^5$ với $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases}$.

Bài 48. Theo giả thiết ta có: $5(x+y+z)^2=16(xy+yz+zx)$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{x+y+z}.\frac{y}{x+y+z}+\frac{y}{x+y+z}.\frac{z}{x+y+z}+\frac{z}{x+y+z}.\frac{x}{x+y+z}=\frac{5}{16}.$$

Đặt $a=\dfrac{x}{x+y+z};\mathrm{b}=\dfrac{y}{x+y+z};c=\dfrac{z}{x+y+z} \Rightarrow \begin{cases} ab+bc+ca=\dfrac{5}{16} \\ a+b+c=1 \end{cases}$ (1).

Khi đó $P=\dfrac{(x+y+z)(xy+yz+zx)}{xyz}=\dfrac{5(x+y+z)^3}{16xyz}=\dfrac{5}{16abc}$.

Bài toán đưa về tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức P với điều kiện (1).

Giả thiết ta có: $\begin{cases} b+c=1-a \\ bc=\dfrac{5}{16}-a(b+c)=\dfrac{5}{16}-a(1-a)=a^2-a+\dfrac{5}{16} \end{cases}$.

Ta có: $Q=abc=a\left[\dfrac{5}{16}-a(b+c)\right]=a\left[\dfrac{5}{16}-a(1-a)\right]=a\left(a^2-a+\dfrac{5}{16}\right)$.

Mặt khác:

$$4bc\le(b+c)^2\Leftrightarrow 4\left(a^2-a+\frac{5}{16}\right)\le(1-a)^2\Leftrightarrow 12a^2-8a+1\le 0\Leftrightarrow \frac{1}{6}\le a\le\frac{1}{2}.$$

Xét hàm số $f(a)=a\left(a^2-a+\dfrac{5}{16}\right)$ liên tục trên đoạn $\left[\dfrac{1}{6};\dfrac{1}{2}\right]$ ta có:

$$f'(a)=3a^2-2a+\frac{5}{16};\ f'(a)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=\dfrac{1}{4} \\ a=\dfrac{5}{12} \end{array}\right..$$

Ta có $f\left(\dfrac{1}{6}\right)=f\left(\dfrac{5}{12}\right)=\dfrac{25}{864};\ f\left(\dfrac{1}{2}\right)=f\left(\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{1}{32}$.

Suy ra $\text{Max}Q=\dfrac{1}{32}\Rightarrow MinP=10$ và $MinQ=\dfrac{25}{864}\Rightarrow MinP=\dfrac{54}{5}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 10 đạt tại $y=z=2x$.

Giá trị lớn nhất của P bằng $\dfrac{54}{5}$ đạt tại $y=z=\dfrac{5}{2}x$.

Bài 49. Theo giả thiết ta có:

$$8(x+y+z)^2=27(xy+yz+zx)\Leftrightarrow\frac{xy}{(x+y+z)^2}+\frac{yz}{(x+y+z)^2}+\frac{zx}{(x+y+z)^2}=\frac{8}{27}.$$

Đặt $a=\dfrac{x}{x+y+z};\mathrm{b}=\dfrac{y}{x+y+z};c=\dfrac{z}{x+y+z}\Rightarrow\begin{cases} ab+bc+ca=\dfrac{8}{27} \\ a+b+c=1 \end{cases}$ (1).

Khi đó $P=\dfrac{8}{13}.\dfrac{x^3+y^3+z^3}{(x+y+z)(xy+yz+zx)}=\dfrac{27}{13}.\dfrac{x^3+y^3+z^3}{(x+y+z)^3}=\dfrac{27\left(a^3+b^3+c^3\right)}{13}$.

Từ hệ điều kiện (1) ta có: $\begin{cases} bc = \dfrac{8}{27} - a(b+c) = \dfrac{8}{27} - a(1-a) = a^2 - a + \dfrac{8}{27} \\ b + c = 1 - a \end{cases}$.

Mặt khác: $(b+c)^2 \geq 4bc \Leftrightarrow (1-a)^2 \geq 4\left(a^2 - a + \dfrac{8}{27}\right) \Leftrightarrow \dfrac{1}{9} \leq a \leq \dfrac{5}{9}$.

Khi đó:

$$P = \frac{27}{13}\left[a^3 + (b+c)^3 - 3bc(b+c)\right] = \frac{27}{13}\left[a^3 + (1-a)^3 - 3(1-a)\left(a^2 - a + \frac{8}{27}\right)\right]$$

$$= \frac{3}{13}\left(27a^3 - 27a^2 + 8a + 1\right)$$

Xét hàm số $f(a) = \dfrac{3}{13}\left(27a^3 - 27a^2 + 8a + 1\right)$ liên tục trên đoạn $\left[\dfrac{1}{9}; \dfrac{5}{9}\right]$ ta có:

$$f'(a) = \frac{3}{13}\left(81a^2 - 54a + 8\right); f'(a) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = \dfrac{2}{9} \\ a = \dfrac{4}{9} \end{array}\right..$$

Ta có $f\left(\dfrac{1}{9}\right) = f\left(\dfrac{4}{9}\right) = \dfrac{43}{117}; f\left(\dfrac{5}{9}\right) = f\left(\dfrac{2}{9}\right) = \dfrac{47}{119}$.

Suy ra $P_{max} = \dfrac{47}{117}; \mathrm{P}_{\min} = \dfrac{43}{117}$.

Bài 50. Đặt

$$x = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, y = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, z = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Khi đó $P = 2(x + y + z) - 9xyz = x(2 - 9yz) + 2(y + z)$.

Không mất tính tổng quát giả sử $x^2 = max\left\{x^2, y^2, z^2\right\} \Rightarrow x^2 \geq \dfrac{x^2 + y^2 + z^2}{3} = \dfrac{1}{3}$.

Ta có

$$\left[x(2 - 9yz) + 2(y + z)\right]^2 \leq \left[x^2 + (y + z)^2\right].\left[(2 - 9yz)^2 + 4\right] = (2yz + 1)\left(81y^2z^2 - 36yz + 8\right)$$

Đặt $t = yz \Rightarrow |t| \leq \dfrac{y^2 + z^2}{2} = \dfrac{1 - x^2}{2} \leq \dfrac{1}{3}$.

Khi đó $P \leq f(t) = (2t + 1)\left(81t^2 - 36t + 8\right)$ với $t \in \left[-\dfrac{1}{3}; \dfrac{1}{3}\right]$ ta có:

$f'(t) = 486t^2 + 18t - 20;\ f'(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -\dfrac{2}{9} \\ t = \dfrac{5}{27} \end{array}\right.$.

Ta có $f\left(-\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{29}{3}; f\left(-\dfrac{2}{9}\right) = \dfrac{100}{9}; f\left(\dfrac{5}{27}\right) = \dfrac{1369}{243}; f\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{25}{3}$.

Suy ra $\underset{t\in\left[-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right]}{Max} f(t) = f\left(-\dfrac{2}{9}\right) = \dfrac{100}{9};\ \underset{t\in\left[-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right]}{Min} f(t) = f\left(\dfrac{5}{27}\right) = \dfrac{1369}{243}$.

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng $\dfrac{10}{3}$ đạt tại chẳng hạn $a = -1, b = c = 2$ và giá trị nhỏ nhất của P bằng $-\dfrac{10}{3}$.

CHỦ ĐỀ 5: KỸ THUẬT SỬ DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC TIẾP TUYẾN

A. NỘI DUNG PHƯƠNG PHÁP

Định lý 1(Bất đẳng thức tiếp tuyến) Cho hàm số f(x) liên tục và có đạo hàm cấp 2 trên đoạn $[a;b]$.

Nếu $f''(x) \ge 0, \forall x \in [a;b]$ ta luôn có $f(x) \ge f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0), \forall x_0 \in [a;b]$.

Nếu $f''(x) \le 0, \forall x \in [a;b]$ ta luôn có $f(x) \le f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0), \forall x_0 \in [a;b]$.

Đẳng thức xảy ra trong hai bất đẳng thức trên $\Leftrightarrow x = x_0$.

Chứng minh.

Xét hàm số $g(x) = f(x) - f'(x_0)(x - x_0) - f(x_0), x \in [a;b], \forall x_0 \in [a;b]$.

Ta có $g'(x) = f'(x) - f'(x_0)$ do $f''(x) \ge 0, \forall x \in [a;b]$ nên f'(x) là hàm đồng biến trên $[a;b]$. Do đó g'(x) đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua x_0 nên g(x) đạt cực tiểu tại x_0 hay $g(x) \ge g(x_0)$.

$\Leftrightarrow f(x) - f'(x_0)(x - x_0) - f(x_0) \ge 0 \Leftrightarrow f(x) \ge f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0), \forall x \in [a;b]$.

Chứng minh tương tự.

Nhận xét. Hệ thức $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ chính là phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số f(x) tại điểm x_0. Do vậy nếu $f''(x) \ge 0, \forall x \in [a;b]$ thì tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại điểm bất kỳ trên đoạn $[a;b]$ luôn nằm phía dưới đồ thị hàm số. Nếu $f''(x) \le 0, \forall x \in [a;b]$ thì tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại điểm bất kỳ trên đoạn $[a;b]$ luôn nằm phía trên đồ thị hàm số.

Dấu hiệu nhận biết

Thông thường bài toán được phát biểu dưới dạng

Cho các số thực $x_1, x_2, ..., x_n$ thỏa mãn $g(x_1) + g(x_2) + ... + g(x_n) \geq k$ bài toán yêu cầu chứng minh

$f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_n) \geq \text{M}$ hoặc $f(x_1)f(x_2)...f(x_n) \geq M$.

Ta có thể áp dụng trực tiếp các định lý 1 và 2 hoặc lấy logarit hóa tự nhiên hai vế bất đẳng thức.

Kỹ năng cần vận dụng

Viết phương trình tiếp tuyến của hàm số f(x) tại điểm x_0 (điểm dấu bằng xảy ra thường là $x_0 = \frac{k}{n}$) có phương trình: $y = f'(x_0)(\text{x} - \text{x}_0) + f(x_0)$.

Xét tính dương âm của $f(x) - \left[f'(x_0)(\text{x} - \text{x}_0) + f(x_0) \right]$.

Thay x bởi $x_1, x_2, ..., x_n$ cuối cùng cộng lại theo vế n bất đẳng thức trên ta có ngay điều phải chứng minh.

Chú ý. Trong một số trường hợp không áp dụng trực tiếp được cách trên ta cần xét trường hợp hoặc xây dựng một hàm phụ phù hợp với điều kiện($f''(\text{x}) \geq 0, \text{f}''(\text{x}) \leq 0$) và điều kiện dấu bằng xảy ra.

Ví dụ 1. Cho *a,b,c* là các số thực thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 6$.

Chứng minh rằng $a^4 + b^4 + c^4 \geq 2\left(a^3 + b^3 + c^3\right)$.

Lời giải

Nhận xét. Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c = 2$ nên ta viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số $f(x) = x^4 - 2x^3$ tại điểm $x = 2$.

Phương trình tiếp tuyến là $y = 8x - 16$.

Ta có: $f(x) - 8x + 16 = (x-2)^2\left(x^2 - 2x + 4\right) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Do đó $f(a) + f(b) + f(\text{c}) \geq 8\left(a + b + c\right) - 3.16 = 0$.

Vì vậy $a^4 + b^4 + c^4 \geq 2\left(a^3 + b^3 + c^3\right)$.

Bài toán được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 2$.

Ví dụ 2. Cho *a,b,c* là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 1$.

Chứng minh rằng $\frac{a}{a^2+1} + \frac{b}{b^2+1} + \frac{c}{c^2+1} \leq \frac{9}{10}$.

Lời giải

Xét hàm số $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ với $x \in [0;1]$ ta có $f''(x) = \frac{2x\left(x^2-3\right)}{\left(x^2+1\right)^2} \leq 0, \forall x \in [0;1]$.

Áp dụng bất đẳng thức ii.định lý 1 ta được:

$$f(\mathrm{a}) \le \mathrm{f}'\left(\frac{1}{3}\right)\left(a-\frac{1}{3}\right)+f\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$f(b) \le f'\left(\frac{1}{3}\right)\left(b-\frac{1}{3}\right)+f\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$f(\mathrm{c}) \le \mathrm{f}'\left(\frac{1}{3}\right)\left(c-\frac{1}{3}\right)+f\left(\frac{1}{3}\right)$$

Cộng theo vế 3 bất đẳng thức trên ta được:

$$VT = f(a)+f(b)+f(c) \le f'\left(\frac{1}{3}\right)(a+b+c-1)+3f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{9}{10}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Nhận xét. Bất đẳng thức vẫn đúng trong trường hợp $a,b,c \ge -\frac{3}{4}$.

Thật vậy xét tiếp tuyến của f(x) tại điểm $x=\frac{1}{3}$ có phương trình là: $y=\frac{18}{25}x+\frac{3}{50}$.

Ta có: $f(x)-\frac{18}{25}x-\frac{3}{50}=-\frac{(3x-1)^2(4x+3)}{50(x^2+1)} \le 0, \forall x \ge -\frac{3}{4}$.

Do đó $VT = f(a)+f(b)+f(c) \le \frac{18}{50}(a+b+c)+3.\frac{3}{50}=\frac{9}{10}$.

Định lý 2 (Bất đẳng thức cát tuyến) Cho hàm số f(x) liên tục và có đạo hàm cấp 2 trên đoạn $[a;b]$.

Nếu $f''(x) \ge 0, \forall x \in [a;b]$ ta luôn có $f(x) \ge \frac{f(a)-f(b)}{a-b}(x-a)+f(\mathrm{a}), \forall x \in [a;b]$.

Nếu $f''(x) \le 0, \forall x \in [a;b]$ ta luôn có $f(x) \le \frac{f(a)-f(b)}{a-b}(x-a)+f(\mathrm{a}), \forall x \in [a;b]$.

Đẳng thức xảy ra trong hai bất đẳng thức trên $\Leftrightarrow x=a$ hoặc $x=b$.

Việc chứng minh hai bất đẳng thức trên chỉ cần chuyển vế và khảo sát hàm trực tiếp.

Ta có một bất đẳng thức khác hay được sử dụng

Định lý 3.(Bất đẳng thức Jensen) Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có đạo hàm cấp hai trên khoảng (a;b) và n số thực dương $\alpha_k, k=\overline{1,n}$ có tổng bằng 1 ta có

+ Nếu $f''(x)>0, \forall x\in(a;b)$ thì ta có

$$\alpha_1 f(x_1)+\alpha_2 f(x_2)+...+\alpha_n f(x_n)\ge f\left(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2+...+\alpha_n x_n\right).$$

Với mọi $x_k\in(a;b), k=\overline{1,n}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1=x_2=...=x_n$.

+ Nếu $f''(x)<0, \forall x\in(a;b)$ thì ta có

$$\alpha_1 f(x_1)+\alpha_2 f(x_2)+...+\alpha_n f(x_n)\le f\left(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2+...+\alpha_n x_n\right).$$

Với mọi $x_k\in(a;b), k=\overline{1,n}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1=x_2=...=x_n$.

Chứng minh.

a) Đặt $y=\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2+...+\alpha_n x_n$. Vì $f''(x)>0$ nên áp dụng bất đẳng thức tiếp tuyến ta có

$$f(x_k)\ge f'(y)\left(x_k-y\right)+f(y), k=\overline{1,n}$$
$$\Rightarrow \alpha_k f(x_k)\ge f'(y)\left(\alpha_k x_k-\alpha_k y\right)+\alpha_k f(y), k=\overline{1,n}.$$

Cộng lại theo vế n bất đẳng thức trên ta được

$$\sum_{k=1}^{n}\alpha_k f(x_k)\ge\sum_{k=1}^{n}\left(f'(y)\left(\alpha_k x_k-\alpha_k y\right)+\alpha_k f(y)\right)=f(y)=f\left(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2+...+\alpha_n x_n\right).$$

Bất đẳng thức được chứng minh.

Nhận xét. Ta có thể viết lại bất đẳng thức dưới dạng

$$\alpha_1 f(x_1)+\alpha_2 f(x_2)+...+\alpha_n f(x_n)\ge\left(\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n\right)f\left(\frac{\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2+...+\alpha_n x_n}{\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n}\right)$$

Trong đó $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ là các số thực dương bất kỳ.

b) Chứng minh tương tự.

Từ đây ta có ngay kết quả của bất đẳng thức AM – GM suy rộng.

(Bất đẳng thức AM – GM suy rộng) Cho $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ là các số thực dương có tổng bằng 1, khi đó với mọi số thực không âm bất kỳ $x_1,x_2,...,x_n$ ta có

$$\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2+...+\alpha_n x_n\ge x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}...x_n^{\alpha_n}.$$

Chứng minh.

Bất đẳng thức tương đương với:

$$\ln\left(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2+...+\alpha_n x_n\right)\ge\alpha_1\ln x_1+\alpha_2\ln x_2+...+\alpha_n\ln x_n.$$

Xét hàm số $f(x)=\ln x, x>0$ ta có $f''(x)=-\frac{1}{x^2}<0, \forall x>0$.

Khi đó áp dụng bất đẳng thức Jensen ta có ngay điều phải chứng minh.

Ví dụ 1. Cho x,y,z,t là các số thực dương thoả mãn điều kiện
$$x \le 2, x+y \le 6, x+y+z \le 12, x+y+z+t \le 24.$$

Chứng minh rằng $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t} \ge 1$.

Lời giải

Xét hàm số $f(t)=\frac{1}{t}$ với t dương ta có $f''(t)=\frac{2}{t^3}>0, \forall t>0$.

Do đó ta có

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}=\frac{1}{2}f\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{4}f\left(\frac{y}{4}\right)+\frac{1}{6}f\left(\frac{z}{6}\right)+\frac{1}{12}f\left(\frac{t}{12}\right)$$
$$\ge f\left(\frac{1}{2}.\frac{x}{2}+\frac{1}{4}.\frac{y}{4}+\frac{1}{6}.\frac{z}{6}+\frac{1}{12}.\frac{t}{12}\right)=\frac{144}{36x+9y+4z+t}$$
$$=\frac{144}{27x+5(x+y)+3(x+y+z)+(x+y+z+t)}$$
$$\ge \frac{144}{27.2+5.6+3.12+24}=1$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=2, y=4, z=6, t=12$.

Bài tập tương tự

Cho x,y,z là các số thực dương thoả mãn điều kiện $x \le 4, y \le 9, x+y+z \le 49$.

Chứng minh rằng $\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}}+\frac{1}{\sqrt{z}} \ge 1$.

Ví dụ 2. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện $abc=1$.

Chứng minh rằng $a^{\frac{a}{b}}.b^{\frac{b}{c}}.c^{\frac{c}{a}} \ge 1$.

Lời giải

Bất đẳng thức đã cho tương đương với $\frac{a}{b}\ln a+\frac{b}{c}\ln b+\frac{c}{a}\ln c \ge 0$.

Xét hàm số $f(x)=x\ln x, x>0$ ta có $f'(x)=\ln x+1; f''(x)=\frac{1}{x}>0, \forall x>0$.

Vì vậy $\frac{a}{b}\ln a+\frac{b}{c}\ln b+\frac{c}{a}\ln c=\frac{1}{b}f(a)+\frac{1}{c}f(b)+\frac{1}{a}f(c)$

$$\ge \left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)f\left(\frac{\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}\right)$$

Chú ý f(x) đồng biến và $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\ge\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$.

Thật vậy theo bất đẳng thức AM – GM ta có

$$\frac{a}{b}+2.\frac{b}{c}\ge 3\sqrt[3]{\frac{a}{b}.\frac{b^2}{c^2}}=\frac{3}{c}$$

$$\frac{b}{c}+2.\frac{c}{a}\ge 3\sqrt[3]{\frac{b}{c}.\frac{c^2}{a^2}}=\frac{3}{a}$$

$$\frac{c}{a}+2.\frac{a}{b}\ge 3\sqrt[3]{\frac{c}{a}.\frac{a^2}{b^2}}=\frac{3}{b}$$

Cộng lại theo vế ba bất đẳng thức trên ta có đpcm.

Từ đó suy ra

$$\frac{a}{b}\ln a+\frac{b}{c}\ln b+\frac{c}{a}\ln c\ge\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)f(1)=0.$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Chú ý. Bất đẳng thức trên vẫn đúng khi $abc\ge 1$.

B. BÀI TOÁN CHỌN LỌC

Bài 1. Chứng minh rằng với mọi số thực dương a,b,c ta có

$$\frac{(b+c-a)^2}{a^2+(b+c)^2}+\frac{(c+a-b)^2}{b^2+(c+a)^2}+\frac{(a+b-c)^2}{c^2+(a+b)^2}\ge\frac{3}{5}.$$

Lời giải

Bất đẳng thức có dạng thuần nhất chuẩn hoá $a+b+c=1$.

Bất đẳng thức trở thành

$$\frac{(1-2a)^2}{a^2+(1-a)^2}+\frac{(1-2b)^2}{b^2+(1-b)^2}+\frac{(1-2c)^2}{c^2+(1-c)^2}\ge\frac{3}{5}.$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{2a^2-2a+1}+\frac{1}{2b^2-2b+1}+\frac{1}{2c^2-2c+1}\le\frac{27}{5}$$

Tiếp tuyến của hàm số $y=\frac{1}{2x^2-2x+1}$ tại điểm $x=\frac{1}{3}$ là $y=\frac{54x+27}{25}$.

Vậy ta chứng minh: $\frac{1}{2x^2-2x+1}\le\frac{54x+27}{25}$.

Thật vậy bất đẳng thức tương đương với: $\frac{2(3x-1)^2(6x+1)}{25(2x^2-2x+1)}\ge 0$, luôn đúng.

Thay x bởi a,b,c rồi cộng lại theo vế ta có đpcm.

Bài tập tương tự

1) Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh

$$\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2}\le 8.$$

2) Cho a,b,c là các số thực dương có tổng bằng 3. Chứng minh

$$\frac{a^2+9}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{b^2+9}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{c^2+9}{2c^2+(a+b)^2}\le 5.$$

3) Cho a,b,c là các số thực không âm thoả mãn điều kiện $a+b+c>0$.

Chứng minh rằng $\dfrac{a^2}{5a^2+(b+c)^2}+\dfrac{b^2}{5b^2+(c+a)^2}+\dfrac{c^2}{5c^2+(a+b)^2}\le\dfrac{1}{3}$.

4) Cho a,b,c là các số thực không âm thoả mãn điều kiện $a+b+c>0$.
Chứng minh rằng

$$\frac{1}{2}\le\frac{a^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{b^2}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{c^2}{2c^2+(a+b)^2}\le\frac{2}{3}.$$

5) Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh

$$\frac{a(b+c)}{a^2+(b+c)^2}+\frac{b(c+a)}{b^2+(c+a)^2}+\frac{c(a+b)}{c^2+(a+b)^2}\le\frac{6}{5}.$$

Bài 2. Cho *a,b,c* là các số thực dương thỏa mãn điều kiện

$$\sqrt{a^2-ab+b^2}+\sqrt{b^2-bc+c^2}+\sqrt{c^2-ca+a^2}=12.$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+9}}+\dfrac{b}{\sqrt{b^2+9}}+\dfrac{c}{\sqrt{c^2+9}}$.

Lời giải

Chú ý: $\sqrt{a^2-ab+b^2}+\sqrt{b^2-bc+c^2}+\sqrt{c^2-ca+a^2}\ge a+b+c$.

Chứng minh.

Ta có: $\sqrt{a^2-ab+b^2}=\sqrt{\dfrac{3(a-b)^2+(a+b)^2}{4}}\ge\sqrt{\dfrac{(a+b)^2}{4}}=\dfrac{a+b}{2}$.

Tương tự: $\sqrt{b^2-bc+c^2}\ge\dfrac{b+c}{2},\sqrt{c^2-ca+a^2}\ge\dfrac{c+a}{2}$.

Cộng lại theo vế 3 bất đẳng thức trên ta có ngay điều phải chứng minh.

Từ đó suy ra: $a+b+c\le 12$.

Biểu thức P có dạng $P = f(a) + f(b) + f(c)$ trong đó $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}}$.

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}}$ trên $(0;+\infty)$ ta có:

$$f'(x) = \frac{9}{\sqrt{\left(x^2+9\right)^3}};\ f''(x) = -\frac{27x}{\sqrt{\left(x^2+9\right)^5}} < 0, \forall x > 0.$$

Do đó áp dụng bất ~~đẳng thức~~ ii ta được:

$f(a) \le f'(4)(a-4) + f(4)$

$f(b) \le f'(4)(b-4) + f(4)$

$f(c) \le f'(4)(c-4) + f(4)$

Cộng lại theo vế 3 bất đẳng thức trên ta được:

$$P = f(a) + f(b) + f(c) \le f'(4)(a+b+c-12) + 3f(4) \le 3f(4) = \frac{12}{5}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 4$.

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng $\dfrac{12}{5}$ đạt tại $a = b = c = 4$.

Bài tập tương tự

Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 = 3$.

Chứng minh rằng $\dfrac{1}{\sqrt{1+8a}} + \dfrac{1}{\sqrt{1+8b}} + \dfrac{1}{\sqrt{1+8c}} \ge 1$.

Bài 3. Cho a,b,c là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $a+b+c=3$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \left(a+\sqrt{a^2+1}\right)^b \left(b+\sqrt{b^2+1}\right)^c \left(c+\sqrt{c^2+1}\right)^a.$$

Lời giải

Lấy logarit hóa tự nhiên P ta được:

$$\ln P = b\ln\left(a+\sqrt{a^2+1}\right) + c\ln\left(b+\sqrt{b^2+1}\right) + a\ln\left(c+\sqrt{c^2+1}\right).$$

Xét hàm số $f(x) = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right), \forall x \ge 0$ ta có

$$f'(x) = \frac{1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} > 0,\ f''(x) = -\frac{x}{\sqrt{\left(x^2+1\right)^3}} \le 0, \forall x \ge 0.$$

Áp dụng định lý 1.ii ta được:

$f(a) \le f'(1)(a-1) + f(1);$

$f(b) \le f'(1)(b-1) + f(1);$

$f(c) \le f'(1)(c-1) + f(1).$

Lấy tổng ba bất đẳng thức trên ta được

$$\ln P = b.f(a) + c.f(b) + a.f(c)$$
$$\le b\left(f'(1)(a-1) + f(1)\right) + c\left(f'(1)(b-1) + f(1)\right) + a\left(f'(1)(c-1) + f(1)\right)$$
$$= (ab+bc+ca-a-b-c)f'(1) + (a+b+c)f(1)$$
$$\le \left(\frac{1}{3}(a+b+c)^2 - a-b-c\right)f'(1) + 3f(1) = 3f(1) = 3\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$$

Do đó $P \le \left(1+\sqrt{2}\right)^3$.

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng $\left(1+\sqrt{2}\right)^3$ đạt tại $a=b=c=1$.

Bài 4. Cho tam giác ABC nhọn tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \sin A.\sin^2 B.\sin^3 C.$$

Lời giải

Ta có $\ln P = \ln(\sin A) + 2\ln(\sin B) + 3\ln(\sin C)$.

Xét hàm số $f(x) = \ln(\sin x), x \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ ta có

$f'(x) = \cot x;\ f''(x) = -\frac{1}{\sin^2 x} < 0, \forall x \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right).$

Vì vậy

$$f(A) \le f'(M)(A-M) + f(M) = (A-M)\cot M + \ln(\sin M)$$
$$f(B) \le f'(N)(B-N) + f(N) = (B-N)\cot N + \ln(\sin N).$$
$$f(C) \le f'(P)(C-P) + f(P) = (C-P)\cot P + \ln(\sin P)$$

Với M,N,P là ba góc nhọn trong một tam giác.

Khi đó

$$\tan M.f(A) + \tan N.f(B) + \tan P.f(C) \le (A-M+B-N+C-P)$$
$$+\tan M.\ln(\sin M) + \tan N.\ln(\sin N) + \tan P.\ln(\sin P)$$
$$= \tan M.\ln(\sin M) + \tan N.\ln(\sin N) + \tan P.\ln(\sin P)$$

Do vậy ta chỉ cần chọn các góc M,N,P sao cho $\frac{\tan M}{1} = \frac{\tan N}{2} = \frac{\tan P}{3} = k$.

Mặt khác

$\tan M + \tan N + \tan P = \tan M.\tan N.\tan P$

$\Rightarrow k + 2k + 3k = 6k^3 \Rightarrow k = 1$.

$\Rightarrow \sin M = \frac{\tan M}{\sqrt{1+\tan^2 M}} = \frac{1}{\sqrt{2}}; \sin N = \frac{2}{\sqrt{5}}; \sin P = \frac{3}{\sqrt{10}}$

Thay vào bất đẳng thức trên ta có ngay

$\ln P = f(A) + 2f(B) + 3f(C) \le \ln\frac{1}{\sqrt{2}} + 2\ln\frac{2}{\sqrt{5}} + 3\ln\frac{3}{\sqrt{5}} = \ln\frac{27}{25\sqrt{5}} \Rightarrow P \le \frac{27}{25\sqrt{5}}$.

Dấu bằng đạt tại $\sin A = \sin M = \frac{1}{\sqrt{2}}; \sin B = \sin N = \frac{2}{\sqrt{5}}; \sin C = \sin P = \frac{3}{\sqrt{10}}$.

Tổng quát

Cho tam giác ABC nhọn tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \sin^m A.\sin^n B.\sin^n C .$$

Với m,n,p là các số thực dương.

Bài tập tương tự

Cho tam giác ABC nhọn, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$P = \tan A + 2\tan B + 3\tan C$.

Bài 5. Cho *a,b,c* là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $a+b+c=3$.

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \sqrt{a^2+a+4} + \sqrt{b^2+b+4} + \sqrt{c^2+c+4} .$$

Lời giải

Tìm giá trị nhỏ nhất của P

Xét hàm số $f(x) = \sqrt{x^2+x+4}$ với $x \ge 0$ ta có:

$f'(x) = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+4}}; f''(x) = \frac{15}{4\sqrt{\left(x^2+x+4\right)^3}} > 0, \forall x \ge 0$.

Theo bất đẳng thức i.định lý 1 ta có:

$f(a) \ge f'(1)\left(a-1\right) + f(1)$

$f(b) \ge \mathrm{f}'(1)\left(b-1\right) + f(1)$

$\mathrm{f}(\mathrm{c}) \ge \mathrm{f}'(1)\left(c-1\right) + f(1)$

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên ta được:

$P = f(a) + f(b) + f(c) \ge f'(1)\left(a+b+c-3\right) + 3f(1) = 3\sqrt{6}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $3\sqrt{6}$ đạt tại $a = b = c = 1$.

<u>Cách 2:</u> Ta phân tích được thừa số $a^2+a+4=\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{15}}{2}\right)^2$ thành tổng của hai bình phương nên nghĩ ngay đến việc áp dụng bất đẳng thức Mincopski khi đó $a=b=c=1$.

Sử dụng bất đẳng thức Mincopski ta có:

$$P=\sqrt{\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{15}}{2}\right)^2}+\sqrt{\left(b+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{15}}{2}\right)^2}+\sqrt{\left(c+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{15}}{2}\right)^2}$$

$$\geq\sqrt{\left(a+b+c+\frac{3}{2}\right)^2+\left(3.\frac{\sqrt{15}}{2}\right)^2}=3\sqrt{6}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

<u>Cách 3:</u> Ta có $\sqrt{a^2+a+4}=\sqrt{(a-1)^2+3(a+1)^2}$

Tìm giá trị lớn nhất của P

Như tôi đã nhận xét những bất đẳng thức với điều kiện các số thực không âm thông thường nếu không đánh giá qua các biến đối xứng(dấu bằng không đạt tại tâm) thì dấu bằng của bất đẳng thức thường xảy ra khi có một biến đạt tại biên. Với bài toán này dấu bằng xảy ra khi có hai biến bằng 0 khi đó biến còn lại bằng 3.

Vậy để tìm giá trị lớn nhất của P lúc này ta cần xây dựng hàm f(x) có $f''(x)\leq 0$ để áp dụng bất đẳng thức ii.định lý 2.

Với hàm số lúc đầu $f(x)=\sqrt{x^2+x+4}$ ta có $f''(x)=\dfrac{15}{4\sqrt{\left(x^2+x+4\right)^3}}>0,\forall x\geq 0$

vậy để tạo ra một hàm có đạo hàm cấp 2 âm ta xử lý như nào. Điều này xuất phát từ phát hiện dấu bằng xảy ra như trên và $f''(x)\leq\dfrac{15}{4.8}<1,\forall x\geq 0$.

Giả sử dấu bằng xảy ra khi $a=3,b=c=0$ khi đó xét hàm số như sau:

$g(x)=\sqrt{x^2+x+4}-(x-3)x.$ Ta có: $g''(x)=\dfrac{15}{4\sqrt{\left(x^2+x+4\right)^3}}-2<0,\forall x\geq 0$.

Áp dụng bất đẳng thức ii.định lý 2 ta được:

$$g(a)\leq\frac{g(3)-g(0)}{3-0}(a-3)+g(3)=\frac{4}{3}(a-3)+4$$

$$g(b)\leq\frac{g(3)-g(0)}{3-0}(b-0)+g(0)=\frac{4}{3}b+2$$

$g(c) \le \frac{g(3)-g(0)}{3-0}(c-0)+g(0)=\frac{4}{3}c+2$

Cộng theo vế 3 bất đẳng thức trên ta được:

$P = g(a)+g(b)+g(c)+a(a-3)+b(b-3)+c(c-3)$

$\le g(a)+g(b)+g(c) \le \frac{4}{3}(a+b+c-3)+8=8$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=3, b=c=0$.

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng 8 đạt tại $a=3, b=c=0$ hoặc các hoán vị.

<u>Cách 2:</u> Ngoài ra có thể áp dụng bất đẳng thức

$$\sqrt{x^2+x+4}+\sqrt{y^2+y+4} \le 2+\sqrt{(x+y)^2+x+y+4}, \forall x,y \ge 0; x+y \ge 1.$$

Chứng minh.

Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$x^2+y^2+x+y+8+2\sqrt{(x^2+x+4)(y^2+y+4)} \le 4+4\sqrt{(x+y)^2+x+y+4}+(x+y)^2+x+y+4$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x^2+x+4)(y^2+y+4)} \le xy+2\sqrt{(x+y)^2+x+y+4}$$

$$\Leftrightarrow (x^2+x+4)(y^2+y+4) \le x^2y^2+4xy\sqrt{(x+y)^2+x+y+4}+4\left[(x+y)^2+x+y+4\right]$$

$$\Leftrightarrow xy\left[4\sqrt{(x+y)^2+x+y+4}+x+y-7\right] \ge 0$$ (luôn đúng do $x+y \ge 1$).

Áp dụng vào bài toán

Trong ba số *a,b,c* luôn tồn tại hai số có tổng không nhỏ hơn 1 giả sử hai số đó là a và b khi đó áp dụng bất đẳng thức phụ trên ta được

$P \le 2+\sqrt{(a+b)^2+a+b+4}+\sqrt{c^2+c+4}$.

Mặt khác $a+b+c=3>1$ nên suy ra

$\sqrt{(a+b)^2+a+b+4}+\sqrt{c^2+c+4} \le 2+\sqrt{(a+b+c)^2+a+b+c+4}=6$.

Do đó $P \le 8$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=3, b=c=0$ hoặc các hoán vị.

Bài 6. Cho *a,b,c* là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $a+b+c=1$.

Chứng minh rằng $10(a^3+b^3+c^3)-9(a^5+b^5+c^5) \ge 1$.

Lời giải

Bài toán này bất đẳng thức xảy ra có hai trường hợp của dấu bằng là $a=b=c=\frac{1}{3}$ hoặc $a=1, b=c=0$ và các hoán vị.

Xét hàm số $f(x)=10x^3-9x^5$ với $x \in [0;1]$ ta có:

$f'(x) = 30x^2 - 45x^4; f''(x) = 60x - 180x^3 = 60x\left(1 - 3x^2\right)$.

Suy ra $f''(x) \geq 0, \forall x \in \left[0; \frac{1}{\sqrt{3}}\right], f''(x) \leq 0, \forall x \in \left[\frac{1}{\sqrt{3}}; 1\right]$.

Vậy ta cần phân chia trường hợp của các biến, không mất tính tổng quát giả sử $a \geq b \geq c$.

TH1: Nếu $a \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$ khi đó áp dụng bất đẳng thức i.định lý 1 ta được:

$$f(a) \geq f'\left(\frac{1}{3}\right)\left(a - \frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{1}{3}\right);$$

$$f(b) \geq f'\left(\frac{1}{3}\right)\left(b - \frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{1}{3}\right);$$

$$f(c) \geq f'\left(\frac{1}{3}\right)\left(c - \frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{1}{3}\right).$$

Cộng theo vế 3 bất đẳng thức trên ta được:

$$VT = f(a) + f(b) + f(c) \geq f'\left(\frac{1}{3}\right)\left(a + b + c - 1\right) + 3f\left(\frac{1}{3}\right) = 1.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{3}$.

TH2: Nếu $a \geq \frac{1}{\sqrt{3}}$ khi đó nếu $b \geq \frac{1}{\sqrt{3}}$ thì $a + b + c \geq \frac{2}{\sqrt{3}} > 1$ vô lý.

Vậy $a \geq \frac{1}{\sqrt{3}} \geq b \geq c$. Khi đó xét hàm $g(x) = 10x^3 - 9x^5 + 20x^2\left(x - 1\right)$ ta có $g''(x) = 180\left(1 - x^2\right) \geq 0, \forall x \in [0;1]$.

Áp dụng bất đẳng thức i.định lý 1 ta được:

$$g(a) \geq g'(1)\left(a - 1\right) + g(1) = \text{a}$$

$$g(b) \geq \frac{g(1) - g(0)}{1 - 0}\left(b - 0\right) + g(0) = \text{b}$$

$$\text{g(c)} \geq \frac{g(1) - g(0)}{1 - 0}\left(c - 0\right) + g(0) = \text{c}$$

Cộng theo vế 3 bất đẳng thức trên ta được:

$$VT = g(a) + g(b) + g(c) - a^2\left(a - 1\right) - b^2\left(b - 1\right) - c^2\left(c - 1\right)$$
$$\geq g(a) + g(b) + g(c) \geq \text{a} + \text{b} + \text{c} = 1$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = 1, b = c = 0$.

Bài toán được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{3}$ hoặc $a=1,b=c=0$ hoặc các hoán vị.

Bài 7. Cho $a,b,c>2$ thoả mãn điều kiện $\frac{1}{a^2-4}+\frac{1}{b^2-4}+\frac{1}{c^2-4}=\frac{1}{7}$.

Chứng minh rằng $\frac{1}{a+2}+\frac{1}{b+2}+\frac{1}{c+2}\le\frac{3}{7}$.

Lời giải

Với mọi $t>2$ ta có $\frac{1}{t+2}\le\frac{9}{10\left(t^2-4\right)}+\frac{1}{10}$.

Thật vậy bất đẳng thức tương đương với: $\frac{\left(t-5\right)^2}{10\left(t^2-4\right)}\ge 0$.

Áp dụng bất đẳng thức trên ta có

$$\frac{1}{a+2}+\frac{1}{b+2}+\frac{1}{c+2}\le\frac{9}{10}\left(\frac{1}{a^2-4}+\frac{1}{b^2-4}+\frac{1}{c^2-4}\right)+\frac{3}{10}=\frac{3}{7}.$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=5$.

Chú ý. Bất đẳng thức trên có thể chứng minh bằng BĐT Chebyshev.

C. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1. Cho x,y,z là các số thực dương thoả mãn điều kiện

$$x\le 4, y\le 9, x+y+z\le 49.$$

Chứng minh rằng $\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}}+\frac{1}{\sqrt{z}}\ge 1$.

Bài 2. Cho x,y,z là các số thực dương thoả mãn điều kiện $x\le 1, y\le 2, x+y+z\le 6$.

Chứng minh rằng $\left(x+1\right)\left(y+1\right)\left(z+1\right)\ge 4xyz$.

Bài 3. Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=1$.

Chứng minh rằng $\frac{a}{b^2+c^2}+\frac{b}{c^2+a^2}+\frac{c}{a^2+b^2}\ge\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Bài 4. Cho *a,b,c* là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $a+b+c=1$.

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\sqrt{a^2+11a+4}+\sqrt{b^2+11b+4}+\sqrt{c^2+11c+4}.$$

Bài 5. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện $a^2+b^2+c^2=1$.

Chứng minh rằng $\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1-b}+\frac{1}{1-c}\ge\frac{3\sqrt{3}+9}{2}$.

Bài 6. Cho a,b,c là các số thực dương có tích bằng 1 chứng minh

$$\frac{a}{\sqrt{1+a}}+\frac{b}{\sqrt{1+b}}+\frac{c}{\sqrt{1+c}}\ge\frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Bài 7. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện $a+b+c\ge\frac{3}{2}$.

Chứng minh rằng $\left(1+a^2\right)\left(1+b^2\right)\left(1+c^2\right)\ge\frac{125}{64}$.

Bài 8. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện $a+b+c\le\frac{9}{4}$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)\left(b+\sqrt{b^2+1}\right)\left(c+\sqrt{c^2+1}\right).$$

Bài 9. Cho x,y,z là các số thực dương thoả mãn điều kiện $x+y+z=3$.

Chứng minh rằng $\frac{4+\sqrt{x}}{4-x}+\frac{4+\sqrt{y}}{4-y}+\frac{4+\sqrt{z}}{4-z}\ge 5$.

Bài 10. Cho a,b,c là độ dài ba cạnh một tam giác chứng minh

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{9}{a+b+c}\ge 4\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right).$$

Bài 11. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện $a+b+c=3$.

Chứng minh rằng $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\ge a^2+b^2+c^2$.

Bài 12. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện $a^4+b^4+c^4=3$.

Chứng minh rằng $\frac{1}{4-ab}+\frac{1}{4-bc}+\frac{1}{4-ca}\le 1$.

Bài 13. Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh

$$\frac{(3a+b+c)^3}{3a^3+(b+c)^3}+\frac{(3b+c+a)^3}{3b^3+(c+a)^3}+\frac{(3c+a+b)^3}{3c^3+(a+b)^3}\le\frac{375}{11}.$$

Bài 14. Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh

$$\frac{3+\sqrt{3}}{9}\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\ge a+b+c+\sqrt{a^2+b^2+c^2}.$$

Bài 15. Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh

$$\frac{a}{\sqrt{b+c}}+\frac{b}{\sqrt{c+a}}+\frac{c}{\sqrt{a+b}}\ge\sqrt{\frac{3(a+b+c)}{2}}.$$

D. HƯỚNG DẪN GIẢI – ĐÁP SỐ

Bài 1. Xét hàm số $f(t)=1/\sqrt{t}, t>0$ ta có $f''(t)=\dfrac{3}{4t^2\sqrt{t}}>0, \forall t>0$.

Do đó ta có

$$\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}}+\frac{1}{\sqrt{z}}=\frac{1}{2}f\left(\frac{x}{4}\right)+\frac{1}{3}f\left(\frac{y}{9}\right)+\frac{1}{6}f\left(\frac{z}{36}\right)$$

$$\ge f\left(\frac{1}{2}.\frac{x}{4}+\frac{1}{3}.\frac{y}{9}+\frac{1}{6}.\frac{z}{36}\right)=\frac{\sqrt{216}}{\sqrt{27x+8y+z}}$$

$$=\frac{\sqrt{216}}{\sqrt{26x+7y+(x+y+z)}}\ge\frac{\sqrt{216}}{\sqrt{26.4+7.9+49}}=1$$

Bất đẳng thức được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=4, y=9, z=36$.

Bài 2. Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{y}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{z}\right)\ge\ln 4.$$

Xét hàm số $f(t)=\ln\left(1+\dfrac{1}{t}\right), t>0$ ta có $f'(t)=-\dfrac{1}{t^2+t}; f''(t)=\dfrac{2t+1}{\left(t^2+t\right)^2}>0, \forall t>0$.

Do đó sử dụng bất đẳng thức tiếp tuyến ta có

$$\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\ge f'(1)(x-1)+f(1)=-\frac{1}{2}(x-1)+\ln 2$$

$$\ln\left(1+\frac{1}{y}\right)\ge f'(2)(y-2)+f(2)=-\frac{1}{6}(y-2)+\ln\frac{3}{2}$$

$$\ln\left(1+\frac{1}{z}\right)\ge f'(3)(z-3)+f(3)=-\frac{1}{12}(z-3)+\ln\frac{4}{3}$$

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên ta được

$$\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{y}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{z}\right)\ge\ln 4-\frac{1}{2}(x-1)-\frac{1}{6}(y-2)-\frac{1}{12}(z-3)$$

$$=\ln 4-\left(\frac{6x+2y+z}{12}\right)+\frac{13}{4}$$

$$=\ln 4-\frac{5x+y+(x+y+z)}{12}+\frac{13}{4}\ge\ln 4$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=1, y=2, z=3$.

Bài 3. Viết lại bất đẳng thức dưới dạng: $\frac{a}{1-a^2}+\frac{b}{1-b^2}+\frac{c}{1-c^2}\geq\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Ta có: $\frac{a}{b^2+c^2}=\frac{a}{1-a^2}=\frac{a^2}{a\left(1-a^2\right)}\geq\frac{3\sqrt{2}a^2}{2}$.

Tương tự ta có: $\frac{b}{c^2+a^2}\geq\frac{3\sqrt{2}b^2}{2};\frac{c}{a^2+b^2}\geq\frac{3\sqrt{2}c^2}{2}$.

Cộng theo vế 3 bất đẳng thức trên ta được:

$$\frac{a}{b^2+c^2}+\frac{b}{c^2+a^2}+\frac{c}{a^2+b^2}\geq\frac{3\sqrt{2}}{2}\left(a^2+b^2+c^2\right)=\frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Bài 4. *Tìm giá trị nhỏ nhất của P*

Xét hàm số $f(x)=\sqrt{x^2+11x+4}$ với $x\geq 0$. Ta có $f''(x)=\frac{105}{4\sqrt{\left(x^2+11x+4\right)^3}}>0,\forall x\geq 0$.

Áp dụng bất đẳng thức i.định lý 1 ta được:

$$f(a)\geq f'\left(\frac{1}{3}\right)\left(a-\frac{1}{3}\right)+f\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$f(b)\geq f'\left(\frac{1}{3}\right)\left(b-\frac{1}{3}\right)+f\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$f(b)\geq f'\left(\frac{1}{3}\right)\left(c-\frac{1}{3}\right)+f\left(\frac{1}{3}\right)$$

Cộng theo vế 3 bất đẳng thức trên ta được:

$$P=f(a)+f(b)+f(c)\geq f'\left(\frac{1}{3}\right)\left(a+b+c-1\right)+3f\left(\frac{1}{3}\right)=2\sqrt{10}.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Tìm giá trị lớn nhất của P

Xét hàm số $g(x)=\sqrt{x^2+11x+4}-2x\left(x-1\right)$ với $x\geq 0$ ta có:

$$g''(x)=\frac{105}{4\sqrt{\left(x^2+11x+4\right)^3}}-4<0,\forall x\geq 0.$$

Áp dụng bất đẳng thức ii.định lý 2 ta được:

$$g(a) \le \frac{g(1)-g(0)}{1-0}(a-1)+g(1)=2(a-1)+4$$

$$g(b) \le \frac{g(1)-g(0)}{1-0}(b-0)+g(0)=2b+2$$

$$g(c) \le \frac{g(1)-g(0)}{1-0}(c-0)+g(0)=2c+2$$

Cộng theo vế 3 bất đẳng thức trên ta được:

$$P = g(a)+g(b)+g(c)+2a(a-1)+2b(b-1)+2c(c-1)$$
$$\le g(a)+g(b)+g(c) \le 2(a+b+c-1)+8=8$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=1, b=c=0$.

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng 8 đạt tại $a=1, b=c=0$ hoặc các hoán vị.

Bài 5. HD: Chứng minh $\frac{1}{1-x} \ge \frac{9+6\sqrt{3}}{4}x^2+\frac{3}{4}, \forall x \in (0;1)$.

Bài 6. HD: Chứng minh $\frac{x}{\sqrt{1+x}} \ge \frac{3\sqrt{2}}{4}x-\frac{\sqrt{2}}{4}, \forall x>0$.

Bài 7. HD: Chứng minh $\ln(1+x^2) \ge \frac{4}{5}x+\ln\frac{5}{4}-\frac{2}{5}, \forall x \in \left[0;\frac{3}{2}\right]$.

Bài toán tổng quát xem chương 4.

Bài 8. Lấy Logarit tự nhiên P ta được

$$\ln P = \ln\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)+\ln\left(b+\sqrt{b^2+1}\right)+\ln\left(c+\sqrt{c^2+1}\right).$$

Xét hàm số $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right), x>0$ ta có

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}; f''(x)=-\frac{x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}<0, \forall x>0.$$

Do đó $f(x) \le f'\left(\frac{3}{4}\right)\left(x-\frac{3}{4}\right)+f\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{4}{5}x+\ln 2-\frac{3}{5}$.

Từ đó suy ra

$$\ln P = \ln\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)+\ln\left(b+\sqrt{b^2+1}\right)+\ln\left(c+\sqrt{c^2+1}\right)$$
$$\le \frac{4}{5}(a+b+c)+3\ln 2-\frac{9}{5} \le 3\ln 2$$
$$\Rightarrow P \le 8$$

Với $a=b=c=\frac{3}{4}$ thì P bằng 8. Vậy giá trị lớn nhất của P bằng 8.

Bài 9. Phương trình tiếp tuyến của hàm số $y=\frac{4+\sqrt{x}}{4-x}$ tại điểm $x=1$ là $y=\frac{13}{18}x+\frac{17}{18}$.

Ta đi chứng minh: $\frac{4+\sqrt{x}}{4-x}\ge\frac{13}{18}x+\frac{17}{18}$.

Thật vậy bất đẳng thức tương đương với:

$$4+t\ge\left(4-t^2\right)\left(\frac{13}{18}t^2+\frac{17}{18}\right), t=\sqrt{x}\in\left(0;\sqrt{3}\right)\Leftrightarrow(t-1)^2\left(13t^2+26t+4\right)\ge 0.$$

Ta có điều phải chứng minh.

Xây dựng hai bất đẳng thức tương tự cho y,z rồi cộng lại theo vế ta có đpcm.

Bài 10. Bất đẳng thức có dạng thuần nhất chuẩn hoá $a+b+c=1$.

Bài toán đưa về chứng minh $\frac{1}{a}-\frac{4}{1-a}+\frac{1}{b}-\frac{4}{1-b}+\frac{1}{c}-\frac{4}{1-c}\ge -9$.

Chú ý do a,b,c là độ dài ba cạnh một tam giác nên $a,b,c\in\left(0;\frac{1}{2}\right)$.

Tiếp tuyến của hàm số $y=\frac{1}{x}-\frac{4}{1-x}$ tại điểm $x=\frac{1}{3}$ là $y=3-18x$.

Vậy ta chứng minh: $\frac{1}{x}-\frac{4}{1-x}\ge 3-18x, \forall x\in\left(0;\frac{1}{2}\right)$.

Thật vậy bất đẳng thức tương đương với: $\frac{(3x-1)^2(1-2x)}{x(1-x)}\ge 0$ luôn đúng.

Do đó $\frac{1}{a}-\frac{4}{1-a}\ge 3-18a;\frac{1}{b}-\frac{4}{1-b}\ge 3-18b;\frac{1}{c}-\frac{4}{1-c}\ge 3-18c$.

Cộng lại theo vế ba bất đẳng thức trên ta có đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

CHỦ ĐỀ 6: KỸ THUẬT KHẢO SÁT HÀM NHIỀU BIẾN

A. NỘI DUNG PHƯƠNG PHÁP

Bài toán. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P(x,y,z)$ thỏa mãn điều kiện K cho trước.

Xuất phát từ giả thiết bài toán tìm được mối liên hệ(điều kiện x so với y,z) giữa biến x với hai biến còn lại. Coi $f(x)=P(x,y,z)$ là hàm số với biến x và y,z là tham số. Khảo sát hàm số với biến x tìm ra giá trị nhỏ nhất, lớn nhất của f(x) chẳng hạn đạt tại $x = x_0$. Khi đó tiếp tục khảo sát hàm số $g(y) = P(x_0, y, z)$ và tìm ra giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của g(y) từ đó suy ra kết quả bài toán.

Các điểm cần lưu ý

- Bài toán xử lý được bằng phương pháp này thường cho mối ràng buộc các biến cùng thuộc đoạn $\left[a;b\right]$ cho trước và dấu bằng của bất đẳng thức đạt tại biên.
- Với bài toán có hai biến số x,y ta thực hiện tương tự.
- Nếu bất đẳng thức có dạng đối xứng 3 biến ta thường giả sử $x \geq y \geq z$ để thuận tiện cho việc đánh giá tính đơn điệu của hàm số.
- Đánh giá cuối cùng là hàm một biến ta có thể khảo sát hàm số hoặc biến đổi tương đương để có nhanh kết quả.

Một bài toán sử dụng phương pháp này hay gặp trong đề thi

Bài toán. Cho a,b,c và x,y,z là các số thực dương thoả mãn điều kiện $ax + by + cz = xyz$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x + y + z$.

➢ ***PHƯƠNG PHÁP***

Theo giả thiết ta có:

$$ax + by + cz = xyz \Rightarrow z = \frac{ax+by}{xy-c}, \left(xy > c\right) \Rightarrow P = f(y) = x + y + \frac{ax+by}{xy-c}.$$

Xét hàm số $f(y) = x + y + \dfrac{ax+by}{xy-c}$ ta có

$$f'(y) = 1 - \frac{bc+ax^2}{\left(xy-c\right)^2}; f'(y) = 0 \Leftrightarrow \left(xy-c\right)^2 = bc + ax^2$$

$$\Leftrightarrow y = y_0 = \frac{c+\sqrt{bc+ax^2}}{x}$$

Ta có f'(y) đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua y_0 nên f(y) đạt cực tiểu tại y_0.

Vì vậy

$$P \geq f(y_0) = x + \frac{c+\sqrt{bc+ax^2}}{x} + \frac{ax + b.\dfrac{c+\sqrt{bc+ax^2}}{x}}{\sqrt{bc+ax^2}}$$

$$= x + \frac{c+\sqrt{bc+ax^2}}{x} + \frac{b}{x} + \sqrt{bc+ax^2}$$

$$= \frac{x^2 + b + c + \left(x+1\right)\sqrt{bc+ax^2}}{x}$$

Thực hiện xét tính đơn điệu của hàm số $g(x)=\dfrac{x^2+b+c+(x+1)\sqrt{bc+ax^2}}{x}$ ta có kết quả bài toán.

Ví dụ 1. Cho x,y,z là các số thực dương thoả mãn điều kiện $2x+4y+7z=2xyz$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x+y+z$.

Lời giải

Theo giả thiết ta có $z=\dfrac{2x+4y}{2xy-7}$. Khi đó $P=f(y)=x+y+\dfrac{2x+4y}{2xy-7}$.

Xét hàm số $f(y)=x+y+\dfrac{2x+4y}{2xy-7}$ với $y>\dfrac{7}{2x}$ ta có

$$f'(y)=1-\frac{4x^2+28}{(2xy-7)^2};\ f'(y)=0\Leftrightarrow (2xy-7)^2=4x^2+28$$

$$\Leftrightarrow y=y_0=\frac{7+2\sqrt{x^2+7}}{2x}>\frac{7}{2x}$$

Ta có f'(y) đổi dầu từ âm sang dương khi đi qua y_0 nên f(y) đạt cực tiểu tại y_0. Vì vậy

$$P\ge f(y_0)=x+\frac{7+2\sqrt{x^2+7}}{2x}+\frac{2x+4.\dfrac{7+2\sqrt{x^2+7}}{2x}}{2\sqrt{x^2+7}}=x+\frac{11}{2x}+\frac{2\sqrt{x^2+7}}{x}.$$

Xét hàm số $g(x)=x+\dfrac{11}{2x}+\dfrac{2\sqrt{x^2+7}}{x}$ với $x>0$ ta có

$$g'(x)=\frac{2x^2-11-\dfrac{28}{\sqrt{x^2+7}}}{2x^2};g'(x)=0\Leftrightarrow 2x^2-11=\frac{28}{\sqrt{x^2+7}}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge\sqrt{\dfrac{11}{2}}\\(2x^2-11)^2(x^2+7)-28^2=0\end{cases}\Leftrightarrow x=3$$

Từ đó suy ra $g_{\min}=g(3)=\dfrac{15}{2}\Rightarrow P\ge\dfrac{15}{2}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=3,y=\dfrac{5}{2},z=2$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 15/2 đạt tại $x=3,y=\dfrac{5}{2},z=2$.

Chú ý. Sử dụng bất đẳng thức AM – GM ta có:

$$x+\frac{11}{2x}+\frac{2\sqrt{x^2+7}}{x}=x+\frac{11}{2x}+\frac{\sqrt{\left(x^2+7\right)\left(9+7\right)}}{2x}$$

$$\geq x+\frac{11}{2x}+\frac{3x+7}{2x}=x+\frac{9}{x}+\frac{3}{2}\geq 2\sqrt{x.\frac{9}{x}}+\frac{3}{2}=\frac{15}{2}$$

Ta có kết quả tương tự trên.

Kỹ thuật cố định biến số

Ví dụ 1. Cho a,b,c là các số thực không âm thoả mãn điều kiện $ab+bc+ca>0$.

Chứng minh rằng $\left(1+\frac{4a}{b+c}\right)\left(1+\frac{4b}{c+a}\right)\left(1+\frac{4c}{a+b}\right)\geq 25$.

Lời giải

Bất đẳng thức được viết dưới dạng

$$\frac{\left(4a+b+c\right)\left(4b+c+a\right)\left(4c+a+b\right)}{\left(a+b\right)\left(c+a\right)\left(c+b\right)}-25\geq 0\Leftrightarrow f\left(ab\right)=\frac{\alpha ab+\beta}{\lambda ab+\gamma}-25\geq 0.$$

Trong đó $\alpha,\beta,\lambda,\gamma$ là các hằng số khi ta cố định c và $a+b$.

Rõ ràng f(ab) là hàm luôn đồng biến hoặc luôn nghịch biến do đó với $ab\in\left[0;\frac{\left(a+b\right)^2}{4}\right]$ thì f(ab) đạt giá trị nhỏ nhất hoặc tại 0(khi đó có ít nhất một số bằng 0) hoặc tại $\frac{\left(a+b\right)^2}{4}$ (khi đó 2 số bằng nhau).

Vậy ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức trong hai trường hợp.

<u>+ TH1:</u> Nếu có một số bằng 0 giả sử là a. Ta cần chứng minh

$$\left(1+\frac{4b}{c}\right)\left(1+\frac{4c}{b}\right)\geq 25.$$

Bất đẳng thức này là hiển nhiên theo C–S, thật vậy

$$\left(1+\frac{4b}{c}\right)\left(1+\frac{4c}{b}\right)\geq\left(1+\sqrt{\frac{4b}{c}.\frac{4c}{b}}\right)^2=25.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $b=c$.

<u>+ TH2:</u> Khi 2 số bằng nhau giả sử là a và b, khi đó ta cần chứng minh.

$$\left(1+\frac{4a}{a+c}\right)\left(1+\frac{4a}{a+c}\right)\left(1+\frac{4c}{2a}\right)\geq 25$$

$$\Leftrightarrow\left(1+\frac{4a}{a+c}\right)^2\left(1+\frac{2c}{a}\right)\geq 25\Leftrightarrow\left(1+\frac{4}{1+\frac{c}{a}}\right)^2\left(1+\frac{2c}{a}\right)-25\geq 0$$

Đặt $x=\frac{c}{a}\ge 0$ ta phải chứng minh

$$\left(1+\frac{4}{x+1}\right)^2(1+2x)-25\ge 0\Leftrightarrow x\left(x^2-2x+5\right)\ge 0\Leftrightarrow x\left[\left(x-1\right)^2+4\right]\ge 0.$$

Bất đẳng thức cuối luôn đúng.

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi 1 $a=b,c=0$ hoặc các hoán vị.

Cách 2: Đặt $x=\frac{2a}{b+c},y=\frac{2b}{c+a},z=\frac{2c}{a+b}\Rightarrow xy+yz+zx+xyz=4$.

Theo bất đẳng thức đã được chứng minh ta có

$x+y+z\ge xy+yz+zx$.

Vậy bài toán đưa về chứng minh

$$(1+2x)(1+2y)(1+2z)\ge 25\Leftrightarrow 2xyz+x+y+z\ge 4\Leftrightarrow (x+y+z+xyz)+xyz\ge 4.$$

Bất đẳng thức cuối đúng bởi vì $x+y+z+xyz\ge xy+yz+zx+xyz=4$.

Ví dụ 2. Cho a,b,c là các số thực dương có tổng bằng 3. Chứng minh

$$\frac{a}{1+(b+c)^2}+\frac{b}{1+(a+c)^2}+\frac{c}{1+(a+b)^2}\le\frac{3(a^2+b^2+c^2)}{a^2+b^2+c^2+12abc}.$$

Lời giải

Bất đẳng thức đã cho tương đương với:

$$\left[a-\frac{a}{1+(b+c)^2}\right]+\left[b-\frac{b}{1+(c+a)^2}\right]+\left[c-\frac{c}{1+(a+b)^2}\right]\ge 3-\frac{3(a^2+b^2+c^2)}{a^2+b^2+c^2+12abc}$$

$$\Leftrightarrow\frac{a(b+c)^2}{1+(b+c)^2}+\frac{b(c+a)^2}{1+(c+a)^2}+\frac{c(a+b)^2}{1+(a+b)^2}\ge\frac{36abc}{a^2+b^2+c^2+12abc}$$

Xét hàm số $y=\frac{x}{x+1}$ tăng do đó với $(b+c)^2\ge 4bc;(c+a)^2\ge 4ca;(a+b)^2\ge 4ab$

Ta có:

$$\frac{a\left(b+c\right)^2}{1+\left(b+c\right)^2}\ge\frac{4abc}{1+4bc};\frac{b\left(c+a\right)^2}{1+\left(c+a\right)^2}\ge\frac{4abc}{1+4ca};\frac{c\left(a+b\right)^2}{1+\left(a+b\right)^2}\ge\frac{4abc}{1+4ab}.$$

Do đó ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{4abc}{1+4bc}+\frac{4abc}{1+4ca}+\frac{4abc}{1+4ab}\ge\frac{36abc}{a^2+b^2+c^2+12abc}=\frac{36abc}{\sum_{\text{cyc}}a^2(1+4bc)}.$$

Bất đẳng thức cuối đúng bởi theo C –S ta có

$$\sum_{cyc}\frac{1}{1+4bc}\sum_{cyc}a^2(1+4bc)\ge(a+b+c)^2=9.$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Ví dụ 3. Cho x,y,z là các số thực thuộc đoạn $[1;2]$.

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{x^2y+y^2z+z^2x}{x^4+y^4+z^4}$.

Lời giải

Tìm giá trị lớn nhất

Do điều kiện bài toán $x,y,z\in[1;2]\Rightarrow x^2y\le x^2y^2;y^2z\le y^2z^2;z^2x\le z^2x^2$.

Do đó $P\le\dfrac{x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2}{x^4+y^4+z^4}$.

$$=1-\frac{x^4+y^4+z^4-x^2y^2-y^2z^2-z^2x^2}{x^4+y^4+z^4}$$

$$=1-\frac{\left(x^2-y^2\right)^2+\left(y^2-z^2\right)^2+\left(z^2-x^2\right)^2}{2\left(x^4+y^4+z^4\right)}\le1$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$.

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng 1 đạt tại $x=y=z=1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất

Với giả thiết bài toán x,y,z thuộc đoạn nên thường đạt cực trị tại biên. Thử x,y,z chọn trong 2 số (1,2) thay vào P ta thấy giá trị nhỏ nhất

$$x=y=1;z=2\Rightarrow P=\frac{7}{2+16}=\frac{7}{18}.$$

Vậy ta đi chứng minh $P\ge\dfrac{7}{18}$.

Trước tiên chuyển P về biểu thức đối xứng của x,y,z.

Theo giả thiết ta có: $(x-1)(x-2)\le0\Leftrightarrow x^2\le3x-2;y^2\le3y-2;z^2\le3z-2$.

Suy ra: $x^2y+y^2z+z^2x\ge x^2\left(\dfrac{y^2+2}{3}\right)+y^2\left(\dfrac{z^2+2}{3}\right)+z^2\left(\dfrac{x^2+2}{3}\right)$

$$=\frac{x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+2\left(x^2+y^2+z^2\right)}{3}$$

Do vậy ta chỉ cần chứng minh.

$$\frac{x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+2\left(x^2+y^2+z^2\right)}{3}\ge\frac{7}{18}\left(x^4+y^4+z^4\right)$$
$$\Leftrightarrow 7\left(x^4+y^4+z^4\right)-6\left(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2\right)-12\left(x^2+y^2+z^2\right)\le 0$$

Để cho đơn giản ta đặt $a=x^2,b=y^2,c=z^2\Rightarrow a,b,c\in[1;4]$ và bất đẳng thức trở thành: $7\left(a^2+b^2+c^2\right)-6(ab+bc+ca)-12(a+b+c)\le 0$.

Vế trái ký hiệu là $P(a,b,c)$ là tam thức bậc hai của a với hệ số của a^2 dương nên đạt max tại 1 hoặc 4.

Do đó $P(a,b,c)\le\max\left\{P(1,b,c);P(4,b,c)\right\}$.

Bằng cách tương tự $P(1,b,c);P(4,b,c)$ là tam thức bậc hai với hệ số b^2; c^2 dương nên

$$\begin{aligned}P(1,b,c)&\le\max\left\{P(1,1,c);P(1,4,c)\right\}\\&\le\max\left\{\max\left\{P(1,1,1);P(1,1,4)\right\};\max\left\{P(1,4,1);P(1,4,4)\right\}\right\}=0\end{aligned}$$

Và

$$\begin{aligned}P(4,b,c)&\le\max\left\{P(4,1,c);P(4,4,c)\right\}\\&\le\max\left\{\max\left\{P(4,1,1);P(4,1,4)\right\};\max\left\{P(4,4,1);P(4,4,4)\right\}\right\}=0\end{aligned}$$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Với $x=y=1,z=2$ thì P bằng 7/18. Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 7/18.

Nhận xét. Thực chất ta có đánh giá trên dựa vào tính chất của hàm lồi, đó là nếu $f''(x)\ge 0;\forall x\in[a;b]$ thì f(x) đạt max tại a hoặc tại b.

B. BÀI TOÁN CHỌN LỌC

Bài 1. Cho a,b là hai số thực thuộc đoạn $\left[\frac{1}{4};1\right]$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{1}{2+3a}+\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+1}.$$

Lời giải

Xét hàm số $f(a)=\frac{1}{2+3a}+\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+1}$ trên đoạn $\left[\frac{1}{4};1\right]$ ta có:

$$f'(a)=-\frac{3}{(2+3a)^2}+\frac{b}{(a+b)^2}=\frac{b(2+3a)^2-3(a+b)^2}{(2+3a)^2(a+b)^2}>0\ \text{ vì}$$

$$b(2+3a)^2-3(a+b)^2=9a^2b+6ab+4b-3a^2-3b^2\ge 9a^2b+6a^2b+4b-3a^2-3b^2$$
$$=3a^2(5b-1)+b(4-3b)>0,\forall a,b\in\left[\frac{1}{4};1\right]$$

Vậy f(a) là hàm đồng biến trên đoạn $\left[\frac{1}{4};1\right]$ suy ra

$$P = f(\text{a}) \geq \text{f}\left(\frac{1}{4}\right) = g(b) = \frac{4}{11} + \frac{1}{1+4b} + \frac{b}{b+1} = \frac{(2b-1)^2}{3(b+1)(4b+1)} + \frac{34}{33} \geq \frac{34}{33}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = \frac{1}{4}, b = \frac{1}{2}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\frac{34}{33}$ đạt tại $a = \frac{1}{4}, b = \frac{1}{2}$.

Nhận xét. Để có biến đổi $g(b) \geq \frac{34}{33}$ thực chất ta đã xét hàm một biến với b tìm ra g(b) đạt cực tiểu tại $b = \frac{1}{2}$.

Bài 2. Cho *x*,*y* là hai số thực thuộc đoạn $[1;4]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \left| x - y + \frac{y-1}{x} + \frac{1-x}{y} \right|.$$

Lời giải

Ta có: $x - y + \frac{y-1}{x} + \frac{1-x}{y} = \frac{(x-y)(y-1)(x-1)}{xy} \Rightarrow P = \left|\frac{(x-y)(y-1)(x-1)}{xy}\right|$.

Do P là biểu thức đối xứng với x và y nên không mất tính tổng quát ta giả sử

$$x \geq y \Rightarrow P = \frac{(x-y)(x-1)(y-1)}{xy} = \frac{y-1}{y}\left[\frac{x^2 - (y+1)x + y}{x}\right].$$

Xét hàm số $f(x) = \frac{y-1}{y}\left[\frac{x^2 - (y+1)x + y}{x}\right]$ liên tục trên đoạn $[1;4]$ ta có:

$$f'(x) = \frac{y-1}{y}\left(1 - \frac{y}{x^2}\right) = \frac{(y-1)(x^2 - y)}{x^2 y} \geq 0, \forall x \geq y \geq 1.$$

Do đó f(x) là hàm đồng biến trên đoạn $[1;4]$.

Suy ra $P = f(x) \leq f(4) = g(y) = \frac{(y-1)(12-3y)}{4y}$.

Xét hàm số $g(y) = \frac{(y-1)(12-3y)}{4y}$ liên tục trên đoạn $[1;4]$ ta có:

$g'(y)=\dfrac{12-3y^2}{4y^2}; g'(y)=0 \Leftrightarrow y=2\in[1;4]$. Ta có g'(y) đổi dấu từ dương sang âm khi đi qua $y=2$ nên g(y) đạt cực đại tại $y=2$. Do đó $P\le g(y)\le g(2)=\dfrac{3}{4}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=4, y=2$.

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng $\dfrac{3}{4}$ đạt tại $x=2, y=4$ hoặc $x=4, y=2$.

Bài 3. Cho hai số thực $x\ge 1\ge y>0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A=\frac{\left(x^2+y^2\right)\sqrt{xy+x+y}}{xy\left(x+y+1\right)}.$$

Lời giải

Đây là biểu thức đối xứng với tổng $x+y$ và tích xy nên suy nghĩ ngay đến việc đặt $S=x+y, P=xy$ từ điều kiện $(1-x)(1-y)\le 0 \Leftrightarrow x+y-1\ge xy$ ta có ngay $0<P\le S-1$.

Ta có: $A=\dfrac{\left(S^2-2P\right)\sqrt{S+P}}{P\left(S+1\right)}$.

Coi vế phải là hàm số với P và tham số S ta được:

$f'(P)=-\dfrac{2S^3+S^2P+2P^2}{2\left(S+1\right)P^2\sqrt{S+P}}<0, \forall S, P>0$ do đó f(P) là hàm nghịch biến trên $(0;S-1]$.

Do đó $f(P)\ge f\left(S-1\right)=\dfrac{\left(S^2-2S+2\right)\sqrt{2S-1}}{S^2-1}$.

Xét hàm số $g(S)=\dfrac{\left(S^2-2S+2\right)\sqrt{2S-1}}{S^2-1}$ trên $(1;+\infty)$ ta được:

$$g'(S)=\frac{S^4+2S^3-13S^2+12S-4}{\sqrt{2S-1}\left(S^2-1\right)^2}=\frac{(S-2)\left(S^3+4S^2-5S+2\right)}{\sqrt{2S-1}\left(S^2-1\right)^2};$$

$g'(S)=0 \xleftrightarrow{S>1} S=2.$

Ta có g'(S) đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua $S=2$ nên g(S) đạt cực tiểu tại $S=2$ hay $g(S)\ge g(2)=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của A bằng $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ đạt tại $x=y=1$.

Bài 4. Cho *x,y,z* là các số thực thỏa mãn $1 \le x \le y \le z \le 4$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = (x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$.

Lời giải

Xét hàm số $f(x) = (x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$ trên $[1;4]$ ta có:

$$f'(x) = \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}-\frac{x+y+z}{x^2} = (y+z)\left(\frac{1}{yz}-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{(x^2-yz)(y+z)}{x^2yz} \le 0.$$

Do đó f(x) là hàm nghịch biến trên $[1;4]$ suy ra $f(x) \le f(1)$ hay

$$P = f(x) \le f(1) = g(y) = (1+y+z)\left(1+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right).$$

Xét hàm số $g(y) = (1+y+z)\left(1+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$ trên đoạn $[1;4]$ ta có:

$$g'(y) = 1+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}-\frac{1+y+z}{y^2} = \frac{z+1}{yz}-\frac{1+z}{y^2} = \frac{(y-z)(z+1)}{y^2z} \le 0.$$

Do đó g(y) là hàm nghịch biến trên đoạn $[1;4]$ suy ra

$$P \le g(y) \le g(1) = (2+z)\left(2+\frac{1}{z}\right) = h(z) = 5+2z+\frac{2}{z}.$$

Xét hàm số $h(z) = 5+2z+\frac{2}{z}$ trên đoạn $[1;4]$ ta có:

$h'(z) = 2-\frac{2}{z^2} = \frac{2(z^2-1)}{z^2} \ge 0$ nên h(z) là hàm đồng biến trên đoạn $[1;4]$.

Do đó $P \le h(z) \le h(4) = \frac{27}{2}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = 1, z = 4$.

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng $\frac{27}{2}$ đạt tại $x = y = 1, z = 4$.

Bài 5. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện $abc + a + c = b$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{2}{a^2+1}-\frac{2}{b^2+1}+\frac{3}{c^2+1}$.

Lời giải

Theo giả thiết ta có $b(1-ac) = a+c > 0 \Rightarrow 1-ac > 0 \Rightarrow a < \frac{1}{c}; b = \frac{a+c}{1-ac}$.

Khi đó $P=\frac{2}{a^2+1}-\frac{2}{\left(\frac{a+c}{1-ac}\right)^2+1}+\frac{3}{c^2+1}=\frac{2\left(a^2+2ac+2c^2+1\right)^2}{\left(a^2+1\right)\left(c^2+1\right)}+\frac{3}{c^2+1}-2$.

Xét hàm số $f(a)=\frac{2\left(a^2+2ac+2c^2+1\right)^2}{\left(a^2+1\right)\left(c^2+1\right)}+\frac{3}{c^2+1}-2$ ta có

$$f'(a)=\frac{-4c\left(a^2+2ac-1\right)}{\left(a^2+1\right)^2\left(c^2+1\right)};\ f'(a)=0\Leftrightarrow a=\sqrt{c^2+1}-c.$$

Ta có f'(a) đổi dấu từ dương sang âm khi đi qua $\sqrt{c^2+1}-c$.

Vì vậy $f(a)\le f\left(\sqrt{c^2+1}-c\right)=\frac{2c}{\sqrt{c^2+1}}+\frac{3}{c^2+1}$.

Xét hàm số $g(c)=\frac{2c}{\sqrt{c^2+1}}+\frac{3}{c^2+1}$ với c dương ta có

$$g'(c)=\frac{2\left(1-8c^2\right)}{\left(c^2+1\right)^2\left(3c+\sqrt{c^2+1}\right)};g'(c)=0\Leftrightarrow c=\frac{1}{2\sqrt{2}},(c>0).$$

Ta có g'(c) đổi dấu từ dương sang âm khi đi qua $c=\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Vì vậy $g(c)\le g\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)=\frac{10}{3}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $c=\frac{1}{2\sqrt{2}},a=\sqrt{\frac{1}{8}+1}-\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}},b=\sqrt{2}$.

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng 10/3 đạt tại

$$c=\frac{1}{2\sqrt{2}},a=\sqrt{\frac{1}{8}+1}-\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}},b=\sqrt{2}.$$

Nhận xét. Ta có thể giải bài toán bằng lượng giác xem chương sau.

Bài 6. Cho a,b,c là các số thực không âm thỏa mãn $a+b+c=3$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=a+b^2+c^3$.

Lời giải

Thay $a=3-b-c$ vào biểu thức của P ta được:

$$P=b^2-b+c^3-c+3=\left(b-\frac{1}{2}\right)^2+c^3-c+\frac{11}{4}\ge f(c)=c^3-c+\frac{11}{4}.$$

Xét hàm số $f(c)=c^3-c+\frac{11}{4}$ với $c\in[0;3]$ ta có:

$f'(c)=3c^2-1; f'(c)=0 \Leftrightarrow c=\frac{1}{\sqrt{3}}\in[0;3]$.

Ta có f'(c) đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua $c=\frac{1}{\sqrt{3}}$ nên f(c) đạt cực tiểu tại $c=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Suy ra $P\ge f(c)\ge f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{11}{4}-\frac{2\sqrt{3}}{9}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=\frac{5}{2}-\frac{1}{\sqrt{3}}, b=\frac{1}{2}, c=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\frac{11}{4}-\frac{5\sqrt{3}}{9}$ đạt tại $a=\frac{5}{2}-\frac{1}{\sqrt{3}}, b=\frac{1}{2}, c=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Bài 7. Cho a,b,c là độ dài ba cạnh một tam giác. Chứng minh rằng

$$3\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)\ge 2\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a}\right)+3.$$

Lời giải

Không mất tính tổng quát giả sử $a=max\{a,b,c\}$

- Nếu $a\ge c\ge b$ thì

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\ge\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}\ge 3\Rightarrow 3\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)\ge 3\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}\right)\ge 2\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}\right)+3$$

- Nếu $a\ge b\ge c$ thì

Xét hàm số $f(a)=3\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)-2\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a}\right)-3$

Ta có $f'(a)=\frac{3}{b}-\frac{3c}{a^2}-\frac{2}{c}+\frac{2b}{a^2}=\frac{\left(a^2-bc\right)(3c-2a)}{a^2bc}$

Do $a\ge b\ge c\Rightarrow a^2\ge bc$

Khả năng 1. Nếu $3c>2a$ hàm số đồng biến suy ra $f(a)\ge f(b)=\frac{b}{c}+\frac{c}{a}-2\ge 0$

Khả năng 2. Nếu $3c<2a$ hàm số nghịch biến suy ra

$$f(a)\ge f(b+c)=\frac{(b-c)^2}{bc}+\frac{3c-2b}{b+c}=\frac{2(b-2c)^2+c(b-c)}{(b+c)^2}\ge 0$$

Bất đẳng thức được chứng minh.

Bài 8. (TSĐH Khối A 2011) Cho *x,y,z* là ba số thực thuộc đoạn $[1;4]$ và $x \ge y, x \ge z$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x}{2x+3y} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+x}$.

Lời giải

Xét hàm số $f(z) = \frac{x}{2x+3y} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+x}$ trên đoạn $[1;4]$ ta có:

$$f'(z) = -\frac{y}{(y+z)^2} + \frac{x}{(x+z)^2} = \frac{(x-y)(z^2-xy)}{(x+z)^2(y+z)^2}.$$

\+ Nếu $x = y \Rightarrow P = \frac{1}{5} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+y} = \frac{6}{5}$.

\+ Nếu $x > y$ khi đó $f'(z) = 0 \Leftrightarrow z = \sqrt{xy}$ ta có f'(z) đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua $z = \sqrt{xy}$ nên f(z) đạt cực tiểu tại $z = \sqrt{xy}$.

Do đó $P = f(z) \ge f(\sqrt{xy}) = \frac{x}{2x+3y} + \frac{2\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \frac{\frac{x}{y}}{2\frac{x}{y}+3} + \frac{2}{\sqrt{\frac{x}{y}}+1}$.

Đặt $t = \sqrt{\frac{x}{y}}, (1 < t \le 2)$ ta có

$$P \ge g(t) = \frac{t^2}{2t^2+3} + \frac{2}{t+1} = \frac{(2-t)(35t^2-27t+48)}{33(t+1)(2t^2+3)} + \frac{34}{33} \ge \frac{34}{33}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$z = \sqrt{xy}, t = 2 \Leftrightarrow x = 4y, z = 2y \Leftrightarrow x = 4, y = 1, z = 2.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\frac{34}{33}$ đạt tại $x = 4, y = 1, z = 2$.

Nhận xét. Do P dạng đẳng cấp bậc 0 nên ta có thể đặt $y = a.x,\ z = b.x$, $a, b \in \left[\frac{1}{4};1\right]$ đưa bài toán về tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{1}{2+3a} + \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+1}$ đã được trình bày ở trên(xem thêm chủ đề sử dụng bất đẳng thức phụ).

Bài 9. Cho các số thực $a,b,c\in\left[\frac{1}{3};3\right]$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $S=\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}$.

Lời giải

Đặt $f(a)=\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}$. Xét hai trường hợp sau:

- TH1: $a\ge b\ge c$. Ta có $f'(a)=\frac{b}{(a+b)^2}-\frac{c}{(a+c)^2}=\frac{(b-c)\left(a^2-bc\right)}{(a+b)^2(a+c)^2}\ge 0$

Suy ra $f(a)\le f(3)=\frac{3}{3+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+3}=g(c)$.

Mặt khác $g'(c)=\frac{-b}{(c+b)^2}+\frac{3}{(c+3)^2}=\frac{(b-3)\left(3b-c^2\right)}{(c+3)^2(b+c)^2}\le 0$

Suy ra $g(c)\le g\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{3}{3+b}+\frac{3b}{3b+1}+\frac{1}{10}=h(b)$

Ta có $h'(b)=\frac{3}{(3b+1)^2}-\frac{3}{(b+3)^2}=\frac{(1-b)(1+b)}{(3b+1)(b+3)}\le 0$

Từ bảng biến thiên suy ra $f(a;b;c)\le f\left(3;1;\frac{1}{3}\right)=\frac{8}{5}$.

- TH2: $c\ge b\ge a$. Từ TH1 ta có $f(c;b;a)\le\frac{8}{5}$.

Mặt khác $f(a;b;c)-f(c;b;a)=\frac{(a-b)(b-a)(a-c)}{(a+b)(b+a)(a+c)}\le 0$.

Suy ra $f(a;b;c)\le\frac{8}{5}$.

Vậy $\max S=\frac{8}{5}$, đạt được khi và chỉ khi $(a,b,c)\in\left\{\left(3,1,\frac{1}{3}\right),\left(\frac{1}{3},3,1\right),\left(1,\frac{1}{3},3\right)\right\}$.

Bài 10. Cho $a,b,c\in[0;1]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$S=\frac{a}{b^3+c^3+6}+\frac{b}{c^3+a^3+6}+\frac{c}{a^3+b^3+6}.$$

Lời giải

Đặt $f(c)=\frac{a}{b^3+c^3+6}+\frac{b}{c^3+a^3+6}+\frac{c}{a^3+b^3+6}$.

Ta có $f'(c)=\dfrac{1}{a^3+b^3+6}-\dfrac{3ac^2}{\left(b^3+c^3+6\right)^2}-\dfrac{3c^2}{\left(a^3+c^3+6\right)^2}$

$$f''(c)=-\frac{6ac\left(6+b^3-2c^3\right)}{\left(b^3+c^3+6\right)^2}-\frac{6bc\left(6+a^3-2c^3\right)}{\left(a^3+c^3+6\right)^2}\le 0$$

Nên f'(c) giảm trên [0; 1]. Suy ra

$$f'(c)\ge f'(1)=\frac{1}{6+a^3+b^3}-\frac{3a}{\left(7+b^3\right)^2}-\frac{3b}{\left(7+a^3\right)^2}\ge\frac{1}{8}-2.\frac{3}{49}>0$$

Suy ra f(c) tăng trên [0; 1].

Do đó $S=f(c)\le f(1)=\dfrac{a}{b^3+7}+\dfrac{b}{a^3+7}+\dfrac{1}{a^3+b^3+6}=g(a)$.

Ta có $g'(a)=\dfrac{1}{b^3+7}-\dfrac{2a^2b}{\left(a^3+7\right)^2}-\dfrac{3a^2}{\left(a^3+b^3+7\right)^2}$

$$g''(a)=-\frac{6ab\left(7-2a^3\right)}{\left(a^3+7\right)^3}-\frac{6a\left(b^3+6-2a^3\right)}{\left(a^3+b^3+7\right)^3}\le 0$$

Nên g'(a) giảm trên [0; 1]. Suy ra

$$g'(a)\ge g'(1)=\frac{1}{b^3+7}-\frac{3b}{64}-\frac{3}{\left(7+b^3\right)^2}=\left(\frac{1}{b^3+7}-\frac{1}{8}\right)\left(\frac{5}{8}-\frac{3}{b^3+7}\right)+\frac{5-3b}{64}>0$$

Suy ra g(a) tăng trên [0; 1]. Do đó $S=g(a)\le g(1)=\dfrac{2}{b^3+7}+\dfrac{b}{8}=h(b)$.

Ta có $h'(b)=\dfrac{1}{8}-\dfrac{6b^2}{\left(b^3+7\right)^2}-\dfrac{\left(b^3+7\right)^2-48b^2}{8\left(b^3+7\right)^2}>0,\ \forall b\in[0;1]$.

Suy ra h(b) tăng trên [0; 1], nên $h(b)\le h(1)=\dfrac{3}{8}\Rightarrow S\le\dfrac{3}{8}$.

Với a = b = c = 1 thì $\max S=\dfrac{3}{8}$

Bài 11. Xét các số thực dương x, y, z thỏa mãn hệ điều kiện

$$\begin{cases} \dfrac{2}{5} \le z \le \min\{x, y\} & (1) \\ xz \ge \dfrac{4}{15} & (2) \\ yz \ge \dfrac{1}{5} & (3) \end{cases}$$

Hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P(x, y, z) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{y} + \dfrac{3}{z}$.

Lời giải

Từ điều kiện (1) và (2) suy ra $x \ge max\left\{z, \dfrac{4}{15z}\right\}$ (4)

a) Xét hàm số $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{z}$ với x > 0 và tham số $z \ge \dfrac{2}{5}$. Xét hai trường hợp

- Nếu $z \ge \dfrac{2}{\sqrt{15}}$ thì $x \ge z \ge \dfrac{4}{15z}$ theo (4) nên $f(x) \le \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{2}{z} \le 15$ (5)
- Nếu $\dfrac{2}{5} \le z \le \dfrac{2}{\sqrt{15}}$ thì $x \ge \dfrac{4}{15z} \ge z$ theo (4) nên $f(x) \le \dfrac{15z}{4} + \dfrac{1}{z} = g(z)$.

Xét hàm số g(z) với $\dfrac{2}{5} \le z \le \dfrac{2}{\sqrt{15}}$. Ta có

$$g'(z) = \frac{15}{4} - \frac{1}{z^2} < 0 \Leftrightarrow z < \frac{2}{\sqrt{15}}.$$

Do đó g(z) là hàm giảm và $f(z) \le g(z) \le g\left(\dfrac{2}{5}\right) = 4$ (6)

So sánh (5) và (6) ta có

$\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{z} \le 4$ và $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{z} = 4 \Leftrightarrow x = \dfrac{2}{3}, z = \dfrac{2}{5}$ (7)

b) Xét hàm số $h(y) = \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z}$ với tham số $z \ge \dfrac{2}{5}$

Từ điều kiện (1) và (3) suy ra $y \ge max\left\{z, \dfrac{1}{5z}\right\}$ (8)

Lập luận tương tự phần a) ta được

- Nếu $z \ge \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ thì $h(y) \le 2\sqrt{5}$ (9)

- Nếu $\frac{2}{5} \le z \le \frac{1}{\sqrt{5}}$ thì $h(y) \le \frac{9}{2}$ (10)

  So sánh (9) và (10) ta có

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\le\frac{9}{2} \text{ và } \frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{9}{2} \Leftrightarrow x=\frac{2}{5}, y=\frac{1}{2} \qquad (11)$$

  So sánh kết quả phần a) và b) ta có

$$P(x,y,z)=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)+2\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\le 4+2.\frac{9}{2}=13$$

  Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=\frac{2}{3}, y=\frac{1}{2}, z=\frac{2}{5}$

  Vậy giá trị lớn nhất của P bằng 13.

Bài 12. Cho x,y,z là các số thực thuộc đoạn $\left[\frac{1}{2};2\right]$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=8\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right)-5\left(\frac{y}{x}+\frac{x}{z}+\frac{z}{y}\right)$.

Lời giải

Nhận xét. Ta thử đạo hàm P theo biến x ta được:

$$8\left(\frac{1}{y}-\frac{z}{x^2}\right)-5\left(-\frac{y}{x^2}+\frac{1}{z}\right)=\frac{8x^2z-8z^2y+5yz-5x^2y}{x^2yz}=\frac{\left(x^2-yz\right)(8z-5y)}{x^2yz}.$$

Để P min suy nghĩ đến đạo hàm không âm. Vậy trước tiên cần có $x^2 \ge yz$ ta chỉ cần giả sử $x=max\{x,y,z\}$.

Không mất tính tổng quát giả sử $x=max\{x,y,z\}$.

Viết lại P dưới dạng: $P=f(x)=\frac{8z-5y}{yz}.x+\frac{8z-5y}{x}+\frac{8y}{z}-\frac{5z}{y}$ với $\sqrt{yz}\le x\le 2$

Ta có $f'(x)=\frac{\left(x^2-yz\right)(8z-5y)}{x^2yz}$.

<u>TH1:</u> Nếu $8z-5y>0 \Rightarrow f'(x)\ge 0$ nên f(x) là hàm đồng biến trên $\left[\sqrt{yz};2\right]$ do đó

$$f(x)\ge f(\sqrt{yz})=\frac{8y}{z}-\frac{5z}{y}+16\sqrt{\frac{z}{y}}-10\sqrt{\frac{y}{z}}.$$

Đặt $t=\sqrt{\frac{y}{z}},\left(t\in\left[\frac{1}{2};2\right]\right)$. Khi đó $P=f(x)\ge f(\sqrt{yz})=g(t)=8t^2-\frac{5}{t^2}+\frac{16}{t}-10t$.

Xét hàm số $g(t)=8t^2-\frac{5}{t^2}+\frac{16}{t}-10t$ liên tục trên $\left[\frac{1}{2};2\right]$ ta có:

$$g'(t)=16t+\frac{10}{t^3}-\frac{16}{t^2}-10=\frac{(t-1)(8t-5)\left(t^2+t+1\right)}{t^3};g'(t)=0\xleftrightarrow{t\in\left[\frac{1}{2};2\right]}\left[\begin{array}{l}t=1\\ t=\frac{5}{8}\end{array}\right..$$

Ta có $g\left(\frac{1}{2}\right)=g(1)=9,g\left(\frac{5}{8}\right)=\frac{387}{40},g(2)=\frac{75}{4}$.

Suy ra $\min g(t)=9$ xảy ra tại $t=1$ hoặc $t=\frac{1}{2}$ hay $x=y=z$ hoặc $z=4y,x=2y$.

TH2: Nếu $8y-5z\le 0\Rightarrow f'(x)\le 0$ suy ra

$$f(x)\ge f(2)=8\left(\frac{2}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{2}\right)-5\left(\frac{y}{2}+\frac{z}{y}+\frac{2}{z}\right)=g(y).$$

Thực hiện tương tự.

Bài 13. Cho *a,b,c* là các số thực thuộc đoạn $\left[\frac{1}{2};1\right]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\left|\frac{a-b}{c}+\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}\right|$.

Lời giải

Ta có:

$$P=\left|\frac{a-b}{c}+\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}\right|=\left|\frac{ab(a-b)+bc(b-c)+ca(c-a)}{abc}\right|=\left|\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{abc}\right|.$$

Do *P* là biểu thức đối xứng với ba biến *a,b,c* nên không mất tính tổng quát giả sử $a\ge b\ge c$. Khi đó:

$$P=\frac{(a-b)(b-c)(a-c)}{abc}=\frac{b-c}{bc}\left[\frac{a^2-(b+c)a+bc}{a}\right].$$

Xét hàm số $f(a)=\frac{b-c}{bc}\left[\frac{a^2-(b+c)a+bc}{a}\right]$ với $\frac{1}{2}\le c\le b\le a\le 1$ ta có:

$$f'(a)=\frac{b-c}{bc}\left(1-\frac{bc}{a^2}\right)=\frac{(b-c)\left(a^2-bc\right)}{a^2bc}\ge 0.$$

Do đó f(a) là hàm đồng biến trên $\left[\frac{1}{2};1\right]$.

Suy ra $P=f(a)\le f(1)=\frac{b-c}{bc}(1-b-c+bc)=g(c)=\frac{1-b}{c}+c\left(\frac{1}{b}-1\right)+b-\frac{1}{b}$.

Xét hàm số $g(c)=\frac{1-b}{c}+c\left(\frac{1}{b}-1\right)+b-\frac{1}{b}$ trên đoạn $\left[\frac{1}{2};1\right]$ ta có:

$g'(c)=-\frac{1-b}{c^2}+\frac{1}{b}-1=(1-b)\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c^2}\right)=\frac{(1-b)\left(c^2-b\right)}{bc^2}\le\frac{(1-b)(c-b)}{bc^2}\le 0$.

Do đó g(c) là hàm nghịch biến trên $\left[\frac{1}{2};1\right]$.

Suy ra $P\le g(c)\le g\left(\frac{1}{2}\right)=h(b)=\frac{3}{2}-b-\frac{1}{2b}$.

Xét hàm số $h(b)=\frac{3}{2}-b-\frac{1}{2b}$ liên tục trên đoạn $\left[\frac{1}{2};1\right]$ ta có:

$h'(b)=-1+\frac{1}{2b^2};h'(b)=0\Leftrightarrow b=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Ta có h(b) đối dấu từ dương sang âm khi đi qua $b=\frac{1}{\sqrt{2}}$ nên h(b) đạt cực đại tại $b=\frac{1}{\sqrt{2}}$. Do đó $P\le h(b)\le h\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{3-2\sqrt{2}}{2}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=1,b=\frac{1}{\sqrt{2}},c=\frac{1}{2}$ và các hoán vị.

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng $\frac{3-2\sqrt{2}}{2}$ đạt tại $a=1,b=\frac{1}{\sqrt{2}},c=\frac{1}{2}$ và các hoán vị.

Nhận xét. Điểm quan trọng trong lời giải trên là phát hiện đẳng thức

$$\frac{a-b}{c}+\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}=-\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{abc}.$$

Ngoài ra dễ thấy P là biểu thức đẳng cấp bậc 0 và dạng đối xứng nên không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $a\ge b\ge c$. Ta đặt $a=x.c,b=y.c,\left(2\ge x\ge y\ge 1\right)$.

Bài toán đưa về tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\frac{(x-1)(y-1)(x-y)}{xy}$.

Đây chính là bài toán 2 tôi đã trình bày.

Bài 14. Cho a,b,c là các số thực thuộc đoạn $[1;2]$ và $4a+2b+c=11$.

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}$.

Lời giải

Theo giả thiết ta có $4a=11-2b-c$ suy ra $P=f(b)=\frac{4}{11-2b-c}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}$.

Xét hàm số $f(b)=\frac{4}{11-2b-c}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}$ liên tục trên $[1;2]$ ta có

$$f'(b)=\frac{8}{(11-2b-c)^2}-\frac{2}{b^2}=\frac{8b^2-2(11-2b-c)^2}{b^2(11-2b-c)^2}=\frac{2(4b+c-11)(11-c)}{b^2(11-2b-c)^2}<0,\forall b,c\in[1;2].$$

Do đó f(b) là hàm nghịch biến trên đoạn $[1;2]$ suy ra $f(2)\le f(b)\le f(1)$.

Tìm giá trị lớn nhất của P.

Xét hàm số $g(c)=f(1)=\frac{4}{9-c}+2+\frac{3}{c}$ ta có:

$$g'(c)=\frac{4}{(9-c)^2}-\frac{3}{c^2}=\frac{c^2+54c-243}{c^2(9-c)}<0,\forall c\in[1;2].$$

Vậy g(c) là hàm nghịch biến trên đoạn $[1;2]\Rightarrow P=f(b)\le f(1)=g(c)\le g(1)=\frac{11}{2}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $b=c=1,a=2$.

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng $\frac{11}{2}$ đạt tại $a=2,b=c=1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của P.

Xét hàm số $h(c)=f(2)=\frac{4}{7-c}+1+\frac{3}{c}$ ta có:

$$h'(c)=\frac{4}{(7-c)^2}-\frac{3}{c^2}=\frac{c^2+42c-147}{c^2(7-c)^2}<0,\forall c\in[1;2].$$

Do đó h(c) là làm nghịch biến trên đoạn $[1;2]$.

Suy ra $P=f(b)\ge f(2)=h(c)\ge h(2)=\frac{33}{10}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $b=c=2,a=\frac{5}{4}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\frac{33}{10}$ đạt tại $a=\frac{5}{4},b=c=2$.

Bài tập tương tự

Cho a,b,c là các số thực thuộc đoạn $[1;3]$ thỏa mãn $a+2b+3c=12$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{3}{a}+\frac{2}{b}+\frac{1}{c}$.

Bài 15. Cho a,b,c là các số thực thuộc đoạn $[1;2]$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{1}{4+a-ab}+\frac{1}{4+b-bc}+\frac{1}{4+c-ca}$.

Lời giải

Coi P là hàm số của a và b,c là tham số ta có:

$$P = f(a) = \frac{1}{4+a-ab} + \frac{1}{4+b-bc} + \frac{1}{4+c-ca}.$$

$$f'(a) = \frac{b-1}{(4+a-ab)^2} + \frac{c}{(4+c-ca)^2} \geq 0, \forall a,b,c \in [1;2].$$

Do đó f(a) là hàm đồng biến trên đoạn $[1;2]$.

Suy ra $f(a) \geq f(1) = g(b) = \frac{1}{5-b} + \frac{1}{4+b-bc} + \frac{1}{4}$.

Xét hàm số $g(b) = \frac{1}{5-b} + \frac{1}{4+b-bc} + \frac{1}{4}$ liên tục trên đoạn $[1;2]$ ta có:

$g'(b) = \frac{1}{(5-b)^2} + \frac{c-1}{(4+b-bc)^2} \geq 0, \forall b,c \in [1;2]$. Do đó g(b) là hàm đồng biến trên đoạn $[1;2]$.

Suy ra $P \geq g(b) \geq g(1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{5-c} \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{5-1} = \frac{3}{4}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\frac{3}{4}$ đạt tại $a = b = c = 1$.

Bài 16. (Việt Nam TST 2001) Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn

$$21ab + 2bc + 8ca \leq 12.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c}$.

Lời giải

Ta có: $21ab + 2bc + 8ca \leq 12 \Leftrightarrow \frac{2}{a} + \frac{8}{b} + \frac{21}{c} \leq \frac{12}{abc}$.

Đặt $x = \frac{1}{a}, y = \frac{1}{b}, z = \frac{1}{c}, (x,y,z > 0)$ và $2x + 8y + 21z \leq 12xyz$. Khi đó $P = x + 2y + 3z$.

Ta có: $z(12xy - 21) \geq 2x + 8y > 0 \Rightarrow z \geq \frac{2x+8y}{12xy-21}$ và $x > \frac{7}{4y}$.

Khi đó $P \geq x + 2y + 3.\frac{2x+8y}{12xy-21} = x + 2y + \frac{2x+8y}{4xy-7}$.

Xét hàm số $f(x) = x + 2y + \frac{2x+8y}{4xy-7}$ trên khoảng $\left(\frac{7}{4y}; +\infty\right)$ ta được:

$$f'(x) = 1 - \frac{14+32y^2}{(4xy-7)^2}; f'(x) = 0 \Leftrightarrow (4xy-7)^2 = 14 + 32y^2 \Leftrightarrow x = x_0 = \frac{7+\sqrt{32y^2+14}}{4y}.$$

Ta có f'(x) đổi dầu từ âm sang dương khi đi qua x_0 nên f(x) đạt cực tiểu tại x_0.

Do đó $f(x) \ge f(x_0) = 2y + \frac{9}{4y} + \frac{\sqrt{32y^2+14}}{2y}$.

Xét hàm số $g(y) = 2y + \frac{9}{4y} + \frac{\sqrt{32y^2+14}}{2y}$ trên $(0;+\infty)$ ta có:

$$g'(y) = 2 - \frac{9}{4y^2} - \frac{7}{y^2\sqrt{32y^2+14}}; g'(y) = 0 \Leftrightarrow (8y^2-9)\sqrt{32y^2+14} - 28 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{5}{4}.$$

Ta có g'(y) đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua $\frac{5}{4}$ nên tại $y = \frac{5}{4}$ g(y) đạt cực tiểu. Do đó $g(y) \ge g\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{15}{2}$.

Suy ra $P \ge f(x) \ge f(x_0) = \text{g(y)} \ge \text{g}\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{15}{2}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\frac{15}{2}$ đạt tại $y = \frac{5}{4}, \text{x} = 3, \text{z} = \frac{2}{3}$ hay

$a = \frac{1}{3}, b = \frac{4}{5}, \text{c} = \frac{3}{2}$.

Bài 17. Cho a,b,c là các số thực thuộc đoạn $[1;2]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{10a}{bc} + \frac{11b}{ca} + \frac{2014c}{ab}$.

Lời giải

Ta lần lượt coi P là hàm của c: $f(c) = \frac{2014c}{ab} + \frac{1}{c}\left(\frac{10a}{b} + \frac{11b}{a}\right)$.

Ta có:

$$f'(c) = \frac{2014}{ab} - \frac{1}{c^2}\left(\frac{10a}{b} + \frac{11b}{a}\right) = \frac{2014c^2 - 10a^2 - 11b^2}{abc^2} \ge \frac{2014.1^2 - 10.2^2 - 11.2^2}{abc^2} > 0.$$

Do đó f(c) là hàm đồng biến trên $[1;2]$.

Do đó $f(c) \le f(2) = g(b) = \frac{4028}{ab} + \frac{5a}{b} + \frac{11b}{2a}$.

Xét hàm số $g(b) = \frac{4028}{ab} + \frac{5a}{b} + \frac{11b}{2a}$ trên đoạn $[1;2]$ ta có:

$$g'(b) = \frac{11}{2a} - \frac{4028}{ab^2} = \frac{11b^2 - 2.4028}{2ab^2} \le \frac{11.2^2 - 2.4028}{2ab^2} < 0.$$

Do đó g(b) là hàm nghịch biến trên đoạn $[1;2]$ suy ra

$$g(b) \le g(1) = h(a) = \frac{4028}{a} + 5a + \frac{11}{2a}.$$

Xét hàm số $h(a) = \frac{4028}{a} + 5a + \frac{11}{2a}$ trên đoạn $[1;2]$ ta có:

$h'(a) = -\frac{4028}{a^2} + 5 - \frac{11}{2a^2} < 0, \forall a \in [1;2]$. Do đó h(a) là hàm nghịch biến trên $[1;2]$

Vì vậy $h(a) \le h(1) = \frac{8077}{2} \Rightarrow P \le \frac{8077}{2}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = 1, c = 2$.

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng $\frac{8077}{2}$ đạt tại $a = b = 1, c = 2$.

C. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1. Cho 2 số thực *x,y* thuộc $[0;1]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = 2\left(x^3 + y^3\right) - x^2y - y^2 - x.$$

Bài 2. Cho *x,y* là hai số thực dương thỏa mãn $x, y \le 4$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x}{2y} + \frac{y}{x} + \frac{12}{xy}$.

Bài 3. Cho hai số thực x,y thoả mãn điều kiện $x \ge y \ge 1$.

Chứng minh rằng $x^2 + x + 4 \ge \frac{2(x+1)}{x+y} + \frac{2x(x+1)}{y+1} + 2y$.

Bài 4. Cho các số thực $0 \le a \le b \le c \le 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \left(a^2 - b^2\right)(b - c) + c^2(1 - c).$$

Bài 5. Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 8$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{3}{\sqrt{b}} + \frac{8}{\sqrt{3c + 2a}}$.

Bài 6. Cho *x,y,z* là các số thực dương thỏa mãn $x \ge y \ge z$.

Chứng minh rằng $\frac{x}{z} + \frac{z}{y} + \frac{y}{x} \ge \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$.

Bài 7. Cho x,y,z là ba số thực thuộc đoạn $[1;3]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} + \frac{y}{x} + \frac{x}{z} + \frac{z}{y}.$$

Bài 8. Cho x,y,z là các số thực thuộc đoạn $\left[\frac{1}{2};1\right]$.

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=(x+y+z)^2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right).$$

Bài 9. Cho x,y,z là ba số thực thuộc đoạn $[1;9]$ và $x\geq y, x\geq z$.

Tìm giá trị giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{x}{x+2y}+\frac{y}{y+z}+\frac{z}{z+x}$.

Bài 10. Cho x,y,z là các số thực thuộc đoạn $\left[\frac{1}{3};3\right]$.

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{x}{x+y}+\frac{y}{y+z}+\frac{z}{z+x}$.

Bài 11. Cho x,y,z là các số thực thuộc đoạn $[1;3]$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=5\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right)-\frac{x}{z}-\frac{z}{y}-\frac{y}{x}$.

Bài 12. Cho a,b,c là các số thực thuộc đoạn $[1;2]$.

Chứng minh rằng $a^3+b^3+c^3\leq 5abc$.

Bài 13. Cho a,b,c là các số thực thuộc đoạn $[1;2]$.

Chứng minh $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\leq 10$.

Bài 14. Cho x,y,z là các số thực thuộc đoạn $[1;2]$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\frac{10x}{yz}+\frac{11y}{zx}+\frac{12z}{xy}$.

Bài 15. Cho x,y,z là các số thực thuộc đoạn $[1;3]$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{36x}{yz}+\frac{2y}{zx}+\frac{z}{xy}$.

Bài 16. Cho a,b,c là các số thực thuộc đoạn $[1;3]$ thỏa mãn $a+2b+3c=12$.

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{3}{a}+\frac{2}{b}+\frac{1}{c}$.

Bài 17. Cho x,y là hai số thực thuộc đoạn $[1;2]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\left|x-y+\frac{y-1}{x}+\frac{1-x}{y}\right|.$$

Bài 18. Cho a,b,c là các số thực thuộc đoạn $\left[\frac{1}{2};2\right]$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\left|\frac{a-b}{c}+\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}\right|$.

Bài 19. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện $21ab+2bc+8ca\le 12$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}$.

Bài 20. Cho x,y,z là các số thực dương thoả mãn điều kiện $x+y+z\le xyz$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x+2y+5z$.

Bài 20. Cho x,y,z là các số thực dương thoả mãn điều kiện $x+y+z=\frac{5}{3}xyz$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=6(x+y)+z$.

Bài 21. Cho x,y,z là các số thực dương thoả mãn điều kiện $x^2+y^2+z^2=6$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{x}{yz}+\frac{2y}{zx}+\frac{5z}{xy}$.

Bài 22. Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $ab>\frac{7}{3}$ và

$$3a+57b+7c=3abc+\frac{100}{a}.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=a+b+c$.

Bài 23. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng

$$a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2+4abc>a^3+b^3+c^3.$$

Bài 24. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác (có thể suy biến). Đặt $T=\left|\frac{(a-b)(b-a)(a-c)}{(a+b)(b+a)(a+c)}\right|$**.** Tìm maxT và chứng minh rằng $\max T<\frac{1}{21}$.

Bài 25. Xét các số thực dương x, y, z thỏa mãn hệ điều kiện

$$\begin{cases} 0<z\le y\le x\le 3 & (1)\\ \frac{3}{xy}+\frac{2}{y^2}\ge 1 & (2)\\ \frac{18}{x^2y}+\frac{4}{y^2z}+\frac{18}{z^2x}\ge 3 & (3)\end{cases}$$

Hãy tìm GTLN của biểu thức $P\left(x,y,z\right)=\frac{1}{2}xyz+\frac{80}{27}x^3+\frac{18}{8}y^3$.

D. HƯỚNG DẪN GIẢI – ĐÁP SỐ

Bài 1. Xét hàm số $f(x)=2x^3-x^2y-x+2y^3-y^2$ trên đoạn $\left[0;1\right]$ ta có:

$$f'(x)=6x^2-2xy-1;\ f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{y-\sqrt{y^2+6}}{6}\notin\left[0;1\right]\\ x=\frac{y+\sqrt{y^2+6}}{6}\in\left[0;1\right]\end{array}\right..$$

Ta có f'(x) đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua $x=\frac{y+\sqrt{y^2+6}}{6}$ nên f(x) đạt cực tiểu tại $x=\frac{y+\sqrt{y^2+6}}{6}$.

Do đó $P\le Max\left\{f(0);f(1)\right\}=Max\left\{2y^3-y^2;2y^3-y^2-y+1\right\}=2y^3-y^2-y+1$ vì $2y^3-y^2-y+1\ge 2y^3-y^2,\forall y\in\left[0;1\right]$.

Mặt khác $2y^3-y^2-y+1=y\left(2y^2-y-1\right)+1=y\left(y-1\right)\left(2y+1\right)+1\le 1,\forall y\in\left[0;1\right]$.

Suy ra $P\le 1$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=1,y=0$ hoặc $x=y=1$.

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng 1 đạt tại $x=1,y=0$ hoặc $x=y=1$.

Bài 2. Xét hàm số $f(x)=\frac{x}{2y}+\frac{y}{x}+\frac{12}{xy}$ với $x\in\left(0;4\right]$ ta có:

$$f'(x)=\frac{1}{2y}-\frac{y}{x^2}-\frac{12}{yx^2}=\frac{x^2-2y^2-24}{2yx^2}<\frac{x^2-24}{2yx^2}<0.$$

Do đó f(x) là hàm nghịch biến trên khoảng $\left(0;4\right]$ suy ra

$$P=f(x)\ge f(4)=\frac{y}{4}+\frac{5}{y}=\frac{\left(y-4\right)\left(y-5\right)}{4y}+\frac{9}{4}\ge\frac{9}{4},\forall 0<\mathrm{y}\le 4.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=4$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\frac{9}{4}$ đạt tại $x=y=4$.

Bài tập tương tự

Cho a,b,x,y là các số thực dương thỏa mãn $a^3+b^3=1$ và $x,y\le 4$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{x^2+2y^2+24}{xy\left(a^2+b^2\right)}$.

Bài 3. Xét hàm số $f(x)=x^2+x+4-\frac{2(x+1)}{x+y}-\frac{2x(x+1)}{y+1}-2y$ với $x\ge y\ge 1$ ta có

$$f'(x)=2x+1-\frac{2(2x+1)}{y+1}-\frac{2(y-1)}{(x+y)^2}=(y-1)\left(\frac{2x+1}{y+1}-\frac{2}{(x+y)^2}\right)\ge 0.$$

Vì vậy f(x) là hàm đồng biến suy ra $f(x)\ge f(y)=y^2-3y+3-\frac{1}{y}=\frac{(y-1)^3}{y}\ge 0$.

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=1$.

Bài 6. Xét hàm số $f(x)=x\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{y}\right)+(y-z).\frac{1}{x}+\frac{z}{y}-\frac{y}{z}$ ta có:

$$f'(x)=\frac{1}{z}-\frac{1}{y}-\frac{y-z}{x^2}=\frac{(y-z)(x^2-yz)}{x^2yz}\ge 0,\forall x\ge y\ge z>0.$$

Vậy f(x) là hàm đồng biến suy ra $f(x)\ge f(y)=0$ hay $\frac{x}{z}+\frac{z}{y}+\frac{y}{x}\ge\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y$.

Bài 7. Không mất tính tổng quát giả sử $x\ge y\ge z$. Coi P là hàm của x ta được:

$P=f(x)=\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)x+\frac{y+z}{x}+\frac{y}{z}+\frac{z}{y}$ với $x\in[1;3]$ ta có:

$$f'(x)=\frac{1}{y}+\frac{1}{z}-\frac{y+z}{x^2}=\frac{(y+z)(x^2-yz)}{x^2yz}\ge 0.$$

Do đó f(x) là hàm đồng biến trên đoạn $[1;3]$.

Suy ra $P=f(x)\le f(3)=g(z)=3\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)+\frac{y+z}{3}+\frac{y}{z}+\frac{z}{y}$.

Xét hàm số $g(z)=3\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)+\frac{y+z}{3}+\frac{y}{z}+\frac{z}{y}$ trên đoạn $[1;3]$ ta có:

$$g'(z)=-\frac{3}{z^2}+\frac{1}{3}-\frac{y}{z^2}+\frac{1}{y}=\frac{(y+3)(z^2-3y)}{3yz^2}\le 0,\forall 1\le z\le y\le 3.$$

Suy ra g(z) là hàm nghịch biến trên đoạn $[1;3]$ hay

$$P\le g(z)\le g(1)=3\left(\frac{1}{y}+1\right)+\frac{y+1}{3}+y+\frac{1}{y}=\frac{4(y-1)(y-3)}{3y}+\frac{26}{3}\le\frac{26}{3},\forall y\in[1;3].$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=3,y=z=1$ hoặc $x=y=3,z=1$.

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng $\frac{26}{3}$ đạt tại $x=3, y=z=1$ hoặc $x=y=3, z=1$ và các hoán vị.

<u>Cách 2:</u> Không mất tính tổng quát giả sử $x \ge y \ge z$ khi đó:

$$(x-y)(y-z)\ge 0 \Leftrightarrow xy+yz\ge y^2+zx \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{z}+1\ge \frac{y}{z}+\frac{x}{y} \\ 1+\frac{z}{x}\ge \frac{y}{x}+\frac{z}{y} \end{cases}.$$

Suy ra $P\le 2\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right)+2$.

Đặt $t=\frac{x}{z}, t\in[1;3]$ suy ra $(t-1)(t-3)\le 0 \Leftrightarrow t^2+3\le 4t \Leftrightarrow t+\frac{3}{t}\le 4$.

Suy ra $P\le 2\left(t+\frac{1}{t}\right)+2\le 2\left(4-\frac{2}{t}\right)+2=10-\frac{4}{t}\le 10-\frac{4}{3}=\frac{26}{3}$.

Nhận xét. Ta có thể viết lại bất đẳng thức dưới dạng: $(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\le \frac{35}{3}$.

Bất đẳng thức tổng quát của dạng toán này đã đề cập đến trong chủ đề trước.

Bài tập tương tự

Cho x,y,z là các số thực thuộc đoạn $[1;2]$. Chứng minh rằng

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\le 10.$$

Bài 8. Tìm giá trị nhỏ nhất của P.

Ta có: $x+y+z\ge \frac{3}{2};(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\ge 9 \Rightarrow P\ge \frac{3}{2}.9=\frac{27}{2}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=\frac{1}{2}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\frac{27}{2}$ đạt tại $x=y=z=\frac{1}{2}$.

Tìm giá trị lớn nhất của P.

Không mất tính tổng quát giả sử $x\ge y\ge z$ khi đó:

Xét hàm số $f(x)=(x+y+z)^2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$ trên đoạn $\left[\frac{1}{2};1\right]$ ta có:

$$f'(x)=2(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)-\frac{(x+y+z)^2}{x^2}=(x+y+z)\left[\frac{xyz+\left(2x^2-yz\right)(y+z)}{x^2yz}\right]>0$$

vì $x^2\geq yz$.

Do đó f(x) là hàm đồng biến trên $\left[\frac{1}{2};1\right]$ suy ra

$$P=f(x)\leq f(1)=g(y)=\left(1+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)(1+y+z)^2.$$

Xét hàm số $g(y)=\left(1+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)(1+y+z)^2$ trên đoạn $\left[\frac{1}{2};1\right]$ ta có:

$$g'(y)=-\frac{(1+y+z)^2}{y^2}+2(1+y+z)\left(1+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=(1+y+z)\left[\frac{yz+\left(2y^2-z\right)(z+1)}{y^2z}\right]>0$$

vì $2y^2=2y.y\geq y\geq z$.

Vậy g(y) là hàm đồng biến trên đoạn $\left[\frac{1}{2};1\right]$ suy ra

$$P\leq g(y)\leq g(1)=\left(2+\frac{1}{z}\right)(2+z)^2=\frac{(z-1)\left(2z^2+11z-4\right)}{z}+27\leq 27,\forall z\in\left[\frac{1}{2};1\right].$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$.

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng 27 đạt tại $x=y=z=1$.

Nhận xét. Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta tìm giá trị lớn nhất của P như sau:

$$P\leq\frac{1}{27}\left[\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+2(x+y+z)\right]^3.$$

Ta có: $2x+\frac{1}{x}=\frac{(x-1)(2x-1)}{x}+3\leq 3,\forall x\in\left[\frac{1}{2};1\right]$.

Tương tự ta có: $2y+\frac{1}{y}\leq 3; 2z+\frac{1}{z}\leq 3$. Do đó $P\leq\frac{1}{27}(3+3+3)^3=27$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$.

Bài 9. Xét hàm số $f(z)=\frac{x}{x+2y}+\frac{y}{y+z}+\frac{z}{z+x}$ trên đoạn $[1;9]$ ta có:

$$f'(z)=-\frac{y}{(y+z)^2}+\frac{x}{(x+z)^2}=\frac{(x-y)\left(z^2-xy\right)}{(x+z)^2(y+z)^2}.$$

+ Nếu $x = y \Rightarrow P = \frac{1}{3} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+y} = \frac{4}{3}$.

+ Nếu $x > y$ khi đó $f'(z) = 0 \Leftrightarrow z = \sqrt{xy}$ ta có f'(z) đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua $z = \sqrt{xy}$ nên f(z) đạt cực tiểu tại $z = \sqrt{xy}$.

Do đó $P = f(z) \geq f(\sqrt{xy}) = \frac{x}{x+2y} + \frac{2\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \frac{\frac{x}{y}}{\frac{x}{y}+2} + \frac{2}{\sqrt{\frac{x}{y}}+1}$.

Đặt $t = \sqrt{\frac{x}{y}}, (1 < t \leq 3)$ ta có

$$P \geq g(t) = \frac{t^2}{t^2+2} + \frac{2}{t+1} = \frac{(3-t)\left(7t^2-16t+10\right)}{22(t+1)\left(t^2+2\right)} + \frac{29}{22} \geq \frac{29}{22}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$z = \sqrt{xy}, t = 3 \Leftrightarrow x = 9y, z = 3y \Leftrightarrow x = 9, y = 1, z = 3$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\frac{29}{22}$ đạt tại $x = 9, y = 1, z = 3$.

Bài 10. Giả sử $z = \min\{x, y, z\}$ khi đó xét hàm số $f(z) = \frac{x}{x+y} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+x}$ ta có:

$$f'(z) = -\frac{y}{(y+z)^2} + \frac{x}{(x+z)^2} = \frac{(x-y)\left(z^2-xy\right)}{(x+z)^2(y+z)^2}; f'(z) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y \\ z = \sqrt{xy} \end{array}\right..$$

+ Nếu $x = y \Rightarrow P = \frac{1}{2} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+y} = \frac{3}{2}$.

+ Nếu $x > y \Rightarrow f'(z) \leq 0$ nên f(z) là hàm nghịch biến do đó

$$P = f(z) \geq f(\sqrt{xy}) = \frac{x}{x+y} + \frac{2\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \frac{t^2}{t^2+1} + \frac{2}{t+1} \text{ với } t = \sqrt{\frac{x}{y}}, (1 < t \leq 3).$$

Mặt khác: $\frac{t^2}{t^2+1} + \frac{2}{t+1} = \frac{(3-t)\left(2t^2-2t+1\right)}{5(t+1)\left(t^2+1\right)} + \frac{7}{5} \geq \frac{7}{5}, \forall t \in (1;3]$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$z = \sqrt{xy}, t = 3 \Leftrightarrow x = 9y, z = 3y \Leftrightarrow x = 3, y = \frac{1}{3}, z = 1.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\frac{7}{5}$ đạt tại $x=3, y=\frac{1}{3}, z=1$ hoặc các hoán vị.

Tìm giá trị lớn nhất thực hiện tương tự

Bài 12. Không mất tính tổng quát giả sử $1\le c\le b\le a\le 2$ khi đó bất đẳng thức tương đương với: $a^3-5bca+b^3+c^3\le 0$.

Xét hàm số $f(a)=a^3-5bca+b^3+c^3$ trên đoạn [1;2] ta có

$f'(a)=3a^2-5bc; f''(a)=6a>0$.

Suy ra $f(a)\le \max\{f(1); f(2)\}=\max\left\{1-5bc+b^3+c^3; 8-10bc+b^3+c^3\right\}$.

Ta chỉ cần chỉ ra rằng $f(1)\le 1, f(2)\le 0$.

\+ Xét hàm số $g(b)=f(1)=b^3-5cb+c^3+1$ trên đoạn [1;2] ta có

$g'(b)=3b^2-5c; g''(b)=5b>0$.

Suy ra $g(b)\le \max\{g(1); g(2)\}=\max\left\{c^3-5c+2; c^3-10c+9\right\}$.

Chú ý $c^3-5c+2=(c-2)\left(c^2-1+2c\right)\le 0, \forall c\in[1;2]$

$c^3-10c+9=(c-1)\left(c^2+c-9\right)\le 0, \forall c\in[1;2]$

Do đó $f(1)\le 0$. Tương tự ta có $f(2)\le 0$.

Bài toán được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=2, b=c=1$ và các hoán vị.

Bài tập tương tự

Chứng minh a,b,c là các số thực thuộc đoạn [1;2] ta có

$$2\left(a^3+b^3+c^3\right)\le (a+b+c)(ab+bc+ca).$$

Bài 13. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\le 7.$$

Không mất tính tổng quát giả sử $a\ge b\ge c$. Khi đó

$(a-b)(b-c)\ge 0 \Leftrightarrow ab+bc\ge ac+b^2 \Leftrightarrow \frac{a}{c}+1\ge \frac{a}{b}+\frac{b}{c}$ và $\frac{c}{a}+1\ge \frac{c}{b}+\frac{b}{a}$.

Do đó $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\le 2+2\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)$.

Vậy ta chứng minh $\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\le \frac{5}{2}\Leftrightarrow \left(\frac{a}{c}-2\right)\left(\frac{a}{c}-1\right)\le 0$ luôn đúng do $1\le c\le a\le 2$.

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a=b=2, c=1$ hoặc $a=2, b=c=1$ và các hoán vị.

Tổng quát. Cho các số thực $x_1, x_2, ..., x_n \in [p;q], (p,q \ge 0)$. Chứng minh

$$(x_1 + x_2 + ... + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n}\right) \le n^2 + k_n \frac{(p-q)^2}{4pq}.$$

trong đó $k_n = n^2$ nếu n chẵn và $k_n = n^2 - 1$ nếu n lẻ.

Bài 16. Từ điều kiện ta có: $3c = 12 - a - 2b$ khi đó $P = \frac{3}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{12 - a - 2b}$.

Xét hàm số $f(\text{a}) = \frac{3}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{12 - a - 2b}$ trên đoạn $[1;3]$ ta có:

$$f'(a) = -\frac{3}{a^2} + \frac{3}{(12 - a - 2b)^2} = \frac{12(6-b)(a+b-6)}{a^2(12-a-2b)^2} \le 0, \forall a, b \in [1;3].$$

Do đó f(a) là hàm nghịch biến trên đoạn $[1;3]$ suy ra

$$g(b) = 1 + \frac{2}{b} + \frac{3}{9 - 2b} = f(3) = P = f(a) \le f(1) = h(b) = 3 + \frac{2}{b} + \frac{3}{11 - 2b}.$$

Bài 19. Đặt $x = \frac{1}{a}, y = \frac{2}{b}, z = \frac{3}{c}$ ta có $2x + 4y + 7z \le 2xyz$ và ta cần tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x + y + z$. Thực hiện tương tự bài toán trên ta có giá trị nhỏ nhất của P bằng 15/2 đạt tại $a = \frac{1}{3}, b = \frac{4}{5}, c = \frac{3}{2}$.

Bài 22. Theo giả thiết ta có: $c(3ab - 7) = 3a + 57b - \frac{100}{a} \Rightarrow c = \frac{3a + 57b - \frac{100}{a}}{3ab - 7}$.

Khi đó $P = a + b + \frac{3a + 57b - \frac{100}{a}}{3ab - 7} = a + b + \frac{3a^2 + 57ab - 100}{a(3ab - 7)}$

$$= a + b + \frac{3a^2 + \frac{57}{3}(3ab - 7) + 33}{a(3ab - 7)} = a + b + \frac{3a^2 + 33}{a(3ab - 7)} + \frac{57}{3a}$$

$$= a + \frac{1}{3a}(3ab - 7) + \frac{3a^2 + 33}{a(3ab - 7)} + \frac{64}{3a}$$

$$\ge a + \frac{64}{3a} + 2\sqrt{\frac{1}{3a}(3ab - 7).\frac{3a^2 + 33}{a(3ab - 7)}} = a + \frac{64}{3a} + \frac{2\sqrt{a^2 + 11}}{a} \ge \frac{35}{3}$$

Việc xuất hiện $3ab - 7$ ta suy nghĩ đến việc khử cái đó khỏi biểu thức của P bằng cách tách nhóm hợp lý và triệu tiêu bằng AM-GM.

Chú ý. Khảo sát hàm số f(a) sau cùng ta có ngay kết quả bài toán.

Với $a = 5, b = \frac{5}{3}$ thì P bằng $\frac{35}{3}$. Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\frac{35}{3}$.

CHỦ ĐỀ 7: KỸ THUẬT SỬ DỤNG TÍNH CHẤT CỦA NHỊ THỨC BẬC NHẤT VÀ TAM THỨC BẬC HAI

A. NỘI DUNG PHƯƠNG PHÁP

Ta mở đầu kỹ thuật này bằng các định lý sau đây

1. ***Định lý 1.*** Nếu f(x) là hàm bậc nhất thoả mãn điều kiện $f(a)\ge 0, f(b)\ge 0$ khi đó $f(x)\ge 0, \forall x\in[a;b]$.
2. ***Định lý 2.*** Nếu f(x) là hàm bậc nhất khi đó
$$\min\{f(a);f(b)\}\le f(x)\le \max\{f(a);f(b)\}, \forall x\in[a;b].$$
3. ***Định lý 3.*** Nếu $f(x)=ax^2+bx+c, (a\ne 0)$ khi đó với mọi $x\in[\alpha;\beta]$.

   Ta có f(x) đạt Max, Min tại $x=\alpha$ hoặc $x=\beta$ hoặc $x=-\dfrac{b}{2a}$.

B. BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Cho *x,y,z* là các số thực thuộc đoạn $[0;2]$.

Chứng minh rằng $2(x+y+z)-(xy+yz+zx)\le 4$.

Lời giải

<u>Phân tích tìm lời giải:</u> Nếu coi y và z là tham số thì bất đẳng thức có dạng nhị thức bậc nhất của x nên ta đánh giá theo định lý 2.

Viết lại bất đẳng thức đã cho dưới dạng:

$f(x)=(2-y-z)x+2(y+z)-yz-4\le 0$.

Do $x\in[0;2]$ nên $f(x)\le \max\{f(0);f(2)\}$.

Ta có $f(0)=2(y+z)-yz-4=(y-2)(2-z)\le 0, \forall y,z\in[0;2]$.

$f(2)=2(2-y-z)+2(y+z)-yz-4=-yz\le 0$.

Suy ra $f(x)\le 0$. Bất đẳng thức được chứng minh đẳng thức đạt tại chẳng hạn $x=0, y=z=2$.

Bài 2. Cho a,b,c,d là các số thực thuộc đoạn $[0;1]$.

Chứng minh rằng $(1-a)(1-b)(1-c)(1-d)+a+b+c+d-1\ge 0$.

Lời giải

Ta cần chứng minh $P=(1-a)(1-b)(1-c)(1-d)+a+b+c+d-1\ge 0$.

Rõ ràng biểu thức vế trái là hàm bậc nhất đối với mỗi biến *a,b,c,d.*

\+ Nếu coi là hàm bậc nhất của a thì biểu thức P đạt giá trị nhỏ nhất tại $a=0$ hoặc $a=1$.

\+ Tương tự P đạt giá trị nhỏ nhất tại $b,c,d\in\{0;1\}$.

Nếu một trong 4 số bằng 1 thì $P \ge 0$.

Nếu cả 4 số bằng 0 thì $P = 0$.

Vậy $P \ge 0, \forall a,b,c,d \in [0;1]$ ta có điều phải chứng minh.

Bài 3. Cho 2015 số thực $x_1, x_2, ..., x_{2015}$ thuộc đoạn $[-2015;2015]$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x_1x_2 + x_2x_3 + ... + x_{2014}x_{2015} + x_{2015}x_1$.

Lời giải

Tương tự bài toán trên ta có P đạt giá trị nhỏ nhất khi

$x_i \in \{-2015;2015\}, i = \overline{1,2015}$.

Trong 2015 số đã cho luôn tồn tại ít nhất 2 số cùng dấu không mất tính tổng quát giả sử $x_1x_2 > 0 \Rightarrow x_1x_2 = 2015^2$.

Khi đó

$P = 2015^2 + x_2x_3 + ... + x_{2015}x_1 \ge 2015^2 - 2015^2 - ... - 2015^2 = -2013.2015^2$.

Với $x_1 = x_2 = 2015, x_3 = -2015, x_4 = 2015, ..., x_{2014} = 2015, x_{2015} = -2015$ thì

$P = -2013.2015^2$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng -2013.2015^2.

Bài 4. Cho a,b,c là các số thực thuộc đoạn $[0;1]$.

Chứng minh rằng $\dfrac{a}{b+c+1} + \dfrac{b}{c+a+1} + \dfrac{c}{a+b+1} + (1-a)(1-b)(1-c) \le 1$.

Lời giải

Gọi P là biểu thức vế trái của bất đẳng thức.

Không mất tính tổng quát giả sử

$$a = \max\{a,b,c\} \Rightarrow \frac{b}{c+a+1} \le \frac{b}{b+c+1}; \frac{c}{a+b+1} \le \frac{c}{b+c+1}.$$

Suy ra $P \le \dfrac{a+b+c}{b+c+1} + (1-a)(1-b)(1-c)$.

Vậy để chứng minh bất đẳng thức trên ta chỉ cần chứng minh

$$f(a) = \frac{a+b+c}{b+c+1} + (1-a)(1-b)(1-c) - 1 \le 0.$$

Ta có $f(a) \le \max\{f(0); f(1)\}$.

Ta có $f(1) = 0; f(0) = \dfrac{b+c}{b+c+1} + (1-b)(1-c) - 1$

$$= \frac{bc(b+c) - (b^2+c^2) - bc - 1}{b+c+1}$$

$$\le \frac{(b+c).\frac{b^2+c^2}{2}-(b^2+c^2)-bc-1}{b+c+1}$$
$$=\frac{(b^2+c^2)(b+c-2)-2(bc+1)}{2(b+c+1)}\le 0$$

Suy ra điều phải chứng minh.

Cách 2: Ta có thể chứng minh theo cách khác như sau:

$$\frac{a+b+c}{b+c+1}+(1-a)(1-b)(1-c)\le 1$$
$$\Leftrightarrow (1-a)(1-b)(1-c)\le 1-\frac{a+b+c}{b+c+1}=\frac{1-a}{b+c+1}$$
$$\Leftrightarrow (1-b)(1-c)(b+c+1)\le 1$$

luôn đúng theo AM-GM.

Bài 5. Cho *a,b,c* là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $a+b+c=1$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=ab+bc+ca-2abc$.

Lời giải

Do P là biểu thức đối xứng với a,b,c nên không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $c=\min\{a,b,c\}\Rightarrow c\le\frac{a+b+c}{3}=\frac{1}{3}\Rightarrow 1-2c>0$.

Khi đó viết lại P dưới dạng: $P=ab(1-2c)+(a+b)c=ab(1-2c)+c(1-c)$.

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$0\le ab\le\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\left(\frac{1-c}{2}\right)^2\Rightarrow ab\in\left[0;\left(\frac{1-c}{2}\right)^2\right].$$

Coi ab là ẩn thì P là hàm bậc nhất của ab.

Suy ra

$$MaxP=Max\left\{P(0);\mathrm{P}\left[\left(\frac{1-c}{2}\right)^2\right]\right\}=Max\left\{c(1-c);(1-2c)\left(\frac{1-c}{2}\right)^2+c(1-c)\right\}.$$

Xét hàm số $f(c)=(1-2c)\left(\frac{1-c}{2}\right)^2+c(1-c)=-\frac{1}{2}c^3+\frac{1}{4}c^2+\frac{1}{4}$ với $c\in\left[0;\frac{1}{3}\right]$

ta có:

$$f'(c)=\frac{1}{2}(-3c^2+c)=\frac{1}{2}c(1-3c)\ge 0,\forall c\in\left[0;\frac{1}{3}\right].$$

Do đó f(c) là hàm đồng biến trên đoạn $\left[0;\frac{1}{3}\right]$.

Suy ra $\underset{c\in\left[0;\frac{1}{3}\right]}{Max} f(c)=\mathrm{f}\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{7}{27}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Xét $Q=c(1-2c)=\frac{2c.(1-2c)}{2}\le\frac{1}{2}\left(\frac{2c+1-2c}{2}\right)^2=\frac{1}{8}<\frac{7}{27}$.

Vậy $Max\left\{c(1-c);(1-2c)\left(\frac{1-c}{2}\right)^2+c(1-c)\right\}=f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{7}{27}$.

Vì vậy giá trị lớn nhất của P bằng $\frac{7}{27}$ đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Nhận xét. Vì $1-2c>0$ nên ta có thể đánh giá trực tiếp:

$$P\le\left(\frac{a+b}{2}\right)^2(1-2c)+c(1-c)=\left(\frac{1-c}{2}\right)^2(1-2c)+c(1-c).$$

Bài 6. Cho x,y,z là các số thực không âm có tổng bằng 3.

Chứng minh rằng $x^2+y^2+z^2+xyz\ge 4$.

Lời giải

Không mất tính tổng quát ta giả sử $x=\min\{x,y,z\}\Rightarrow 3x\le x+y+z=3\Rightarrow x\le\frac{1}{3}$.

Đặt biểu thức vế trái bất đẳng thức là P, khi đó ta có:

$$P-4=x^2+(y+z)^2-2yz+xyz-4=(x-2)yz+x^2+(3-x)^2-4$$
$$=f(t)=(x-2)t+2x^2-6x+5$$

Với $0\le t=yz\le\left(\frac{y+z}{2}\right)^2=\left(\frac{3-x}{2}\right)^2$.

Vậy ta tìm giá trị nhỏ nhất của $f(t)$ trên $\left[0;\left(\frac{3-x}{2}\right)^2\right]$, ta có $f(t)$ là hàm số nghịch biến do $x-2<0$.

Vậy $P-4=f(t)\ge f\left(\left(\frac{3-x}{2}\right)^2\right)=\frac{1}{4}(x-1)^2(x+2)\ge 0\Rightarrow P\ge 4.$

Từ đó ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$.

Bài 7. Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c=1$.

Chứng minh rằng $5\left(a^2+b^2+c^2\right)\le 6\left(a^3+b^3+c^3\right)+1$.

Lời giải

Không mất tính tổng giả sử $a=\min\{a,b,c\}\Rightarrow a\le\frac{1}{3}$

Bất đẳng thức đã cho tương đương với:

$$5\left[a^2+(b+c)^2-2bc\right]\le 6\left[a^3+(b+c)^3-3bc(b+c)\right]+1$$

$$\Leftrightarrow 5\left[a^2+(1-a)^2-2bc\right]\le 6\left[a^3+(1-a)^3-3bc(1-a)\right]+1$$

$$\Leftrightarrow (9a-4)bc+(2a-1)^2\ge 0$$

Ta đặt $t=bc\Rightarrow 0<t\le\left(\frac{b+c}{2}\right)^2=\left(\frac{1-a}{2}\right)^2$

Vậy ta chỉ cần chứng minh: $f(t)=(9a-4)t+(2a-1)^2\ge 0,\forall t\in\left[0;\left(\frac{1-a}{2}\right)^2\right]$.

Do $f(t)$ là hàm nghịch biến nên $f(t)\ge f\left(\left(\frac{1-a}{2}\right)^2\right)=\frac{1}{4}a(3a-1)^2\ge 0.$

Ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{3}$.

C. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1. Cho a,b,c là các số thực thuộc đoạn $[0;1]$.

Chứng minh rằng $a+b+c-ab-bc-ca\le 0$.

Bài 2. Cho là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $a+b+c=1$.

a) Chứng minh rằng $a^3+b^3+c^3+6abc\ge\frac{1}{4}$.

b) $7(ab+bc+ca)\le 2+9abc$.

Bài 3. Cho a,b,c là các số thực thuộc đoạn $\left[0;\frac{1}{2}\right]$ và $a+b+c=1$.

Chứng minh rằng $a^3+b^3+c^3+4abc\le\frac{9}{32}$.

Bài 4. Cho a,b,c là các số thực thuộc đoạn $[1;2]$. Chứng minh $a^3+b^3+c^3\le 5abc$.

Bài 5. Cho các số thực không âm *x,y,z* có tổng bằng 1.

Chứng minh rằng $0 \le xy + yz + zx - 2xyz \le \frac{7}{27}$.

D. HƯỚNG DẪN GIẢI – ĐÁP SỐ

Bài 2. a) Không mất tính tổng quát giả sử $a = \max\{a,b,c\} \Rightarrow a \ge \frac{1}{3}$.

Bất đẳng thức tương đương với:

$$a^3 + (b+c)^3 - 3(b+c)bc + 6abc \ge \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow a^3 + (1-a)^3 - 3(1-a)bc + 6abc - \frac{1}{4} \ge 0.$$

$$\Leftrightarrow 4(3a-1)bc + (2a-1)^2 \ge 0$$

Bất đẳng thức cuối đúng. Đẳng thức xảy ra khi $a = b = \frac{1}{2}, c = 0$ hoặc các hoán vị.

c) Không mất tính tổng quát giả sử $a = \min\{a,b,c\} \Rightarrow 7 - 9a > 0$.

Bất đẳng thức đã cho tương đương với:

$$(7-9a)bc + 7a(b+c) - 2 \le 0$$

$$\Leftrightarrow (7-9a)bc + 7a(1-a) - 2 \le 0$$

Vế trái là hàm đồng biến với bc và $bc \le \left(\frac{b+c}{2}\right)^2$, do đó ta chỉ cần chứng minh

$$(7-9a)\left(\frac{b+c}{2}\right)^2 - 7a^2 + 7a - 2 \le 0$$

$$\Leftrightarrow (7-9a)\left(\frac{1-a}{2}\right)^2 - 7a^2 + 7a - 2 \le 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(a+1)(3b-1)^2}{4} \ge 0$$

Bất đẳng thức cuối đúng. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{3}$.

Bài 5. HD: Giả sử $x = \min\{x,y,z\} \Rightarrow 3x \le x + y + z = 1 \Rightarrow x \le \frac{1}{3}$.

Khi đó ta có: $P = xy + yz + zx - 2xyz = yz(1-2x) + xy + zx \ge 0$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 1, y = z = 0$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 0 đạt tại $x = 1, y = z = 0$ hoặc các hoán vị.

Mặt khác ta lại có $P = yz(1-2x) + x(y+z) \le x(1-x) + \left(\frac{1-x}{2}\right)^2 (1-2x) = f(x)$

Ta tìm giá trị lớn nhất của $f(x)$ trên đoạn $\left[0;\frac{1}{3}\right]$.

Ta có $f'(x)=\frac{3}{2}x\left(\frac{1}{3}-x\right)\geq 0$, do đó $f(x)$ đồng biến trênđoạn $\left[0;\frac{1}{3}\right]$.

Vậy $\max P=\max f(x)=f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{7}{27}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=\frac{1}{3}$.

CHỦ ĐỀ 8: BẤT ĐẲNG THỨC PHỤ ĐÁNG CHÚ Ý VÀ ÁP DỤNG GIẢI ĐỀ THI

Nội dung chủ đề này tôi đề cập đến một số bài toán cơ bản và kết hợp sử dụng bất đẳng thức cơ bản như AM – GM và Cauchy – Schwarz trong chứng minh bất đẳng thức và tìm cực trị. Hy vọng chủ đề này sẽ giúp ích cho bạn đọc nhìn nhận tiếp cận bài toán bất đẳng thức và cực trị linh hoạt và bao quát hơn.

Bài toán 1. Với mọi số thực a,b thỏa mãn điều kiện $ab\geq 1$ ta luôn có

$$\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2}\geq\frac{2}{1+ab}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b$ hoặc $ab=1$.

Với $ab\leq 1$ thì bất đẳng thức đổi chiều.

Chứng minh.

Nhận xét. Bằng cách chưng minh tương tự trên ta có các bất đẳng thức cùng dạng như sau

Với mọi số thực dương a,b thay đổi thỏa mãn $ab\geq 1$ ta luôn có

$$\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+b^2}}\geq\frac{2}{\sqrt{1+ab}}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b$ hoặc $ab=1$.

Với $ab\leq 1$ bất đẳng thức đổi chiều.

Một số bất đẳng thức phụ khác cùng dạng

- $\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+y^2}\leq\frac{2}{1+xy},\left(-1<xy\leq 1\right)$.
- $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\geq\frac{2}{\sqrt{1+xy}},\left(xy\geq 1\right)$.

- $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+y^2}}\le\dfrac{2}{\sqrt{1+xy}},\left(-1<xy\le 1\right)$.

- Cho hai số thực dương *x,y* ta luôn có $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+xy}}+\dfrac{1}{\sqrt{y^2+xy}}\ge\dfrac{2}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y$.

Chứng minh.

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+xy}}+\frac{1}{\sqrt{y^2+xy}}\ge\frac{2}{\sqrt{\sqrt{\left(x^2+xy\right)\left(y^2+xy\right)}}}$$

$$\ge\frac{2}{\sqrt{\dfrac{x^2+xy+y^2+xy}{2}}}=\frac{2}{\sqrt{\dfrac{\left(x+y\right)^2}{2}}}\ge\frac{2}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

- $\dfrac{1}{1+x_1}+\dfrac{1}{1+x_2}+...+\dfrac{1}{1+x_n}\ge\dfrac{n}{1+\sqrt[n]{x_1x_2...x_n}},x_k\ge 1,k=\overline{1,n}$.

Từ bất đẳng thức này ta có thể đưa ra các bất đẳng thức cùng dạng chẳng hạn

Chứng minh rằng với mọi số thực x,y thoả mãn điều kiện $xy\ge\dfrac{4}{5}$ ta có

$$\frac{1}{4+5x^2}+\frac{1}{4+5y^2}\ge\frac{2}{4+5xy}$$

$$\frac{1}{\sqrt{4+5x^2}}+\frac{1}{\sqrt{4+5y^2}}\ge\frac{2}{\sqrt{4+5xy}}$$

Với mọi số dương a,b ta có $\dfrac{a}{b+ab}+\dfrac{b}{a+ab}\ge\dfrac{2}{1+\sqrt{ab}}$.

Chứng minh.

Sử dụng bất đẳng thức C –S ta có

$$\frac{a}{b+ab}+\frac{b}{a+ab}\ge\frac{\left(a+b\right)^2}{ab+a^2b+ab+b^2a}=\frac{\left(a+b\right)^2}{ab\left(a+b\right)+2ab}=\frac{1}{\dfrac{ab}{a+b}+\dfrac{2ab}{\left(a+b\right)^2}}.$$

$$\ge\frac{1}{\dfrac{ab}{2\sqrt{ab}}+\dfrac{1}{2}}=\frac{2}{1+\sqrt{ab}}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b$.

➢ CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho x,y,z là các số thực dương thoả mãn điều kiện $y^2 \ge xz; z^2 \ge xy$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x}{x+y} + \frac{y}{y+z} + 2014.\frac{z}{z+x}$.

Lời giải

Chú ý $z/x \ge 1$khi đó sử dụng bất đẳng thức $\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} \ge \frac{2}{1+ab}, (ab \ge 1)$

Ta có $\frac{x}{x+y} + \frac{y}{y+z} = \frac{1}{1+\frac{y}{x}} + \frac{1}{1+\frac{z}{y}} \ge \frac{2}{1+\sqrt{\frac{z}{x}}}$.

Do đó $P \ge \frac{2}{1+\sqrt{\frac{z}{x}}} + 2014.\frac{\frac{z}{x}}{\frac{z}{x}+1} = \frac{2}{1+t} + 2014.\frac{t^2}{t^2+1}$

$$= \frac{2(t-1)(503t^2+1007t+503)}{(t+1)(t^2+1)} + 1008 \ge 1008, t = \sqrt{\frac{z}{x}} \ge 1$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 1008 đạt tại $x = y = z$.

Ví dụ 2. Cho x,y,z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $x \le z$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \sqrt{2 + \frac{2x^2}{(x+y)^2} - \frac{2z(2y+z)}{(y+z)^2}} + \frac{3z}{z+x}$.

Lời giải

Biến đổi biểu thức trong căn và sử dụng bất đẳng thức C –S ta có

$$2 + \frac{2x^2}{(x+y)^2} - \frac{2z(2y+z)}{(y+z)^2} = \frac{2x^2}{(x+y)^2} + \frac{2y^2}{(y+z)^2}$$

$$= 2\left[\frac{1}{\left(1+\frac{y}{x}\right)^2} + \frac{1}{\left(1+\frac{z}{y}\right)^2}\right] \ge \left(\frac{1}{1+\frac{y}{x}} + \frac{1}{1+\frac{z}{y}}\right)^2$$

Mặt khác do: $\frac{y}{x}.\frac{z}{y} = \frac{z}{x} \ge 1$.

Nên áp dụng bài toán 1 ta có $\left(\frac{1}{1+\frac{y}{x}} + \frac{1}{1+\frac{z}{y}}\right)^2 \ge \left(\frac{2}{1+\sqrt{\frac{z}{x}}}\right)^2$.

Từ đó ta suy ra $\sqrt{2+\frac{2x^2}{(x+y)^2}-\frac{2z(2y+z)}{(y+z)^2}}\geq\frac{2}{1+\sqrt{\frac{z}{x}}}$.

Đặt $t=\sqrt{\frac{z}{x}}\geq 1$. Khi đó ta suy ra $P\geq\frac{2}{1+t}+\frac{3t^2}{t^2+1}$.

Xét hàm $f(t)=\frac{2}{1+t}+\frac{3t^2}{t^2+1}$ trên $[1;+\infty)$ ta có $f'(t)=\frac{-2}{(1+t)^2}+\frac{6t}{(t^2+1)^2}>0\ \forall t\in[1;+\infty)$

Do đó Min P = f (1) = $\frac{5}{2}$

Bài tập tương tự

Cho x,y,z là các số thực dương thoả mãn điều kiện $x=\min\{x,y,z\}$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{x}{x+y}+\frac{y}{y+z}+\frac{3z}{z+x}$.

Ví dụ 3. Cho các số thực $\frac{1}{4}\leq x\leq 1; y,z\geq 1$ thỏa mãn điều kiện $xyz=1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y}+\frac{1}{1+z}$.

Lời giải

Với $yz\geq 1$ ta có $\frac{1}{1+y}+\frac{1}{1+z}\geq\frac{2}{1+\sqrt{yz}}\Rightarrow P\geq\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+\sqrt{yz}}=\frac{1}{1+\frac{1}{yz}}+\frac{2}{1+\sqrt{yz}}$

$t=\sqrt{yz}\Rightarrow 1\leq t=\frac{1}{\sqrt{x}}\leq 2$. Suy ra $P\geq f(t)=\frac{t^2}{t^2+1}+\frac{2}{1+t}$.

Ta có : $f'(t)=\frac{2t}{\left(t^2+1\right)^2}-\frac{2}{(1+t)^2}=\frac{2t(t+1)^2-2\left(t^2+1\right)^2}{\left(t^2+1\right)^2(t+1)^2}\leq 0,\forall t\in[1;2]$.

$f(t)\geq f(2)=\frac{22}{15}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\frac{22}{15}$ đạt tại $x=\frac{1}{4}; y=z=2$.

Ví dụ 4. Cho *a,b,c* là các số thực dương.

Chứng minh rằng $\sqrt{\frac{2a}{a+b}}+\sqrt{\frac{2b}{b+c}}+\sqrt{\frac{2c}{c+a}}\leq 3$.

Lời giải

Nhận xét. Ta đã chứng minh bất đẳng thức trên bằng bất đẳng thức C –S dưới đây tiếp cận theo phương pháp hàm số.

Ta cần chứng minh: $\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{b}{a}}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{c}{b}}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{a}{c}}}\le\dfrac{3}{\sqrt{2}}$.

Đặt $x=\sqrt{\dfrac{b}{a}},y=\sqrt{\dfrac{c}{b}},z=\sqrt{\dfrac{a}{c}}\Rightarrow xyz=1$.

Bất đẳng thức trở thành: $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+y^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+z^2}}\le\dfrac{3}{\sqrt{2}}$.

Không mất tính tổng quát giả sử $z=max\{x,y,z\}\Rightarrow z\ge1\Rightarrow xy=\dfrac{1}{z}\le1$.

Khi đó sử dụng bất đẳng thức C-S và bài toán phụ ta được:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\le\sqrt{2\left(\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+y^2}\right)}\le\sqrt{\frac{4}{1+xy}}=\frac{2\sqrt{z}}{\sqrt{z+1}}.$$

Chứng minh hoàn tất nếu ta chứng minh được: $\dfrac{2\sqrt{z}}{\sqrt{z+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+z^2}}\le\dfrac{3}{\sqrt{2}}$.

Thật vậy $\dfrac{2\sqrt{z}}{\sqrt{z+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+z^2}}\le\dfrac{2\sqrt{z}}{\sqrt{z+1}}+\dfrac{\sqrt{2}}{1+z}\le\dfrac{3}{\sqrt{2}}$ (vì bất đẳng thức tương đương với $\left(\sqrt{2z}-\sqrt{z+1}\right)^2\ge0$).

Bài toán được chứng minh.

Ví dụ 5. Cho các số thực dương a,b thỏa mãn điều kiện $a+b=2ab$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $Q=\dfrac{1}{a^2+1}+\dfrac{1}{b^2+1}+\dfrac{3}{\sqrt[3]{4}}\sqrt[3]{a^2+b^2+a+b+4}$.

Lời giải

Từ giả thiết ta có: $2ab=a+b\ge2\sqrt{ab}\Rightarrow\sqrt{ab}\ge1\Rightarrow ab\ge1$.

Với $ab\ge1$ ta có BĐT: $\dfrac{1}{a^2+1}+\dfrac{1}{b^2+1}\ge\dfrac{2}{1+ab}$.

Mặt khác ta có:

$$\begin{aligned}\frac{3}{\sqrt[3]{4}}\sqrt[3]{a^2+b^2+a+b+4}&=\frac{3}{\sqrt[3]{4}}\sqrt[3]{a^2+b^2+2ab+4}\\&=\frac{3}{\sqrt[3]{4}}\sqrt[3]{(a+b)^2+4}\\&\ge\frac{3}{\sqrt[3]{4}}\sqrt[3]{4ab+4}=3\sqrt[3]{ab+1}\end{aligned}$$

Do đó : $Q \ge \frac{2}{ab+1} + 3\sqrt[3]{ab+1} = \left(\sqrt[3]{ab+1} + \sqrt[3]{ab+1} + \sqrt[3]{ab+1} + \frac{2\sqrt[3]{2}}{ab+1}\right) + \frac{2-2\sqrt[3]{2}}{ab+1}$

Áp dụng BĐT AM - GM ta có:

$$\sqrt[3]{ab+1} + \sqrt[3]{ab+1} + \sqrt[3]{ab+1} + \frac{2\sqrt[3]{2}}{ab+1} \ge 4\sqrt[4]{2\sqrt[3]{2}} = 4\sqrt[3]{2}$$

Từ giả thiết ta có:

$$2ab = a + b \ge 2\sqrt{ab} \Rightarrow \sqrt{ab} \ge 1 \Rightarrow ab \ge 1 \Rightarrow ab + 1 \ge 2 \Rightarrow \frac{1}{ab+1} \le \frac{1}{2}$$

Mà $2 - 2\sqrt[3]{2} < 0 \Rightarrow \frac{2-2\sqrt[3]{2}}{ab+1} \ge \frac{2-2\sqrt[3]{2}}{2} = 1 - \sqrt[3]{2}$

Do đó $Q \ge 4\sqrt[3]{2} + 1 - \sqrt[3]{2} = 1 + 3\sqrt[3]{2}$. Đẳng thức xảy ra khi a = b = 1.

Vậy giá trị nhỏ nhất của Q là bằng $1 + 3\sqrt[3]{2}$ đạt được khi a = b = 1.

Ví dụ 6. Cho *x,y,z* là các số thực dương thỏa mãn điều kiện

$$\left(\frac{x}{y}\right)^4 + \left(\frac{y}{z}\right)^4 + \frac{z}{x} = \frac{x}{z} + 2.$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{2y^2}{x^2+y^2} + \frac{2z^2}{y^2+z^2} - \frac{3z}{2x+z}$.

Lời giải

Theo giả thiết ta có: $\frac{x}{z} + 2 = \left(\frac{x}{y}\right)^4 + \left(\frac{y}{z}\right)^4 + \frac{z}{x} \ge 2\sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^4 . \left(\frac{y}{z}\right)^4} + \frac{z}{x} = 2\frac{x^2}{z^2} + \frac{z}{x}$.

Đặt $t = \frac{x}{z}, (t > 0) \Rightarrow t + 2 \ge 2t^2 + \frac{1}{t} \Leftrightarrow 2t^3 - t^2 - 2t + 1 \le 0$

$$\Leftrightarrow (t-1)\left(2t^2 + t - 1\right) \le 0 \Leftrightarrow (t-1)(t+1)(2t-1) \le 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \le t \le 1.$$

Khi đó $\frac{x}{y}.\frac{y}{z} = \frac{x}{z} = t \le 1 \Rightarrow \frac{1}{\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1} + \frac{1}{\left(\frac{y}{z}\right)^2 + 1} \le \frac{2}{1 + \frac{x}{y}.\frac{y}{z}} = \frac{2}{1+t}$.

Ta có: $\frac{y^2}{x^2+y^2} + \frac{z^2}{y^2+z^2} = \frac{1}{\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1} + \frac{1}{\left(\frac{y}{z}\right)^2 + 1} \le \frac{2}{1 + \frac{x}{y}.\frac{y}{z}} = \frac{2}{1 + \frac{x}{z}} = \frac{2}{1+t}$.

Suy ra $P \le f(t) = \frac{4}{t} - \frac{3}{2t+1}$.

Xét hàm số $f(t)=\frac{4}{t}-\frac{3}{2t+1}$ liên tục trên đoạn $\left[\frac{1}{2};1\right]$ ta có:

$$f'(t)=\frac{6}{(2t+1)^2}-\frac{4}{(t+1)^2}=-\frac{2\left(5t^2+2t-1\right)}{(t+1)^2(2t+1)^2}\le 0,\forall t\in\left[\frac{1}{2};1\right].$$

Do đó f(t) là hàm nghịch biến trên đoạn $\left[\frac{1}{2};1\right]$. Suy ra $P\le f(t)\le f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{7}{6}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{x}{y}=\frac{y}{z},\frac{x}{z}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow z=2x,y=\sqrt{2}x$.

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng $\frac{7}{6}$ đạt tại $z=2x,y=\sqrt{2}x$.

Ví dụ 7. (TSĐH Khối A 2011) Cho các số thực $x,y,z\in[1;4]$ thỏa mãn điều kiện $x\ge y,x\ge z$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{x}{2x+3y}+\frac{y}{y+z}+\frac{z}{z+x}$.

Lời giải

Viết lại P dưới dạng: $P=\frac{1}{2+\frac{3y}{x}}+\frac{1}{1+\frac{z}{y}}+\frac{1}{1+\frac{x}{z}}$.

Do $x\ge y\Rightarrow\frac{z}{y}.\frac{x}{z}=\frac{x}{y}\ge 1$. Áp dụng bất đẳng thức trong bài toán 1, ta được

$$\frac{1}{1+\frac{z}{y}}+\frac{1}{1+\frac{x}{z}}\ge\frac{2}{1+\sqrt{\frac{x}{y}}}\Rightarrow P\ge\frac{1}{2+\frac{3y}{x}}+\frac{2}{1+\sqrt{\frac{x}{y}}}.$$

Đặt $t=\sqrt{\frac{x}{y}},(1\le t\le 2)$ suy ra $P\ge\frac{1}{2+\frac{3}{t^2}}+\frac{2}{1+t}=\frac{t^2}{2t^2+3}+\frac{2}{1+t}$.

Xét hàm số $f(t)=\frac{t^2}{2t^2+3}+\frac{2}{1+t}$ trên $[1;+\infty)$, ta được:

$$f'(t)=\frac{6t}{\left(2t^2+3\right)^2}-\frac{2}{(1+t)^2}<0,\forall t\in[1;2].$$

Suy ra $\min\limits_{t\in[2;2]}f(t)=\mathrm{f}(2)=\frac{34}{33}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\frac{34}{33}$ đạt tại $x=4,y=1,z=2$.

Nhận xét. Ngoài ra có thể chứng minh bằng tam thức bậc hai, khảo sát hàm nhiều biến(chương 1 – chương 3).

Ví dụ 8. Cho *a,b,c* là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $abc = 1$ và $max\{a,b,c\} \le 4$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+b^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+c}}.$$

Lời giải

Nhận xét. Với vai trò của a và b như nhau làm ta nghĩ đến bất đẳng thức quen thuộc $\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+b^2}} \le \frac{2}{\sqrt{1+ab}}$.

Để có được điều này ta cần có $ab \le 1$. Do đó $c = \frac{1}{ab} \ge 1$. Vậy ta cần chứng minh rằng P đạt giá trị lớn nhất trong trường hợp $c = max\{a,b,c\}$.

Thật vậy giả sử $a = max\{a,b,c\}$. Khi đó $a \ge 1$ và ta cần chứng minh

$$\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+b^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+c}} \le \frac{1}{\sqrt{1+c^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+b^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+a}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{1+c}} - \frac{1}{\sqrt{1+c^2}} \le \frac{1}{\sqrt{1+a}} - \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \quad (1).$$

\+ Nếu $c < 1 \Rightarrow VT_{(1)} < 0 < VP_{(1)}$ bất đẳng thức luôn đúng.

\+ Nếu $c \ge 1$ khi đó xét hàm số $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ trên đoạn $[1;4]$ ta có

$$f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{(1+x)^3}} + \frac{x}{\sqrt{(1+x^2)^3}} = \frac{2x\sqrt{(1+x)^3} - \sqrt{(1+x^2)^3}}{2\sqrt{(1+x)^3(1+x^2)^3}} > 0.$$

Do

$$2x\sqrt{(1+x)^3} \ge x\sqrt{x}.\sqrt{(1+x)^3} = \sqrt{x^3(1+x)^3} = \sqrt{(x+x^2)^3} \ge \sqrt{(1+x^2)^3}, \forall x \in [1;4].$$

Do đó f(x) là hàm đồng biến trên đoạn $[1;4]$. Nên $c \le a \Rightarrow f(\text{c}) \le \text{f(a)}$. Ta có (1) đúng.

Vậy P đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi $c = max\{a,b,c\}$ và ta có $c \ge 1, ab \le 1$.

Áp dụng bất đẳng thức đã phân tích ở trên ta được

$$P \le \frac{2}{\sqrt{1+ab}} + \frac{1}{\sqrt{1+c}} = \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{c}}} + \frac{1}{\sqrt{1+c}} = g(c) = \frac{2\sqrt{c}+1}{\sqrt{1+c}}.$$

Xét hàm số $g(c)=\dfrac{2\sqrt{c}+1}{\sqrt{1+c}}$ liên tục trên đoạn $[1;4]$ ta có

$$g'(c)=\frac{2-\sqrt{c}}{2(1+c)\sqrt{c^2+c}}\ge 0,\forall c\in[1;4].$$

Do đó g(c) là hàm đồng biến trên đoạn $[1;4]$ suy ra $P\le g(c)\le g(4)=\sqrt{5}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b,c=4,abc=1\Leftrightarrow a=b=\dfrac{1}{2},c=4$.

Ví dụ 9. Cho *x,y,z* là các số thực thuộc đoạn $\left[\dfrac{1}{3};3\right]$.

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{x}{x+y}+\frac{y}{y+z}+\frac{z}{z+x}.$$

Lời giải

Trong chương 1 tôi đã trình bày bằng cách sử dụng tam thức bậc hai dưới đây chúng ta áp dụng bài toán đã nêu.

\+ Tìm giá trị nhỏ nhất.

Không mất tính tổng quát giả sử $z=\max\{x,y,z\}\Rightarrow \dfrac{z}{x}\ge 1$.

Khi đó sử dụng bất đẳng thức phụ đã cho ta có

$$\frac{x}{x+y}+\frac{y}{y+z}=\frac{1}{1+\frac{y}{x}}+\frac{1}{1+\frac{z}{y}}\ge\frac{2}{1+\sqrt{\frac{y}{x}.\frac{z}{y}}}=\frac{2}{1+\sqrt{\frac{z}{x}}}.$$

Khi đó $P\ge\dfrac{2}{1+\sqrt{\frac{z}{x}}}+\dfrac{1}{1+\frac{x}{z}}=\dfrac{2}{1+t}+\dfrac{t^2}{t^2+1},t=\sqrt{\dfrac{z}{x}},1\le t\le 3$.

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{2}{1+t}+\dfrac{t^2}{t^2+1}$ liên tục trên đoạn [1;3] ta có

$$f'(t)=-\frac{2(t-1)^2(t^2+t+1)}{(t+1)^2(t^2+1)^2}\le 0,\forall t\in[1;3].$$

Do đó f(t) nghịch biến trên đoạn [1;3] vì vậy $f(t)\ge f(3)=\dfrac{7}{5}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $z=9x,x=y\Leftrightarrow x=y=\dfrac{1}{3},z=3$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 7/5.

\+ Tìm giá trị lớn nhất

Ta có $\frac{y}{x}.\frac{x}{z}=\frac{y}{z}\le 1\Rightarrow \frac{x}{x+y}+\frac{z}{z+x}\le \frac{2}{1+\sqrt{\frac{y}{z}}}$.

Do đó $P\le \frac{y}{y+z}+\frac{2}{1+\sqrt{\frac{y}{z}}}=\frac{2}{t+1}+\frac{t^2}{t^2+1},t=\sqrt{\frac{y}{z}}\in\left[\frac{1}{3};1\right]$.

Xét hàm số tương tự trên ta có $P\le g(t)=\frac{2}{t+1}+\frac{t^2}{t^2+1}\le g\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{8}{5}$.

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng 8/5 đạt tại $x=z=3,y=\frac{1}{3}$.

Ví dụ 10. Cho các số thực $a,b,c\ge \frac{1}{9}$ thoả mãn điều kiện $abc=1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{a}{b+ab}+\frac{b}{c+ab}+\frac{1}{1+c}$.

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức C –S ta có

$$\frac{a}{b+ab}+\frac{b}{a+ab}\ge \frac{(a+b)^2}{ab+a^2b+ab+b^2a}$$

$$=\frac{(a+b)^2}{ab(a+b)+2ab}=\frac{1}{\frac{ab}{a+b}+\frac{2ab}{(a+b)^2}}$$

$$\ge \frac{1}{\frac{ab}{2\sqrt{ab}}+\frac{1}{2}}=\frac{2}{1+\sqrt{ab}}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b$.

Khi đó $P\ge \frac{2}{1+\sqrt{ab}}+\frac{1}{1+c}=\frac{2}{1+\sqrt{ab}}+\frac{ab}{ab+1}$.

Đặt $t=\sqrt{ab}$. Do $a,b,c\ge \frac{1}{9}\Rightarrow \frac{1}{9}\le t=\sqrt{ab}=\frac{1}{\sqrt{c}}\le 3;P\ge \frac{2}{1+t}+\frac{t^2}{t^2+1}$.

Xét hàm số $f(t)=\frac{2}{1+t}+\frac{t^2}{t^2+1}$ liên tục trên đoạn [1/9;3] ta có

$$f'(t)=-\frac{2(t-1)^2(t^2+t+1)}{(t+1)^2(t^2+1)^2}\le 0,\forall t\in[1;3].$$

Do đó f(t) nghịch biến trên đoạn [1/9;3] vì vậy $f(t) \geq f(3) = \frac{7}{5}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = 3, c = \frac{1}{9}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 7/5.

➢ **BÀI TẬP RÈN LUYỆN**

Bài 1. Cho *x,y,z* là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $x \geq z$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{y}{\sqrt{y^2+z^2}} + \sqrt{\frac{z}{x+z}}.$$

HD: $P = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{z}{y}\right)^2}} + \sqrt{\frac{z}{x+z}} \leq \frac{2}{\sqrt{1+z/x}} + \sqrt{\frac{z/x}{1+z/x}} \leq \sqrt{5}$.

Bài 2. Cho các số thực không âm thay đổi thỏa mãn điều kiện $a \leq b \leq c$ và $abc = 1$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} + \frac{2}{1+c}$.

HD: $P \leq \frac{2}{1+ab} + \frac{2}{1+c} = 2$.

Bài 3. Cho *x,y,z* là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $xy \geq 1, z \geq 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x}{y+1} + \frac{y}{x+1} + \frac{z^3+2}{3(xy+1)}$.

HD: $P = (x+y+1)\left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1}\right) + \frac{z^3+2}{3(xy+1)} - 2 \geq \frac{2\left(2\sqrt{xy}+1\right)}{1+\sqrt{xy}} + \frac{1}{xy+1} - 2 \geq \frac{3}{2}$.

Bài 4. Cho *x,y,z* là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{1}{\sqrt{x^2+xy}} + \frac{1}{\sqrt{y^2+xy}} + \frac{2\sqrt{3}}{1+z}$.

HD: Sử dụng bất đẳng thức: $\frac{1}{\sqrt{x^2+xy}} + \frac{1}{\sqrt{y^2+xy}} \geq \frac{2}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Suy ra $P \geq \frac{2\sqrt{3}}{1+z} + \frac{2}{\sqrt{1-z^2}} \geq \frac{8}{\sqrt{3}}$.

Bài 5. Cho *a,b,c* là các số thực dương không nhỏ hơn 1.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{1}{1+a^6}+\frac{2}{1+b^3}+\frac{3}{1+c^2}+6\sqrt{1+abc\left(abc-1\right)}.$$

HD: Sử dụng bất đẳng thức phụ sau:

$$\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2}\geq\frac{2}{1+ab},\forall ab\geq 1 \text{ và } \frac{1}{1+a^3}+\frac{1}{1+b^3}+\frac{1}{1+c^3}\geq\frac{3}{1+abc},\forall a,b,c\geq 1$$

Ta có $2\left(\frac{1}{1+b^3}+\frac{1}{1+c^2}\right)\geq\frac{4}{1+c\sqrt{b^3}};\frac{1}{1+a^6}+\frac{1}{1+c^2}\geq\frac{2}{1+a^3c}$.

Suy ra

$$P\geq 2\left(\frac{1}{1+ca^3}+\frac{1}{1+c\sqrt{b^3}}+\frac{1}{1+c\sqrt{b^3}}\right)+6\sqrt{1+abc\left(abc-1\right)}\geq\frac{6}{1+abc}+6\sqrt{1+abc\left(abc-1\right)}.$$

Đặt $t=abc,\left(t\geq 1\right)$ ta có: $P\geq f(t)=\frac{6}{t+1}+6\sqrt{1+t\left(t-1\right)}$.

Xét hàm số $f(t)=\frac{6}{t+1}+6\sqrt{1+t\left(t-1\right)}$ với $t\geq 1$ ta có

$$f'(t)=-\frac{6}{\left(t+1\right)^2}+\frac{3\left(2t-1\right)}{\sqrt{t^2-t+1}}=\frac{3\left(2t-1\right)\left(t+1\right)^2-6\sqrt{t^2-t+1}}{\left(t+1\right)^2\sqrt{t^2-t+1}}>0,\forall t\geq 1.$$

Do đó f(t) là hàm đồng biến trên $\left[1;+\infty\right)$.

Suy ra $P\geq f(t)\geq f(1)=9$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 9 đạt tại $a=b=c=1$.

Bài 6. Cho *a,b,c* là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $a^2+b^2+c^2=1$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\frac{1}{\sqrt{a+1}}+\frac{1}{\sqrt{b+1}}+\frac{1}{\sqrt{c+2}}$.

HD:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{a+1}}+\frac{1}{\sqrt{b+1}}\right)^2=\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{2}{\sqrt{\left(1+a\right)\left(1+b\right)}}=\frac{a+b+2}{ab+a+b+1}+\frac{2}{\sqrt{ab+a+b+1}}$$

$$\leq\frac{a+b+2}{a+b+1}+\frac{2}{\sqrt{a+b+1}}=\left(1+\frac{1}{\sqrt{a+b+1}}\right)^2$$

Suy ra $\frac{1}{\sqrt{a+1}}+\frac{1}{\sqrt{b+1}}\leq 1+\frac{1}{\sqrt{a+b+1}}$.

Mặt khác: $\left(a+b+c\right)^2\geq a^2+b^2+c^2=1\Rightarrow a+b\geq 1-c$.

Suy ra $P \le f(c) = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2-c}} + \dfrac{1}{\sqrt{c+2}}$.

Xét hàm số $f(c) = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2-c}} + \dfrac{1}{\sqrt{c+2}}$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ ta có:

$f'(c) = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{\sqrt{(2-c)^3}} - \dfrac{1}{\sqrt{(2+c)^3}}\right] \ge 0, \forall c \in [0;1]$. Do đó f(c) là hàm đồng biến trên $[0;1]$.

Suy ra $P \le f(c) \le f(1) = 2 + \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $c = 1, a = b = 0$.

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng $2 + \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ đạt tại $a = b = 0, c = 1$.

Nhận xét. Ta có thể đánh giá $\dfrac{1}{\sqrt{2-c}} + \dfrac{1}{\sqrt{c+2}}$ bằng biến đổi tương đương như sau:

$$\dfrac{1}{\sqrt{2-c}} + \dfrac{1}{\sqrt{c+2}} = \sqrt{\left(\dfrac{1}{\sqrt{2-c}} + \dfrac{1}{\sqrt{c+2}}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{1}{2-c} + \dfrac{1}{2+c} + \dfrac{2}{\sqrt{4-c^2}}}$$
$$= \sqrt{\dfrac{4}{4-c^2} + \dfrac{2}{\sqrt{4-c^2}}} \le \sqrt{\dfrac{4}{4-1} + \dfrac{2}{\sqrt{4-1}}} = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{3}}$$

Bài 7. Cho *a,b,c,d* là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a \ge b \ge c \ge d$ và $abcd = 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thứ $P = \dfrac{1}{1+a} + \dfrac{1}{1+b} + \dfrac{1}{1+c} + \dfrac{3}{1+d}$.

HD: Do $a \ge b \ge c \ge d$ và $abcd = 1$ nên $ab \ge 1 \ge cd \ge d^2$.

Với $ab \ge 1$ ta có: $\dfrac{1}{1+a} + \dfrac{1}{1+b} \ge \dfrac{2}{1+\sqrt{ab}} = \dfrac{2}{1+\dfrac{1}{\sqrt{cd}}} \ge \dfrac{2}{1+\dfrac{1}{d}} = \dfrac{2d}{1+d}$.

Vì $cd \le 1 \Rightarrow d \le \dfrac{1}{c} \Rightarrow \dfrac{1}{1+c} + \dfrac{1}{1+d} \ge \dfrac{1}{1+c} + \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{c}} = \dfrac{1}{1+c} + \dfrac{c}{1+c} = 1$.

Mặt khác: $\dfrac{2d}{1+d} + \dfrac{2}{1+d} = 2$.

Suy ra $P=\left(\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}\right)+\left(\frac{1}{1+c}+\frac{1}{1+d}\right)+\frac{2}{1+d}\geq\frac{2d}{1+d}+1+\frac{2}{1+d}=3$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 3 đạt tại $a=b=c=d=1$.

Bài toán 2. Cho a,b,c là các số thực không âm thoả mãn điều kiện $a^2+b^2+c^2=k$, trong đó $k\geq 1$.

Chứng minh rằng

a) $k+2bc\geq 2a(b+c)$.

b) $(a+b+c)^2\leq 2k(1+bc)^2$.

c) $a+b+c-\frac{2}{k}abc\leq\sqrt{2k}$.

Chứng minh.

a) Theo giả thiết ta có: $k+2bc=a^2+b^2+c^2+2bc=a^2+(b+c)^2$.

Sử dụng bất đẳng thức AM – GM ta có:

$$a^2+(b+c)^2\geq 2a(b+c)\Rightarrow k+2bc\geq 2a(b+c).$$

Bất đẳng thức được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=\sqrt{\frac{k}{2}},c=0$ hoặc $a=c=\sqrt{\frac{k}{2}},c=0$.

b) Ta cần chứng minh: $k+2a(b+c)+2bc\leq 2k\left(1+b^2c^2+2bc\right)$

$$\Leftrightarrow 2kb^2c^2+2(2k-1)bc+k\geq 2a(b+c)$$

Sử dụng bất đẳng thức đã chứng ở câu a) ta chỉ cần chứng minh

$$2kb^2c^2+2(2k-1)bc+k\geq k+2bc$$

$$\Leftrightarrow kb^2c^2+4(k-1)bc\geq 0\Leftrightarrow bc\left(kbc+4(k-1)\right)\geq 0$$

Bất đẳng thức cuối luôn đúng do $k\geq 1$.

Nhận xét. Từ b) ta có một bất đẳng thức rất hay sử dụng là: $\frac{a}{1+bc}\leq\frac{\sqrt{2k}a}{a+b+c}$.

c) Sử dụng bất đẳng thức C –S ta có

$$a\left(1-\frac{2}{k}bc\right)+b+c\leq\sqrt{\left(a^2+(b+c)^2\right)\left(\left(1-\frac{2}{k}bc\right)^2+1\right)}$$

$$=\sqrt{(k+2bc)\left(\frac{4}{k^2}b^2c^2-\frac{4}{k}bc+2\right)}$$

Vậy ta chỉ cần chứng minh

$$\left(k+2bc\right)\left(\frac{4}{k^2}b^2c^2-\frac{4}{k}bc+2\right)\le 2k$$

$$\Leftrightarrow \frac{8b^3c^3}{k^2}-\frac{4b^2c^2}{k}\le 0 \Leftrightarrow 4b^2c^2\left(2bc-k\right)\le 0$$

Bất đẳng thức luôn đúng vì theo AM – GM ta có

$2bc\le b^2+c^2\le a^2+b^2+c^2=k$.

Các bất đẳng thức dạng này đã trình bày trong chương 2 (Kỹ thuật sử dụng bất đẳng thức C-S).

➢ CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. (TSĐH Khối A,A1/2014) Cho x,y,z là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $x^2+y^2+z^2=2$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\dfrac{x^2}{x^2+yz+x+1}+\dfrac{y+z}{x+y+z+1}-\dfrac{1+yz}{9}$.

Lời giải

Nhận xét. Với các bất đẳng thức và bài toán cực trị với điều kiện các biến không âm thông thường dấu bằng xảy ra tại một biến bằng 0 và để ý để P lớn nhất ta thấy $yz=0$ là hợp lý nhất. Vậy ta tìm cách đánh giá P theo đại lượng $1+yz$ và $y=0$ hoặc $z=0$.

Ta có $2\left(1+yz\right)=x^2+\left(y+z\right)^2\ge 2x\left(y+z\right)$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=y+z$.

Suy ra $x^2+yz+x+1\ge x^2+x+x\left(y+z\right)=x\left(x+y+z+1\right)$.

Do đó $P\le \dfrac{x^2}{x\left(x+y+z+1\right)}+\dfrac{y+z}{x+y+z+1}-\dfrac{1+yz}{9}$

$$=\frac{x+y+z}{x+y+z+1}-\frac{1+yz}{9}=1-\left(\frac{1}{x+y+z+1}+\frac{1+yz}{9}\right)$$

Theo bất đẳng thức C-S ta có

$x+y+z\le\sqrt{2\left[x^2+\left(y+z\right)^2\right]}=2\sqrt{1+yz}$.

Suy ra $P\le 1-\dfrac{1}{2\sqrt{1+yz}+1}-\dfrac{1+yz}{9}$.

Đặt $t=\sqrt{1+yz},\left(t\ge 1\right)$ ta có $P\le f\left(t\right)=1-\dfrac{1}{2t+1}-\dfrac{t^2}{9}$.

Xét hàm số $f(t)=1-\dfrac{1}{2t+1}-\dfrac{t^2}{9}$ với $t\ge 1$ ta có

$f'(t)=\dfrac{2}{(2t+1)^2}-\dfrac{2t}{9}=\dfrac{18-2t(2t+1)^2}{9(2t+1)^2}$; $f'(\mathrm{t})=0 \Leftrightarrow 18-2t(2t+1)^2=0 \Leftrightarrow \mathrm{t}=1$.

Ta có f'(t) đổi dấu từ dương sang âm khi đi qua $t=1$.

Do đó f(t) đạt cực đại tại $t=1$.

Do đó $P\le f(t)\le f(1)=\dfrac{5}{9}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases}1+yz=1\\ x=y+z\\ x^2+y^2+z^2=2\\ x,y,z\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \ x=1,y=1,z=0 \text{ hoặc } x=1,y=0,z=1.$$

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng $\dfrac{5}{9}$ đạt tại $x=1,\mathrm{y}=0,\mathrm{z}=1$ hoặc $x=1,y=0,z=1$.

Ví dụ 2. Cho a,b,c là các số thực không âm thoả mãn điều kiện $a^2+b^2+c^2=1$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\dfrac{2a+c}{1+bc}+\dfrac{2b+c}{1+ca}+\dfrac{a+b+c}{1+\sqrt{2}abc}$.

Lời giải

Ta có

$$(a+b+c)^2\le 2(1+bc)^2 \Rightarrow \frac{2a+c}{1+bc}\le\sqrt{2}.\frac{2a+c}{a+b+c}$$

$$(a+b+c)^2\le 2(1+ca)^2 \Rightarrow \frac{2b+c}{1+ca}\le\sqrt{2}.\frac{2b+c}{a+b+c}$$

$$\Rightarrow \frac{2a+c}{1+bc}+\frac{2b+c}{1+ca}\le\sqrt{2}.\frac{2a+c}{a+b+c}+\sqrt{2}.\frac{2b+c}{a+b+c}=2\sqrt{2}$$

Theo bất đẳng thức đã chứng minh tại câu c) bài toán phụ ta có:

$$a+b+c-2abc\le\sqrt{2}.$$

Thật vậy sử dụng bất đẳng thức C –S ta có

$$a+b+c-2abc=a(1-2bc)+(b+c)$$

$$\le\sqrt{\left(a^2+(b+c)^2\right)\left((1-2bc)^2+1\right)}$$

$$=\sqrt{(1+2bc)\left(4b^2c^2-4bc+2\right)}$$

Vậy ta chỉ cần chứng minh

$$(1+2bc)\left(4b^2c^2-4bc+2\right)\le 2 \Leftrightarrow 4b^2c^2(2bc-1)\le 0.$$

Bất đẳng thức cuối đúng vì theo AM – GM ta có

$$2bc\le b^2+c^2\le a^2+b^2+c^2=1.$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Từ đó suy ra $P\le 3\sqrt{2}$.

Dấu bằng đạt tại $a=b=\frac{1}{\sqrt{2}}, c=0$.

Bài tập tương tự

Cho a,b,c là các số thực không âm thoả mãn điều kiện $a^2+b^2+c^2=2$.

Chứng minh rằng $\frac{2a+c}{1+bc}+\frac{2b+c}{1+ca}+\frac{a+b+c}{abc+2}\le 5$.

Ví dụ 3. Cho x,y,z là các số thực không âm thoả mãn điều kiện $x^2+y^2+z^2=1$.

Chứng minh rằng $1\le \frac{x}{1+yz}+\frac{y}{1+zx}+\frac{z}{1+xy}\le \sqrt{2}$.

Lời giải

Chứng minh bất đẳng thức vế phải

Chú ý $(x+y+z)^2\le 2(1+yz)^2 \Rightarrow \frac{x}{1+yz}\le \frac{\sqrt{2}x}{x+y+z}$.

Tương tự ta có: $\frac{y}{1+zx}\le \frac{\sqrt{2}y}{x+y+z};\frac{z}{1+xy}\le \frac{\sqrt{2}z}{x+y+z}$.

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên ta có đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=\frac{1}{\sqrt{2}}, z=0$ hoặc các hoán vị.

Ví dụ 4. Cho x,y,z là các số thực không âm thoả mãn điều kiện $x^2+y^2+z^2=2$.

Chứng minh rằng $\frac{x^2}{x^2+yz+1}+\frac{y^2}{y^2+zx+1}+\frac{z^2}{z^2+xy+1}\le 1$.

Lời giải

Ta có $2+2yz=x^2+(y+z)^2\ge 2x(y+z)$

$$\Rightarrow 1+yz\ge x(y+z)\Rightarrow x^2+yz+1\ge x(x+y+z)$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{x^2+yz+1}\le \frac{x}{x+y+z}$$

Tương tự ta có: $\frac{y^2}{y^2+zx+1}\le \frac{y}{x+y+z};\frac{z^2}{z^2+xy+1}\le \frac{z}{x+y+z}$

Cộng lại theo vế ba bất đẳng thức trên ta có đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = 1, z = 0$ hoặc các hoán vị.

Ví dụ 5. Cho x,y,z là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $x^2 + y^2 + z^2 = 2$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$M = \frac{x^2}{x^2 + yz + x + 1} + \frac{y+z}{x+y+z+1} + \frac{1}{xyz+3}.$$

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức AM – GM ta có:

$$2 + 2yz = x^2 + y^2 + z^2 + 2yz = x^2 + (y+z)^2 \geq 2x(y+z)$$

$$\Rightarrow 1 + yz \geq x(y+z) \Rightarrow x^2 + x + yz + 1 \geq x(x+y+z+1)$$

Do đó $\dfrac{x^2}{x^2 + x + yz + 1} \leq \dfrac{x}{x+y+z+1}$.

Ta chứng minh $x + y + z - xyz \leq 2$.

Thật vậy sử dụng bất đẳng thức C –S ta có

$$x + y + z - xyz = x(1 - yz) + (y+z) \leq \sqrt{\left(x^2 + (y+z)^2\right)\left((1-yz)^2 + 1\right)}$$

$$= \sqrt{2(1+yz)\left(y^2z^2 - 2yz + 2\right)} = \sqrt{y^2z^2(yz-1) + 4} \leq 2$$

Bất đẳng thức cuối đúng vì theo AM – GM ta có

$$yz \leq \frac{y^2 + z^2}{2} \leq \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2} = 1.$$

Từ đó suy ra $M \leq \dfrac{x}{x+y+z+1} + \dfrac{y+z}{x+y+z+1} + \dfrac{1}{x+y+z+1} = 1$.

Với $x = y = 1, z = 0$ thì M bằng 1. Vậy giá trị lớn nhất của M bằng 1.

Bài tập tương tự

Cho x,y,z là các số thực không âm thoả mãn điều kiện $x^2 + y^2 + z^2 = 8$.

Chứng minh rằng $\dfrac{x^2}{x^2 + x + 4 + yz} + \dfrac{y+z}{x+y+z+1} + \dfrac{\sqrt{2}}{xyz + 5\sqrt{2}} \leq 1$.

➢ BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1. Cho x,y,z là các số thực không âm thoả mãn điều kiện $x^2 + 4y^2 + z^2 = 8$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{4yz + 8}{xz + 2yx + 2yz} + 2\sqrt{(y-1)^2 + (z-1)^2 + 3yz}.$$

HD: Chú ý

$$4yz+8=4yz+4y^2+z^2+x^2=x^2+(2y+z)^2\ge 2x(2y+z)$$

$$\Rightarrow 2yz+4\ge x(2y+z)\Rightarrow \frac{4yz+8}{xz+2yx+2yz}\ge\frac{4yz+8}{4yz+4}=\frac{yz+2}{yz+1}.$$

Nhóm thành hằng đẳng thức ta có:

$$(y-1)^2+(z-1)^2+3yz=(y+z-1)^2+1+yz\ge 1+yz.$$

Suy ra $P\ge\frac{yz+2}{yz+1}+\sqrt{4(1+yz)}\ge 4$.

Bài 2. Cho x,y,z là các số thực không âm thoả mãn điều kiện $x^2+y^2+z^2=2$.

Chứng minh rằng $\frac{x}{1+yz}+\frac{y}{1+zx}+\frac{z}{1+xy}\le 2$.

HD: Chứng minh $\frac{x}{1+yz}\le\frac{2x}{x+y+z};\frac{y}{1+zx}\le\frac{2y}{x+y+z};\frac{z}{1+xy}\le\frac{2z}{x+y+z}$.

Bài 3. Cho x,y,z là các số thực không âm thoả mãn điều kiện $x^2+y^2+z^2=2$.

Chứng minh rằng $\sqrt{\frac{x}{1+yz}}+\sqrt{\frac{y}{1+zx}}+\frac{z}{2(1+xy)}\le 2$.

HD: Sử dụng bất đẳng thức AM – GM ta có:

$$\sqrt{\frac{x}{1+yz}}+\sqrt{\frac{y}{1+zx}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{x}{1+yz}+\frac{y}{1+zx}+2\right).$$

Chứng minh $\frac{x}{1+yz}\le\frac{2x}{x+y+z};\frac{y}{1+zx}\le\frac{2y}{x+y+z};\frac{z}{1+xy}\le\frac{2z}{x+y+z}$.

Bài 4. Cho a,b,c là các số thực không âm thoả mãn điều kiện $a^2+b^2+c^2=2$.

Chứng minh rằng $\frac{2a+c}{1+bc}+\frac{2b+c}{1+ca}+\frac{a+b+c}{abc+2}\le 5$.

HD: Chứng minh $a+b+c-abc\le 2;1+bc\ge\frac{a+b+c}{2};1+ca\ge\frac{a+b+c}{2}$.

Bài 5. Cho a,b,c là các số thực không âm thoả mãn điều kiện $a^2+b^2+c^2=\frac{5}{2}$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=ab+bc+ca-\frac{18}{\sqrt{9-5(1+bc)^2}+1}$.

HD: $ab+bc+ca=\frac{(a+b+c)^2-\frac{5}{2}}{2}\le\frac{5}{2}(1+bc)^2-\frac{5}{4}$

$$\Rightarrow P \le \frac{1}{2}\left[5(1+bc)^2 - \frac{36}{\sqrt{9-5(1+bc)^2}+1}\right] - \frac{5}{4} \le -\frac{33}{4}.$$

Bài 6. Cho *x,y,z* là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $x^4+y^4+z^4=2$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{x^4}{x^4+x^2+yz\left(2y^2+2z^2+3yz\right)+1} + \frac{(y+z)^2}{x^2+1+(y+z)^2} - \frac{1+yz\left(2y^2+2z^2+3yz\right)}{9}$$

HD: Ta có

$$2+2yz\left(2y^2+2z^2+3yz\right) = x^4+y^4+z^4+2yz\left(2y^2+2z^2+3yz\right)$$

$$= x^4+(y+z)^4 \ge 2x^2(y+z)^2$$

$$\Rightarrow 1+yz\left(2y^2+2z^2+3yz\right) \ge x^2(y+z)^2$$

$$\Rightarrow x^4+x^2+yz\left(2y^2+2z^2+3yz\right)+1$$

$$\ge x^4+x^2+x^2(y+z)^2 = x^2\left[x^2+1+(y+z)^2\right]$$

$$\Rightarrow \frac{x^4}{x^4+x^2+yz\left(2y^2+2z^2+3yz\right)+1} \le \frac{x^2}{x^2+1+(y+z)^2}$$

Mặt khác: $1+yz\left(2y^2+2z^2+3yz\right) = \dfrac{x^4+(y+z)^4}{2} \ge \dfrac{1}{4}\left[x^2+(y+z)^2\right]^2$.

Suy ra $P \le \dfrac{x^2+(y+z)^2}{x^2+1+(y+z)^2} - \dfrac{\left(x^2+(y+z)^2\right)^2}{36}$.

Đặt $t = x^2+(y+z)^2, (t>0)$ ta có $P \le f(t) = \dfrac{t}{t+1} - \dfrac{t^2}{36}$.

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{t}{t+1} - \dfrac{t^2}{36}$ với $t>0$ ta có

$f'(t) = \dfrac{1}{(t+1)^2} - \dfrac{t}{18}$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 2$ (do $t>0$).

Ta có f'(t) đổi dấu từ dương sang âm khi đi qua $t=2$ nên f(t) đạt cực đại tại $t=2$.

Do đó $P \le f(t) \le f(2) = \dfrac{5}{9}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $(x;y;z) = (1;1;0);(1;0;1)$.

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng $\frac{5}{9}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $(x;y;z)=(1;1;0);(1;0;1)$.

Cách 2: Ta có:

$$2+2yz(2y^2+2z^2+3yz)=x^4+y^4+z^4+2yz(2y^2+2z^2+3yz)$$
$$=x^4+(y+z)^4\ge 2x^2(y+z)^2$$

Do đó:

$$P\le\frac{x^2}{x^2+(y+z)^2+1}+\frac{(y+z)^2}{x^2+(y+z)^2+1}-\frac{x^4+(y+z)^4}{18}$$
$$=\frac{x^2+(y+z)^2}{x^2+(y+z)^2+1}-\frac{x^4+(y+z)^4}{18}$$
$$=1-\left[\frac{1}{x^2+(y+z)^2+1}+\frac{x^4+(y+z)^4}{18}\right].$$
$$\le 1-\left[\frac{2}{x^4+(y+z)^4+4}+\frac{x^4+(y+z)^4+4}{18}-\frac{4}{18}\right]\le\frac{5}{9}$$

Vậy $MaxP=\frac{5}{9}$ khi $x=1,y=1,z=0$ hoặc $x=1,y=0,z=1$.

Bài 7. Cho *x*,*y*,*z* là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $x^3+y^3+z^3=2$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{x^2}{x^2+x+yz(y+z)+1}+\frac{y+z}{x+y+z+1}-\frac{2(1+yz(y+z))}{27}.$$

HD: Ta có

$$3+3yz(y+z)=x^3+y^3+z^3+3yz(y+z)+1=x^3+(y+z)^3+1\ge 3x(y+z)$$
$$\Rightarrow x(y+z)\le 1+yz(y+z)$$
$$\Rightarrow x^2+x+yz(y+z)+1\ge x^2+x+x(y+z)=x(x+y+z+1).$$
$$\Rightarrow\frac{x^2}{x^2+x+yz(y+z)+1}\le\frac{x}{x+y+z+1}$$
$$\Rightarrow P\le\frac{x+y+z}{x+y+z+1}-\frac{2(1+yz(y+z))}{27}$$

Mặt khác ta có

$$\begin{aligned}(x+y+z)^3 &= x^3+y^3+z^3+3x(y+z)(x+y+z)\\ &= 2+3x(y+z)(x+y+z)\\ &\le 2+(x+y+z)\left(3+3yz(y+z)\right)\\ &\Rightarrow 1+yz(y+z)\ge \frac{(x+y+z)^3-2}{3(x+y+z)}\end{aligned}.$$

Do đó $P\le \dfrac{x+y+z}{1+x+y+z}-\dfrac{2}{81}.\dfrac{(x+y+z)^3-2}{x+y+z}$.

Đặt $t=x+y+z$ vì $t^3\ge x^3+y^3+z^3\Rightarrow t\ge\sqrt[3]{2}$ và $P\le f(t)=\dfrac{t}{t+1}-\dfrac{2(t^3-2)}{81t}$.

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{t}{t+1}-\dfrac{2(t^3-2)}{81t}$ với $t\ge\sqrt[3]{2}$ ta có

$f'(t)=\dfrac{1}{(t+1)^2}-\dfrac{4(t^3+1)}{81t^2}$; $f'(t)=0\Leftrightarrow t=2$.

Ta có *f'(t)* đổi dấu từ dương sang âm khi đi qua $t=2$ nên f(t) đạt cực đại tại $t=2$.

Do đó $P\le f(t)\le f(2)=\dfrac{16}{27}$.

Với $x=y=1, z=0$ thì $P=\dfrac{16}{27}$.

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng $\dfrac{16}{27}$ xảy ra khi $(x;y;z)=(1;1;0);(1;0;1)$.

Bài 8. Cho a,b,c là các số thực không âm thoả mãn điều kiện $a^2+b^2+c^2=1$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\dfrac{a}{1+bc}+\dfrac{b}{1+ac}-\dfrac{(1+bc)^2}{3+2\sqrt{2}}$.

Kết hợp đánh giá bất đẳng thức AM – GM và Cauchy – Schwarz

Bất đẳng thức hoặc bài toán cực trị có dạng đối xứng giữa hai biến số ta thường sử dụng đánh giá bằng bất đẳng thức AM – GM hoặc Cauchy – Schwarz giữa hai biểu thức đối xứng về biểu thức còn lại đưa về khảo sát hàm số.

➢ **CÁC VÍ DỤ**

Ví dụ 1. Cho các số thực thoả mãn điều kiện $x>y>z>0$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{y}{x-y}+\frac{z}{y-z}+\frac{x^2}{8x\left(\sqrt{xz}-z\right)}$.

Lời giải

Đặt $a=\frac{y}{x},b=\frac{z}{y},c=\frac{x}{z}\Rightarrow abc=1$.

Khi đó $P=\frac{a}{1-a}+\frac{b}{1-b}+\frac{c^2}{8\left(\sqrt{c}-1\right)}$.

Sử dụng bất đẳng thức AM – GM cho hai số dương ta có

$$\frac{a}{1-a}+\frac{b}{1-b}\ge\frac{2\sqrt{ab}}{\sqrt{(1-a)(1-b)}}\ge\frac{4\sqrt{ab}}{2-a-b}\ge\frac{4\sqrt{ab}}{2-2\sqrt{ab}}=\frac{2\sqrt{ab}}{1-\sqrt{ab}}.$$

Suy ra $P\ge\frac{2\sqrt{ab}}{1-\sqrt{ab}}+\frac{c^2}{8\left(\sqrt{c}-1\right)}=\frac{c^2+16}{8\left(\sqrt{c}-1\right)}$.

Xét hàm số $f(c)=\frac{c^2+16}{8\left(\sqrt{c}-1\right)}$ trên khoảng $(1;+\infty)$ ta có

$$f'(c)=\frac{3c^2-4c\sqrt{c}-16}{16\sqrt{c}\left(\sqrt{c}-1\right)^2};\ f'(c)=0\Leftrightarrow 3c^2-16=4c\sqrt{c}\Leftrightarrow c=4.$$

Lập bảng biến thiên ta có kết quả $P_{\min}=\min f(c)=f(4)=4$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b,abc=1,c=4\Leftrightarrow x=2y=4z$.

Ví dụ 2. (TSĐH Khối B 2013) Cho *a,b,c* là các số thực dương.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{4}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+4}}-\frac{9}{(a+b)\sqrt{(a+2c)(b+2c)}}.$$

Lời giải

Nhận xét. Nhận thấy *a,b* đối xứng với nhau nên vai trò của $a+2c,b+2c$ như nhau ta sử dụng AM-GM cho hai số đó

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta được:

$$(a+b)\sqrt{(a+2c)(b+2c)}\le(a+b).\frac{a+2c+b+2c}{2}$$

$$=\frac{(a+b)^2+4c(a+b)}{2}\le\frac{(a+b)^2+4c^2+(a+b)^2}{2}$$

$$=(a+b)^2+2c^2\le 2\left(a^2+b^2\right)+2c^2=2\left(a^2+b^2+c^2\right)$$

Vậy $P \le \dfrac{4}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+4}} - \dfrac{9}{2\left(a^2+b^2+c^2\right)}$.

Đặt $t=\sqrt{a^2+b^2+c^2+4},\left(t>2\right) \Rightarrow P \le \dfrac{4}{t} - \dfrac{9}{2\left(t^2-4\right)}$.

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{4}{t}-\dfrac{9}{2\left(t^2-4\right)}$ trên khoảng $\left(2;+\infty\right)$ ta được:

$$f'(t)=-\frac{4}{t^2}+\frac{9t}{\left(t^2-4\right)^3}=\frac{(4-t)\left(4t^3+7t^2-4t-16\right)}{t^2\left(t^2-4\right)^3};\ f'(\mathrm{t})=0 \Leftrightarrow \mathrm{t}=4.$$

Ta có f'(t) đổi dấu từ dương sang âm khi đi qua $t=4$ nên f(t) đạt cực đại tại $t=4$ trên khoảng $\left(2;+\infty\right)$.

Suy ra $P \le f(t) \le f(4)=\dfrac{5}{8}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=2$.

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng $\dfrac{5}{8}$ đạt tại $a=b=c=2$.

Bài tập tương tự

Cho a,b,c là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{9}{\sqrt{ac\left(a+2b\right)\left(c+2b\right)}}-\frac{16}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+1}}.$$

Ví dụ 3. Cho các số thực $x,y,z \in \left(0;1\right]$ thoả mãn điều kiện $x+y \ge z+1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{x}{y+z}+\dfrac{y}{z+x}+\dfrac{z}{xy+z^2}$.

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức C-S và AM-GM ta được:

$$P=\frac{x^2}{x\left(y+z\right)}+\frac{y^2}{y\left(z+x\right)}+\frac{z}{xy+z^2} \ge \frac{\left(x+y\right)^2}{2xy+z\left(x+y\right)}+\frac{z}{xy+z^2}$$

$$\ge \frac{\left(x+y\right)^2}{\dfrac{\left(x+y\right)^2}{2}+z\left(x+y\right)}+\frac{z}{\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2+z^2}=\frac{2\left(x+y\right)^2}{\left(x+y\right)^2+2z\left(x+y\right)}+\frac{4z}{\left(x+y\right)^2+4z^2}$$

Đặt $t=x+y,\left(1+z \le t \le 2\right)$ khi đó $P \ge f(t)=\dfrac{2t^2}{t^2+2tz}+\dfrac{4z}{t^2+4z^2}$.

Xét hàm số $f(t)=\frac{2t^2}{t^2+2tz}+\frac{4z}{t^2+4z^2}$ liên tục trên $[1+z;2]$ ta có

$$f'(t)=4zt\left[\frac{t}{\left(t^2+2zt\right)^2}-\frac{2}{\left(t^2+4z^2\right)^2}\right]\le 4zt\left[\frac{2}{\left(t^2+4z^2\right)^2}-\frac{2}{\left(t^2+4z^2\right)^2}\right]=0$$

Do đó f(t) là hàm nghịch biến trên $[1+z;2]$.

Vì vậy

$$P\ge f(t)\ge f(2)=\frac{2}{1+z}+\frac{z}{1+z^2}=\frac{3z^2+z+2}{\left(1+z^2\right)(1+z)}$$

$$=\frac{-3z^3+3z^2-z+1}{2\left(1+z^2\right)(1+z)}+\frac{3}{2}=\frac{(1-z)\left(3z^2+1\right)}{2\left(1+z^2\right)(1+z)}+\frac{3}{2}\ge\frac{3}{2},\forall z\in(0;1]$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\frac{3}{2}$ đạt tại $x=y=z=1$.

Ví dụ 4. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn điều kiện $a+b+1=c$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $F=\frac{a^2}{a+bc}+\frac{b^2}{b+ca}+\frac{c^2+16}{\sqrt{c+ab}}$.

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức C –S ta có:

$$F\ge\frac{(a+b)^2}{(a+b)(c+1)}+\frac{c^2+16}{\sqrt{c+\frac{(a+b)^2}{4}}}=\frac{c-1}{c+1}+\frac{2c^2+32}{c+1}=\frac{2c^2+c+31}{c+1}.$$

Xét $f(c)=\frac{2c^2+c+31}{c+1},c>1\Rightarrow f'(c)=0\Rightarrow c=3$.

Từ đó suy ra : $MinF=\frac{43}{4}\Leftrightarrow c=3,a=b=1$.

Ví dụ 5. Cho $x>1,y>0,z>0$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-2x+2}}-\frac{2}{x(y+1)(z+1)}.$$

Lời giải

Nhận xét. Dự đoán dấu bằng xảy ra khi $x=y+1=z+1$ nên ta sử dụng bất đẳng thức AM-GM cho $x(y+1)(z+1)$.

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$x\left(y+1\right)\left(z+1\right)\le\left(\dfrac{x+y+z+2}{3}\right)^3$.

Sử dụng bất đẳng thức C-S ta được:

$x^2+y^2+z^2-2x+2=\left(x-1\right)^2+y^2+z^2+1\ge\dfrac{1}{4}\left(x-1+y+z+1\right)^2=\dfrac{1}{4}\left(x+y+z\right)^2$.

Suy ra $P\le\dfrac{2}{x+y+z}-\dfrac{54}{\left(x+y+z+2\right)^3}$.

Đặt $t=x+y+z,\left(t>1\right)$ khi đó $P\le f(t)=\dfrac{2}{t}-\dfrac{54}{\left(t+2\right)^3}$.

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{2}{t}-\dfrac{54}{\left(t+2\right)^3}$ trên $\left(1;+\infty\right)$ ta có:

$f'(t)=\dfrac{162}{\left(t+2\right)^4}-\dfrac{2}{t^2}; f'(t)=0\Leftrightarrow 81t^2=\left(t+2\right)^4\xleftrightarrow{t>1}t=4$.

Ta có f'(t) đổi dấu từ dương sang âm khi đi qua $t=4$ nên f(t) đạt cực đại tại $t=4$ hay $P\le f(t)\le f(4)=\dfrac{1}{4}$.

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng $\dfrac{1}{4}$ đạt tại $x=2,y=z=1$.

Bài tập tương tự

Cho x,y,z là các số thực không âm thoả mãn điều kiện $x+y>0$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$F=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2+2z+2}}-\frac{4}{3\sqrt{(x+y)^3(z+2)^3}}.$$

Ví dụ 6. Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện

$$a^2+b^2+c^2+2ab=3\left(a+b+c\right).$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=6\left(a+b\right)+c^2+\dfrac{2014}{\sqrt{a+c}}+\dfrac{2014}{\sqrt{b+2}}$.

Lời giải

Theo giả thiết ta có: $3\left(a+b+c\right)=\left(a+b\right)^2+c^2\ge\dfrac{1}{2}\left(a+b+c\right)^2\Leftrightarrow a+b+c\le 6$.

Ta có $\dfrac{1}{\sqrt{a+c}}+\dfrac{1}{\sqrt{b+2}}\ge\dfrac{4}{\sqrt{a+c}+\sqrt{b+2}}\ge\dfrac{4}{\sqrt{2\left(a+c+b+2\right)}}=\dfrac{4}{\sqrt{2\left(a+b+c\right)+4}}$.

$6\left(a+b\right)+c^2\ge 6\left(a+b\right)+6c-9=6\left(a+b+c\right)-9$.

Suy ra $P \ge 6(a+b+c)+\dfrac{2014.4}{\sqrt{2(a+b+c)+4}}-9$.

Đặt $t=a+b+c,(0<t\le 6)$ ta có $P \ge f(t)=6t+\dfrac{2014.4}{\sqrt{2t+4}}$.

Xét hàm số $f(t)=6t+\dfrac{2014.4}{\sqrt{2t+4}}$ với $t\in(0;6]$ ta có

$$f'(t)=6-\frac{8056}{\sqrt{(2t+4)^3}}=\frac{6\sqrt{(2t+4)^3}-8056}{\sqrt{(2t+4)^3}}<0,\forall t\in(0;6].$$

Do đó f(t) nghịch biến trên $(0;6]\Rightarrow P\ge f(t)\ge f(6)=2050$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} a+b=c=3 \\ a+c=b+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2 \\ c=3 \end{cases}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 2050 đạt tại $a=1,b=2,c=3$.

Bài tập tương tự

Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện

$$a^2+b^2+c^2=5(a+b+c)-2ab.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=a+b+c+48\sqrt{\dfrac{3}{a+10}}+\dfrac{48}{\sqrt[3]{b+c}}$.

Ví dụ 7. Cho *a,b,c* là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a+b+1=c$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{a^3}{a+bc}+\frac{b^3}{b+ca}+\frac{c^3}{c+ab}+\frac{14}{(c+1)\sqrt{(a+1)(b+1)}}.$$

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$c+ab=a+b+1+ab=(a+1)(b+1)\le\frac{(a+b+2)^2}{4}=\frac{(c+1)^2}{4}.$$

Mặt khác sử dụng bất đẳng thức C –S ta có:

$$\frac{a^3}{a+bc}+\frac{b^3}{b+ca}=\frac{a^4}{a(a+bc)}+\frac{b^4}{b(b+ac)}\ge\frac{(a^2+b^2)^2}{a^2+b^2+2abc}=\frac{a^2+b^2}{1+\dfrac{2abc}{a^2+b^2}}.$$

$$\ge\frac{a^2+b^2}{1+c}\ge\frac{1}{2}\frac{(a+b)^2}{c+1}=\frac{(c-1)^2}{2(c+1)}$$

Do đó $P \geq f(c) = \frac{(c-1)^2}{2(c+1)} + \frac{4c^3}{(c+1)^2} + \frac{28}{(c+1)^2}$.

Ta có $f'(c) = \frac{(3c-5)(3c^2+14c+23)}{2(c+1)^3}$; $f'(c) = 0 \Leftrightarrow c = \frac{5}{3}$.

Ta có f'(c) đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua $c = \frac{5}{3}$ nên f(c) đạt cực tiểu tại $c = \frac{5}{3}$ hay $P \geq f(c) \geq f\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{53}{8}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = \frac{1}{3}, c = \frac{5}{3}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\frac{53}{8}$ đạt tại $a = b = \frac{1}{3}, c = \frac{5}{3}$.

➢ BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1. Cho các số thực dương *a,b,c*.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \left(\frac{c}{a+b}\right)^2$.

HD. Sử dụng bất đẳng thức C-S ta được:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} = \frac{a^2}{a(b+c)} + \frac{b^2}{b(a+c)} \geq \frac{(a+b)^2}{c(a+b)+2ab} = \frac{1}{\frac{c}{a+b} + \frac{2ab}{(a+b)^2}} \geq \frac{1}{\frac{c}{a+b} + \frac{1}{2}}.$$

Suy ra $P \geq \frac{1}{\frac{c}{a+b} + \frac{1}{2}} + \left(\frac{c}{a+b}\right)^2$.

Đặt $t = \frac{c}{a+b}, (t > 0)$ ta có: $P \geq f(t) = \frac{1}{t + \frac{1}{2}} + t^2$.

Ta có: $f'(t) = -\frac{1}{\left(t + \frac{1}{2}\right)^2} + 2t$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$. Ta có f'(t) đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua $t = \frac{1}{2}$ nên tại $t = \frac{1}{2}$ thì f(t) đạt cực tiểu trên $(0;+\infty)$ hay $f(t) \geq f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{4}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\frac{5}{4}$ đạt tại $a=b=2c$.

Bài 2. Cho *a,b,c* là các số thực dương. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{1}{2\sqrt{a^2+b^2+c^2+1}}-\frac{1}{(a+1)(b+1)(c+1)}.$$

HD. Sử dụng bất đẳng thức C-S và AM-GM ta có:

$$a^2+b^2+c^2+1\ge\frac{1}{4}(a+b+c+1)^2$$

$$(a+1)(b+1)(c+1)\le\left(\frac{a+b+c+3}{3}\right)^3$$

Suy ra $P\le\frac{1}{a+b+c+1}-\frac{27}{(a+b+c+3)^3}$.

Đặt $t=a+b+c+1,(t>1)$ khi đó $P\le f(t)=\frac{1}{t}-\frac{27}{(t+2)^3}$.

Xét hàm số $f(t)=\frac{1}{t}-\frac{27}{(t+2)^3}$ với $t>1$ ta có:

$$f'(t)=-\frac{1}{t^2}+\frac{81}{(t+2)^4};\ f'(t)=0\Leftrightarrow 81t^2=(t+2)^4\xleftrightarrow{t>1}9t=(t+2)^2\Leftrightarrow t=4.$$

Ta có f'(t) đổi dấu từ dương sang âm khi đi qua $t=4$ nên tại $t=4$ f(t) đạt cực đại suy ra $P\le f(t)\le f(4)=\frac{1}{8}$.

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng $\frac{1}{8}$ đạt tại $a=b=c=1$.

Bài 3. Cho a,b,c là các số thực dương.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\frac{2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+1}}-\frac{(a+b+c+3)^2}{3(a+1)(b+1)(c+1)}$.

Bài 4. Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện

$$a^2+b^2+c^2=5(a+b+c)-2ab.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=a+b+c+48\sqrt{\frac{3}{a+10}}+\frac{48}{\sqrt[3]{b+c}}$.

HD: Từ điều kiện ta có: $(a+b)^2+c^2=5(a+b+c)$.

Mặt khác:

$(a+b)^2+c^2\ge\frac{1}{2}(a+b+c)^2\Rightarrow\frac{1}{2}(a+b+c)^2\le5(a+b+c)\Leftrightarrow a+b+c\le10$.

Dự đoán được $a+b=c, a+b+c=10\Rightarrow c=5, a+b=5$ ta sử dụng bất đẳng thức AM-GM cho hai căn thức:

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$\sqrt{\frac{a+10}{3}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a+10}{3}.4}\le\frac{\frac{a+10}{3}+4}{4}=\frac{a+22}{22}$$

$$\sqrt[3]{b+c}=\frac{1}{4}\sqrt[3]{8.8(b+c)}\le\frac{b+c+16}{12}$$

Suy ra $P\ge a+b+c+48.12\left(\frac{1}{a+22}+\frac{1}{b+c+16}\right)\ge a+b+c+\frac{2304}{a+b+c+38}$.

Đặt $t=a+b+c,(0<t\le10)$ khi đó $P\ge f(t)=t+\frac{2304}{t+38}$.

Ta có $f'(t)=1-\frac{2304}{(t+38)^2}=\frac{(t+38)^2-2304}{(t+38)^2}\le0,\forall\, t\in(0;10]$ suy ra f(t) nghịch biến trên $(0;10]$.

Do đó $P\ge f(t)\ge f(10)=58$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 58 đạt tại $a=2,b=3,c=5$.

Bài 5. Cho *a,b,c* là các số thực dương. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{5}{\sqrt{a^2+2b^2+5c^2+3}+1}-\frac{4}{ab+bc+ca+1}.$$

HD: Sử dụng bất đẳng thức C-S ta có:

$$2a^2+3b^2+6c^2=\frac{a^2}{\frac{1}{2}}+\frac{b^2}{\frac{1}{3}}+\frac{c^2}{\frac{1}{6}}\ge\frac{(a+b+c)^2}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}=(a+b+c)^2$$

$$\Rightarrow a^2+2b^2+5c^2\ge2(ab+bc+ca)$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $2a=3b=6c$.

Do đó $P\le\frac{5}{\sqrt{2(ab+bc+ca)+3}+1}-\frac{4}{ab+bc+ca+1}$.

Bài 8. Cho *a,b,c* là các số thực thuộc đoạn $[1;2]$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{(a+b)^2}{c^2+4(ab+bc+ca)}$.

HD : Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta có $4ab \le (a+b)^2$.

Khi đó $P \ge \dfrac{(a+b)^2}{c^2+4(a+b)c+(a+b)^2} = \dfrac{\left(\dfrac{a}{c}+\dfrac{b}{c}\right)^2}{1+4\left(\dfrac{a}{c}+\dfrac{b}{c}\right)+\left(\dfrac{a}{c}+\dfrac{b}{c}\right)^2}$

Ta đặt $t = \dfrac{a+b}{c}$ thì do $a,b,c \in [1;2] \Rightarrow t = \dfrac{a+b}{c} \in [1;4]$

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{t^2}{1+4t+t^2}$ có $f'(t) = \dfrac{4t^2+2t}{(t^2+4t+1)^2} > 0, \forall t \in [1;4]$.

Do đó $P \ge f(t) \ge f(1) = \dfrac{1}{6}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=1, c=2$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\dfrac{1}{6}$ đạt tại $a=b=1; c=2$.

Bài 9. Cho a,b,c là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{9}{\sqrt{ac(a+2b)(c+2b)}} - \frac{16}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+1}}.$$

HD: Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$ac(a+2b)(c+2b) \le \frac{1}{9}.3a.3c.(a+2b)(c+2b) \le \frac{1}{9}\left(\frac{4a+4c+4b}{4}\right)^4 = \frac{1}{9}(a+b+c)^4.$$

Và sử dụng bất đẳng thức C-S ta có: $(a+b+c)^4 \le 9(a^2+b^2+c^2)^2$.

Suy ra $P \ge \dfrac{9}{a^2+b^2+c^2} - \dfrac{16}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+1}}$.

Đặt $t = \sqrt{a^2+b^2+c^2+1}, (t>1)$ khi đó $P \ge f(t) = \dfrac{9}{t^2-1} - \dfrac{16}{t}$.

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{9}{t^2-1} - \dfrac{16}{t}$ trên $(1;+\infty)$ ta có:

$$f'(t) = -\frac{18t}{(t^2-1)^2} + \frac{16}{t^2} = \frac{2(t-2)(8t^3+7t^2-2t-4)}{t^2(t^2-1)^2}; f'(t) = 0 \xleftrightarrow{t>1} t = 2.$$

Ta có f’(t) đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua $t=2$ nên f(t) đạt cực tiểu tại $t=2$, do đó $P \ge f(t) \ge f(2) = -5$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng -5 đạt tại $a=b=c=1$.

Bài 10. Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c=1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{a^2}{(b+c)^2+5bc}+\frac{b^2}{(c+a)^2+5ca}-\frac{3}{4}(a+b)^2.$$

HD: Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$\frac{a^2}{(b+c)^2+5bc}=\frac{a^3}{a(b+c)^2+5abc}=\frac{2a^3}{2a(b+c)(b+c)+10abc}$$

$$\geq\frac{2a^3}{\left(\frac{2a+b+c+b+c}{3}\right)^3+10\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3}=3a^3$$

Tương tự: $\frac{b^2}{(c+a)^2+5ca}\geq 3b^3$.

Suy ra $P\geq 3\left(a^3+b^3\right)-\frac{3}{4}(a+b)^2\geq\frac{3}{4}(a+b)^3-\frac{3}{4}(a+b)^2$.

Đặt $t=a+b,(0<t<1)$ khi đó $P\geq f(t)=\frac{3}{4}\left(t^3-t^2\right)$.

Xét hàm số $f(t)=\frac{3}{4}\left(t^3-t^2\right)$ với $t\in(0;1)$ ta có:

$$f'(t)=\frac{3}{4}\left(3t^2-2t\right);\ f'(t)=0\Leftrightarrow t=\frac{2}{3}(t>0).$$

Ta có f'(t) đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua $t=\frac{2}{3}$ nên f(t) đạt cực tiểu tại $t=\frac{2}{3}$. Do đó $P\geq f(t)\geq f\left(\frac{2}{3}\right)=-\frac{1}{9}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $-\frac{1}{9}$ đạt tại $a=b=c=\frac{1}{3}$.

<u>Cách 2:</u> Ta có $(b+c)^2+5bc\leq 2\left(b^2+c^2\right)+5bc=(b+2c)(c+2b)$.

Suy ra

$$\frac{a^2}{(b+c)^2+5bc}\geq\frac{a^2}{(b+2c)(c+2b)}=\frac{3a^3}{3a(b+2c)(c+2b)}\geq\frac{3a^3}{\left(\frac{3a+b+2c+c+2b}{3}\right)^3}=3a^3.$$

Tương tự ta có: $\dfrac{b^2}{(c+a)^2+5ca} \ge 3b^3$. Ta có kết quả tương tự lời giải trên.

Cách 3: Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$$bc \le \frac{(b+c)^2}{4} \Rightarrow \frac{a^2}{(b+c)^2+5bc} \ge \frac{4a^2}{9(b+c)^2} = \frac{4}{9}\left(\frac{a}{1-a}\right)^2.$$

Mặt khác $\dfrac{a}{1-a} \ge \dfrac{9}{4}a - \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow \dfrac{(3a-1)^2}{4(1-a)} \ge 0$.

Suy ra $\dfrac{a^2}{(b+c)^2+5bc} \ge \dfrac{4}{9}\left(\dfrac{9}{4}a - \dfrac{1}{4}\right)^2$.

Tương tự ta có: $\dfrac{b^2}{(c+a)^2+5ca} \ge \dfrac{4}{9}\left(\dfrac{9}{4}b - \dfrac{1}{4}\right)^2$.

Do đó $$P \ge \frac{4}{9}\left[\left(\frac{9}{4}a - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{9}{4}b - \frac{1}{4}\right)^2\right] - \frac{3}{4}(a+b)^2$$

$$\ge \frac{2}{9}\left[\left(\frac{9}{4}a - \frac{1}{4} + \frac{9}{4}b - \frac{1}{4}\right)^2\right] - \frac{3}{4}(a+b)^2$$

$$= \frac{3c^2}{8} - \frac{c}{4} - \frac{5}{72} \ge -\frac{1}{9}$$

Bài toán 3. Cho a,b,c là các số thực dương ta luôn có

$$a + \sqrt{ab} + \sqrt[3]{abc} \le \frac{4}{3}(a+b+c).$$

Chứng minh.

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$a + \sqrt{ab} + \sqrt[3]{abc} = a + \frac{1}{2}\sqrt{a.4b} + \frac{1}{4}\sqrt[3]{a.4b.16c}$$

$$\le a + \frac{1}{2}.\frac{a+4b}{2} + \frac{1}{4}.\frac{a+4b+16c}{3} = \frac{4}{3}(a+b+c)$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = 4b = 16c$.

Nhận xét. Đây là chỉ là một trường hợp đơn giản của đánh giá AM – GM từ trung bình nhân sang trung bình cộng kết hợp với tham số hoá ta có thể vận dụng bất đẳng thức này để xây dựng các bài toán cực trị.

Bài tập tương tự

1) Cho a,b,c là các số thực không âm thỏa mãn $a+b+c=3$.

Chứng minh rằng $2a+\frac{3}{4}b+\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt[3]{abc}\le 7$.

2) Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh

$$6\sqrt{ab}+7c+8\sqrt{ca}\le 9\left(a+b+c\right).$$

➢ **CÁC VÍ DỤ**

Ví dụ 1. Cho a,b,c là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{1}{a+\sqrt{ab}+\sqrt[3]{abc}}-\frac{3}{\sqrt{a+b+c}}.$$

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta được:

$$\sqrt{ab}=\frac{1}{2}\sqrt{a.4b}\le\frac{a+4b}{4},\sqrt[3]{abc}=\frac{1}{4}\sqrt[3]{a.4b.16c}\le\frac{a+4b+16c}{12}.$$

Suy ra $\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt[3]{abc}\le\frac{4}{3}\left(a+b+c\right)$ do đó $P\ge\frac{3}{2\left(a+b+c\right)}-\frac{3}{\sqrt{a+b+c}}$.

Đặt $t=\sqrt{a+b+c},\left(t>0\right)$ khi đó $P\ge\frac{3}{2t^2}-\frac{3}{t}=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{t}-1\right)^2-\frac{3}{2}\ge-\frac{3}{2}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $-\frac{3}{2}$ đạt tại $a=\frac{16}{21},b=\frac{4}{21},c=\frac{1}{21}$.

Bài tập tương tự

Cho a,b,c là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{2}{a+\sqrt{ab}+\sqrt[3]{abc}}-\frac{3}{\sqrt{a+b+c}}.$$

Ví dụ 2. Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c\le 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{1}{6\sqrt{ab}+7c+8\sqrt{ca}}-\frac{1}{9\sqrt{a+b+c}}.$$

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$$\begin{aligned}6\sqrt{ab}+7c+8\sqrt{ca}&=2\sqrt{a.9b}+7c+4\sqrt{c.4a}\\&\le a+9b+7c+2\left(c+4a\right)\\&=9\left(a+b+c\right)\end{aligned}$$

Suy ra $P\ge\frac{1}{9\left(a+b+c\right)}-\frac{1}{9\sqrt{a+b+c}}=\frac{1}{9}\left(\frac{1}{\sqrt{a+b+c}}-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{36}\ge-\frac{1}{36}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}\sqrt{a+b+c}=2\\ a=9b;c=4a\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=\dfrac{18}{23}\\ b=\dfrac{2}{23}\\ c=\dfrac{72}{23}\end{cases}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $-\dfrac{1}{36}$ đạt tại $a=\dfrac{18}{23},b=\dfrac{2}{23},c=\dfrac{72}{23}$.

Bài tập tương tự

Cho *a,b,c* là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{\sqrt{abc}}{6ab\sqrt{c}+7\sqrt{abc^3}+8ca\sqrt{b}}-\frac{1}{9\sqrt{a+b+c}}.$$

Ví dụ 3. Cho *a,b,c* là các số thực dương. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{8a+3b+4\left(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt[3]{abc}\right)}{1+\left(a+b+c\right)^2}.$$

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta được:

$$4\sqrt{ab}=2\sqrt{a.4b}\le a+4b$$

$$4\sqrt{bc}=2\sqrt{b.4c}\le b+4c$$

$$4\sqrt[3]{abc}=\sqrt[3]{a.4b.16c}\le\frac{a+4b+16c}{3}$$

Cộng theo vế 3 bất đẳng thức trên ta được:

$$8a+3b+4\left(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt[3]{abc}\right)\le\frac{28}{3}\left(a+b+c\right).$$

Suy ra $P\le\dfrac{28\left(a+b+c\right)}{3+3\left(a+b+c\right)^2}=\dfrac{14}{3}-\dfrac{14\left(a+b+c-1\right)^2}{3\left(\left(a+b+c\right)^2+1\right)}\le\dfrac{14}{3}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a+b+c=1,a=4b=16c\Leftrightarrow a=\dfrac{16}{21},b=\dfrac{4}{21},c=\dfrac{1}{21}$.

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng $\dfrac{14}{3}$.

➢ BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1. Cho *a,b,c* là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{1}{2a+b+2\sqrt{2bc}}-\frac{8}{\sqrt{2a^2+2(a+c)^2+3}}.$$

Bài 2. Cho a,b,c là các số thực không âm thỏa mãn $a+b+c=3$.

Chứng minh rằng $2a+\frac{3}{4}b+\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt[3]{abc}\le 7$.

Bài 3. Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh

$$6\sqrt{ab}+7c+8\sqrt{ca}\le 9(a+b+c).$$

Bài toán 4. Chứng minh rằng với mọi số thực $x\ge -1$ ta có

$$\sqrt{x^3+1}\le\frac{x^2+2}{2}.$$

Chứng minh.

Sử dụng bất đẳng thức AM – GM ta có

$$\sqrt{x^3+1}=\sqrt{(x+1)(x^2-x+1)}\le\frac{x+1+x^2-x+1}{2}=\frac{x^2+2}{2}.$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi hoặc $x=0$ hoặc $x=2$.

Bất đẳng thức khác cũng hay được dùng

Chứng minh với mọi số thực x ta có $(x^2-x+1)^2\ge\frac{x^4+1}{2}$.

➢ CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện

$$2a^2+3b^2+5ab+3bc+2ac+c\le 3+5a+8b.$$

Chứng minh rằng $\frac{1}{\sqrt{8^a+1}}+\frac{1}{\sqrt{8^b+1}}+\frac{1}{\sqrt{8^c+1}}\ge 1$.

Lời giải

Viết lại điều kiện của bài toán thành: $(a+b+c-3)(2a+3b+1)\le 0$.

Vì $a,b,c>0$ nên $a+b+c\le 3$.

Đặt $x=2^a, y=2^b, z=2^c, (x,y,z>0)$ và $xyz=2^{a+b+c}\le 8$.

Ta cần chứng minh $\frac{1}{\sqrt{x^3+1}}+\frac{1}{\sqrt{y^3+1}}+\frac{1}{\sqrt{z^3+1}}\ge 1$.

Ta có $\sqrt{x^3+1}=\sqrt{(x+1)(x^2-x+1)}\le\dfrac{x+1+x^2-x+1}{2}=\dfrac{x^2+2}{2}$.

Suy ra $\dfrac{1}{\sqrt{x^3+1}}\ge\dfrac{2}{x^2+2}$. Tương tự: $\dfrac{1}{\sqrt{y^3+1}}\ge\dfrac{2}{y^2+2};\dfrac{1}{\sqrt{z^3+1}}\ge\dfrac{2}{z^2+2}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=2$.

Do đó $\dfrac{1}{\sqrt{x^3+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{y^3+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{z^3+1}}\ge\dfrac{2}{x^2+2}+\dfrac{2}{y^2+2}+\dfrac{2}{z^2+2}$.

Ta chỉ cần chứng minh $\dfrac{2}{x^2+2}+\dfrac{2}{y^2+2}+\dfrac{2}{z^2+2}\ge1$.

$$\Leftrightarrow 2(y^2+2)(z^2+2)+2(x^2+2)(z^2+2)+2(x^2+2)(y^2+2)\ge(x^2+2)(y^2+2)(z^2+2)$$

$$\Leftrightarrow 2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)+8(x^2+y^2+z^2)+24\ge$$

$$\ge x^2y^2z^2+4(x^2+y^2+z^2)+2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)+8$$

$$\Leftrightarrow 4(x^2+y^2+z^2)+16\ge x^2y^2z^2$$

$$\Leftrightarrow 4\left(\frac{1}{x^2y^2}+\frac{1}{y^2z^2}+\frac{1}{y^2z^2}\right)+\frac{16}{x^2y^2z^2}\ge1 \text{ (luôn đúng).}$$

Vì theo bất đẳng thức AM-GM ta có

$$4\left(\frac{1}{x^2y^2}+\frac{1}{y^2z^2}+\frac{1}{y^2z^2}\right)+\frac{16}{x^2y^2z^2}\ge12\sqrt[3]{\frac{1}{x^4y^4z^4}}+\frac{16}{8^2}\ge\frac{12}{\sqrt[3]{8^4}}+\frac{16}{64}=1.$$

Bài toán được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Ví dụ 2. Cho *x,y,z* là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $xyz=x+y+z+2$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+2}}+\dfrac{1}{\sqrt{y^2+2}}+\dfrac{1}{\sqrt{z^2+2}}$.

Lời giải

Viết lại đẳng thức đề bài đã cho dưới dạng:

$$(1+x)(1+y)(1+z)=(1+x)(1+y)+(1+y)(1+z)+(1+z)(1+x).$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y}+\frac{1}{1+z}=1.$$

Sử dụng bất đẳng thức C-S ta có:

$$(x^2+2)\left(1+\frac{1}{2}\right)\ge(x+1)^2\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{x^2+2}}\le\sqrt{\frac{3}{2}}.\frac{1}{x+1}.$$

Tương tự ta có: $\frac{1}{\sqrt{y^2+2}} \le \sqrt{\frac{3}{2}}.\frac{1}{y+1};\frac{1}{\sqrt{z^2+2}} \le \sqrt{\frac{3}{2}}.\frac{1}{z+1}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=2$.

Cộng theo vế 3 bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{y^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{z^2+2}} \le \sqrt{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y}+\frac{1}{1+z}\right)=\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=2$.

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng $\frac{\sqrt{6}}{2}$ đạt tại $x=y=z=2$.

Ví dụ 3. Cho *a,b,c* là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a^2+b^2=c^2+1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\sqrt{\frac{a^3}{a^3+(b+c)^3}}+\sqrt{\frac{b^3}{b^3+(c+a)^3}}+\frac{2c^3+1}{27}.$$

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)^2=a^4+2a^2\left(b^2+c^2\right)+\left(b^2+c^2\right)^2=a^4+\left(b^2+c^2\right)\left(b^2+c^2+2a^2\right)$$

$$\ge a^4+\frac{1}{2}(b+c)^2\left[\frac{1}{2}(b+c)^2+2a^2\right]$$

$$\ge a^4+\frac{1}{2}(b+c)^2.2\sqrt{\frac{1}{2}(b+c)^2.2a^2}=a^4+a(b+c)^3$$

Do đó $\frac{a^3}{a^3+(b+c)^3} \ge \frac{a^4}{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2} \Rightarrow \sqrt{\frac{a^3}{a^3+(b+c)^3}} \ge \frac{a^2}{a^2+b^2+c^2}$.

Tương tự ta có: $\sqrt{\frac{b^3}{b^3+(c+a)^3}} \ge \frac{b^2}{a^2+b^2+c^2}$.

Cộng theo vế 2 bất đẳng thức trên ta được:

$$P \ge \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2+c^2}+\frac{2c^3+1}{27}=\frac{c^2+1}{2c^2+1}+\frac{2c^3+1}{27}$$

$$=\frac{(c-1)^2\left(4c^3+8c^2+14c+7\right)}{27\left(2c^2+1\right)}+\frac{7}{9} \ge \frac{7}{9}.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$. Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 7/9.

Ví dụ 4. Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a+b=c+1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\sqrt[3]{\frac{9a^2}{(b+c)^2+5bc}}+\sqrt[3]{\frac{9b^2}{(c+a)^2+5ca}}+\frac{a+b+c^2}{9}.$$

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức C-S và AM-GM ta có:

$$\frac{9a^2}{(b+c)^2+5bc}\ge\frac{9a^2}{2\left(b^2+c^2\right)+5bc}=\frac{9a^2}{(b+2c)(c+2b)}=\frac{27a^3}{3a(b+2c)(c+2b)}$$

$$\ge\frac{27a^3}{\left(\frac{3a+b+2c+c+2b}{3}\right)^3}=\frac{27a^3}{(a+b+c)^3}$$

Suy ra $\sqrt[3]{\frac{9a^2}{(b+c)^2+5bc}}\ge\frac{3a}{a+b+c}$.

Tương tự ta có: $\sqrt[3]{\frac{9b^2}{(c+a)^2+5ca}}\ge\frac{3b}{a+b+c}$.

Do đó $P\ge\frac{3(a+b)}{a+b+c}+\frac{a+b+c^2}{9}=\frac{3(c+1)}{2c+1}+\frac{c^2+c+1}{9}$.

Xét hàm số $f(c)=\frac{3(c+1)}{2c+1}+\frac{c^2+c+1}{9}$ với $c>0$ ta có

$$f'(c)=-\frac{3}{(2c+1)^2}+\frac{2c+1}{9}=\frac{(2c+1)^3-27}{9(2c+1)^2};\ f'(c)=0\Leftrightarrow(2c+1)^2=27\Leftrightarrow c=1.$$

Ta có f’(c) đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua $c=1$ nên f(c) đạt cực tiểu tại $c=1$.

Do đó $P\ge f(c)\ge f(1)=\frac{7}{3}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\frac{7}{3}$ đạt tại $a=b=c=1$.

➢ **BÀI TẬP RÈN LUYỆN**

Bài 1. Chứng minh rằng với mọi số thực dương a,b,c ta có

$$\sqrt{\frac{a^3}{a^3+(b+c)^3}}+\sqrt{\frac{b^3}{b^3+(c+a)^3}}+\sqrt{\frac{c^3}{c^3+(a+b)^3}}\ge1.$$

Bài 2. Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn điều kiện $x, y \geq 1$ và $xyz = 1$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{\left(x^2 - x + 1\right)^2} + \frac{1}{\left(y^2 - y + 1\right)^2} + \frac{1}{\left(z^2 - z + 1\right)^2}.$$

HD: Sử dụng bất đẳng thức: $\left(x^2 - x + 1\right)^2 \geq \frac{x^4 + 1}{2}, \forall x \in \mathbb{R}$.

Tương tự ta có: $\left(y^2 - y + 1\right)^2 \geq \frac{y^4 + 1}{2}$ và $\left(z^2 - z + 1\right)^2 \geq \frac{z^4 + 1}{2}$.

Suy ra $P \leq \frac{2}{x^4 + 1} + \frac{2}{y^4 + 1} + \frac{2}{z^4 + 1} = \frac{2}{x^4 + 1} + \frac{2}{y^4 + 1} + \frac{2x^4y^4}{x^4y^4 + 1}$.

Ta sẽ chứng minh $\frac{2}{x^4 + 1} + \frac{2}{y^4 + 1} + \frac{2x^4y^4}{x^4y^4 + 1} \leq 3$.

Biến đổi tương đương ta thư được:

$\Leftrightarrow 2\left(x^4y^4 - 1\right)\left(x^4 - 1\right)\left(y^4 - 1\right) \geq 0$.

Bất đẳng thức này luôn đúng do $x, y \geq 1$.

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng 3, khi và chỉ khi $x = y = z = 1$.

Bài toán 5. Chứng minh rằng với mọi số thực x,y cùng dấu ta có

$$\sqrt{k^2 + x} + \sqrt{k^2 + y} \geq k + \sqrt{k^2 + x + y}.$$

Chứng minh.

Bình phương hai vế đưa về chứng minh bất đẳng thức:

$$2\sqrt{\left(k^2 + x\right)\left(k^2 + y\right)} \geq 2k\sqrt{k^2 + x + y}$$

$$\Leftrightarrow \left(k^2 + x\right)\left(k^2 + y\right) \geq k^2\left(k^2 + x + y\right) \Leftrightarrow xy \geq 0$$

Bất đẳng thức cuối luôn đúng. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 0$ hoặc $y = 0$.

Hay được dùng: $\sqrt{1 + x} + \sqrt{1 + y} \geq 1 + \sqrt{1 + x + y}$.

Ta có một kết quả cùng dạng

Với mọi số thực không âm a,b,c thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 1$ ta có

$$\sqrt{a + b^2} + \sqrt{b + c^2} \geq a + b + \sqrt{c + b^2}.$$

➢ **CÁC VÍ DỤ**

Ví dụ 1. Cho a,b,c là các số thực không âm có tổng bằng 1. Chứng minh

$$\sqrt{4a + 1} + \sqrt{4b + 1} + \sqrt{4c + 1} \geq \sqrt{5} + 2.$$

Lời giải

Ta có

$\sqrt{1+x}+\sqrt{1+y}\geq 1+\sqrt{1+x+y}$ với mọi x,y không âm.

Không mất tính tổng quát giả sử $a=\max\{a,b,c\}\Rightarrow a\geq \frac{1}{3}$.

Khi đó

$\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1}\geq 1+\sqrt{1+4a+4b}=1+\sqrt{5-4a}$.

Gọi P là biểu thức vế trái ta có

$P\geq \sqrt{4a+1}+1+\sqrt{5-4a}$.

Xét hàm số $f(a)=\sqrt{4a+1}+1+\sqrt{5-4a}$ liên tục trên đoạn $\left[\frac{1}{3};1\right]$ ta có

$f'(a)=\frac{2}{\sqrt{4a+1}}-\frac{2}{\sqrt{5-4a}};\ f'(a)=0\Leftrightarrow \sqrt{5-4a}=\sqrt{4a+1}\Leftrightarrow a=\frac{1}{2}$.

Ta có $f\left(\frac{1}{3}\right)=1+\sqrt{\frac{7}{3}}+\sqrt{\frac{11}{3}};\ f\left(\frac{1}{2}\right)=1+2\sqrt{3};\ f(1)=\sqrt{5}+2$.

Vì vậy $P\geq f_{\min}=f(1)=\sqrt{5}+2$.

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=1$, $b=c=0$ hoặc các hoán vị.

Ví dụ 2. Cho *a*,*b*,*c* là các số thực không âm thay đổi thỏa mãn điều kiện

$$\sqrt{1+a^2}+\sqrt{1+2b}+\sqrt{1+2c}=5.$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=2a^3+b^3+c^3$.

Lời giải

Theo giả thiết và sử dụng bài toán phụ trên ta có

$$\begin{aligned}\sqrt{1+a^2}+\sqrt{1+2b}+\sqrt{1+2c}&\geq \sqrt{1+a^2}+1+\sqrt{1+2b+2c}\\&\geq 1+1+\sqrt{1+a^2+2b+2c}\\&=2+\sqrt{1+a^2+2b+2c}\end{aligned}$$

Suy ra: $\sqrt{1+a^2+2b+2c}\leq 3\Leftrightarrow a^2+2b+2c\leq 8\Leftrightarrow b+c\leq 4-\frac{a^2}{2}$.

Ta có: $P=2a^3+(b+c)^3-3bc(b+c)\leq 2a^3+(b+c)^3\leq 2a^3+\left(4-\frac{a^2}{2}\right)^3$.

Từ giả thiết a,b,c không âm thỏa mãn điều kiện $\sqrt{1+a^2}+\sqrt{1+2b}+\sqrt{1+2c}=5$

suy ra $5\geq \sqrt{1+a^2}+1+1\Rightarrow a\leq 2\sqrt{2}\Rightarrow 0\leq a\leq 2\sqrt{2}$.

Xét hàm số $f(a)=2a^3+\left(4-\frac{a^2}{2}\right)^3$ liên tục trên $\left[0;2\sqrt{2}\right]$ ta được:

$$f'(a)=6a^2-3a\left(4-\frac{a^2}{2}\right)^2=\frac{3}{4}a(a-2)\left[a\left(12-a^2\right)+2\left(16-a^2\right)\right];$$

$$f'(a)=0\xleftrightarrow{0\le a\le 2\sqrt{2}}\left[\begin{array}{l}a=0\\a=2\sqrt{2}\end{array}\right.$$

Ta có: $f(0)=64,\ f(2)=24,\ f(2\sqrt{2})=32\sqrt{2}\Rightarrow \max\limits_{a\in\left[0;2\sqrt{2}\right]} f(a)=\mathrm{f}(0)=64$.

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng 64 đạt tại $a=0,b=0,\mathrm{c}=4$ hoặc $a=0,b=4,c=0$.

Bài tập tương tự

Cho x,y,z là các số thực không âm thoả mãn điều kiện $\sqrt{1+x}+\sqrt{1+y}+\sqrt{1+z}=5$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=x+y-2z+12\sqrt{1+z}$.

Ví dụ 3. Cho x,y,z là các số thực không âm thoả mãn điều kiện $x^2+y^2+z^2=1$.

Chứng minh rằng $\sqrt{1-\frac{(x+y)^2}{4}}+\sqrt{1-\frac{(y+z)^2}{4}}+\sqrt{1-\frac{(z+x)^2}{4}}\ge\sqrt{6}$.

Lời giải

Trong ba số $\frac{(x+y)^2}{4}-\frac{1}{3};\frac{(y+z)^2}{4}-\frac{1}{3};\frac{(z+x)^2}{4}-\frac{1}{3}$ luôn tồn tại hai số cùng dấu, không mất tính tổng quát giả sử $\left[\frac{(x+y)^2}{4}-\frac{1}{3}\right]\left[\frac{(z+x)^2}{4}-\frac{1}{3}\right]\ge 0$.

Ta có $\sqrt{\frac{2}{3}-\left[\frac{(x+y)^2}{4}-\frac{1}{3}\right]}+\sqrt{\frac{2}{3}-\left[\frac{(z+x)^2}{4}-\frac{1}{3}\right]}$

$$\ge\frac{\sqrt{6}}{3}+\sqrt{\frac{2}{3}-\left[\frac{(x+y)^2}{4}-\frac{1}{3}+\frac{(z+x)^2}{4}-\frac{1}{3}\right]}$$

$$=\frac{\sqrt{6}}{3}+\sqrt{\frac{4}{3}-\frac{2x^2+2x\left(y+z\right)+y^2+z^2}{4}}$$

$$\ge\frac{\sqrt{6}}{3}+\sqrt{\frac{4}{3}-\frac{2x^2+2x\sqrt{2\left(y^2+z^2\right)}+y^2+z^2}{4}}$$

$$=\frac{\sqrt{6}}{3}+\sqrt{\frac{4}{3}-\left(\frac{\sqrt{y^2+z^2}+\sqrt{2}x}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}+\sqrt{\frac{4}{3}-\left(\frac{\sqrt{1-x^2}+\sqrt{2}x}{2}\right)^2}.$$

Sử dụng bất đẳng thức AM – GM ta có

$$\sqrt{1-\frac{(y+z)^2}{4}}\geq\sqrt{1-\frac{y^2+z^2}{2}}=\sqrt{\frac{1+x^2}{2}}.$$

Vậy ta chỉ cần chứng minh $\sqrt{\frac{4}{3}-\left(\frac{\sqrt{1-x^2}+\sqrt{2}x}{2}\right)^2}+\sqrt{\frac{1+x^2}{2}}\geq\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

Bất đẳng thức cuối luôn đúng(bạn đọc kiểm chứng).

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Ví dụ 4. Cho a,b,c là các số thực thuộc đoạn $[-1;1]$ và thoả mãn điều kiện $a+b+c=0$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\sqrt{1+a+b^2}+\sqrt{1+b+c^2}+\sqrt{1+c+a^2}$.

Lời giải

Ta có: $a+b^2, b+c^2, c+a^2\geq -1$ và trong 3 số này có ít nhất hai số hạng cùng dấu, không mất tính tổng quát ta giả sử $\left(a+b^2\right)\left(b+c^2\right)\geq 0$.

Khi đó áp dụng bài toán phụ ta được

$$\begin{aligned}\sqrt{1+a+b^2}+\sqrt{1+b+c^2}+\sqrt{1+c+a^2}&\geq 1+\sqrt{1+a+b^2+b+c^2}+\sqrt{1+c+a^2}\\&=1+\sqrt{1+b^2+c^2-c}+\sqrt{1+c+a^2}\\&=1+\sqrt{\left(\sqrt{c^2-c+1}\right)^2+b^2}+\sqrt{\left(\sqrt{1+c}\right)^2+a^2}\\&\geq 1+\sqrt{\left(\sqrt{c^2-c+1}+\sqrt{1+c}\right)^2+(a+b)^2}\\&=1+\sqrt{\left(\sqrt{c^2-c+1}+\sqrt{1+c}\right)^2+c^2}\end{aligned}$$

Rút gọn vế phải ta được: $P\geq 1+\sqrt{2c^2+2\sqrt{1-c^3}+2}$.

Ta chứng minh $1+\sqrt{2c^2+2\sqrt{1-c^3}+2}\geq 3$

$$\Leftrightarrow 2c^2+2\sqrt{1-c^3}+2\geq 4\Leftrightarrow\sqrt{1-c^3}\geq 1-c^2$$

$\Leftrightarrow 1-c^3 \geq 1-2c^2+c^4 \Leftrightarrow c^2\left(c^2+c-2\right) \leq 0 \Leftrightarrow c^2(c-1)(c+2) \leq 0$ (luôn đúng với $c \in [-1;1]$).

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 3 đạt tại $a=b=c=0$.

Ví dụ 5. Cho a,b,c là các số thực không âm thay đổi thỏa mãn điều kiện $a+b+c=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\sqrt{a+b^2}+\sqrt{b+c^2}+\sqrt{c+a^2}.$$

Lời giải

Ta có:

$$P \geq a+b+\sqrt{c+b^2}+\sqrt{c+a^2} \geq a+b+\sqrt{\left(\sqrt{c}+\sqrt{c}\right)^2+(a+b)^2}$$

$$=1-c+\sqrt{4c+(1-c)^2}=1-c+\sqrt{(c+1)^2}=2$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 2 đạt tại $a=b=c=\frac{1}{3}$ hoặc $a=1, b=c=0$ và các hoán vị.

Ví dụ 6. Chứng minh rằng với *x*,*y* là hai số thực không âm thỏa mãn $x+y \geq 1$ ta luôn có $\sqrt{x^2+x+4}+\sqrt{y^2+y+4} \leq 2+\sqrt{(x+y)^2+x+y+4}$.

Lời giải

Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$x^2+y^2+x+y+8+2\sqrt{\left(x^2+x+4\right)\left(y^2+y+4\right)}$$

$$\leq 4+4\sqrt{(x+y)^2+x+y+4}+(x+y)^2+x+y+4$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\left(x^2+x+4\right)\left(y^2+y+4\right)} \leq xy+2\sqrt{(x+y)^2+x+y+4}$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2+x+4\right)\left(y^2+y+4\right) \leq x^2y^2+4xy\sqrt{(x+y)^2+x+y+4}+4\left[(x+y)^2+x+y+4\right]$$

$$\Leftrightarrow xy\left[4\sqrt{(x+y)^2+x+y+4}+x+y-7\right] \geq 0$$ (luôn đúng do $x+y \geq 1$).

Ta có một số kết quả cùng dạng

\+ Chứng minh rằng với mọi số thực không âm x,y ta luôn có

$$\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{y^2-y+1} \leq 1+\sqrt{(x+y)^2-x-y+1}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=0$ hoặc $y=0$.

\+ Chứng minh rằng với mọi số thực không âm x,y ta luôn có

$$\sqrt{x^2+x+k^2}+\sqrt{y^2+y+k^2} \leq k+\sqrt{(x+y)^2+x+y+k^2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=0$ hoặc $y=0$.

Bài toán áp dụng

Cho *a,b,c* là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $a+b+c=3$.

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\sqrt{a^2+a+4}+\sqrt{b^2+b+4}+\sqrt{c^2+c+4}.$$

Ví dụ 7. Cho x,y,z là các số thực không âm thoả mãn điều kiện $xy+yz+zx>0$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{1}{\sqrt{x(y+z)+2z^2}}+\frac{1}{\sqrt{y(x+4z)}}+4\sqrt{z+1}+2\sqrt{x+2y+4}.$$

Lời giải

Sử dụng kết quả bài toán phụ ta có

$$\begin{aligned}4\sqrt{z+1}+2\sqrt{x+2y+4}&=4\left(\sqrt{z+1}+\sqrt{\frac{x}{4}+\frac{y}{2}+1}\right)\\&\ge 4\left(1+\sqrt{\frac{x}{4}+\frac{y}{2}+z+1}\right)\\&=4+2\sqrt{x+2y+4z+4}\end{aligned}$$

Chú ý $\dfrac{1}{\sqrt{x(y+z)+2z^2}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{8xy+8xz+16z^2}}\ge\dfrac{2\sqrt{2}}{x+2y+4z}$;

và $\dfrac{1}{y(x+4z))}=\dfrac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2y(x+4z)}}\ge\dfrac{2\sqrt{2}}{x+2y+4z}$.

Đặt $t=x=2y+4z>0$ ta suy ra: $P\ge\dfrac{4\sqrt{2}}{t}+2\sqrt{t+4}+4$.

Xét hàm $f(t)=\dfrac{4\sqrt{2}}{t}+2\sqrt{t+4}+4$ ta có ngay $Min_{f(t)}=4+5\sqrt{2}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $4+5\sqrt{2}$ đạt tại $(x,y,z)=(2;1;0)$.

➢ **BÀI TẬP RÈN LUYỆN**

Bài 1. Cho *x,y,z* là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện

$$\sqrt{x^2+4}+\sqrt{3y+4}+\sqrt{3z+4}=8.$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=2x^3+9\left(y^3+z^3\right)$.

HD: Dùng bất đẳng thức phụ đánh giá

$$8=\sqrt{x^2+4}+\sqrt{3y+4}+\sqrt{3z+4}\geq\sqrt{x^2+4}+2+\sqrt{4+3y+3z}$$

$$\geq 4+\sqrt{4+x^2+3y+3z}\Rightarrow y+z\leq\frac{12-x^2}{3}$$

$$\Rightarrow P\leq 2x^3+9\left(y+z\right)^3\leq 2x^3+\frac{1}{3}\left(12-x^2\right)^3\leq 576$$

Bài 2. Cho x,y,z là các số thực không âm thoả mãn điều kiện

$$\sqrt{1+x}+\sqrt{1+y}+\sqrt{1+z}=5.$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=x+y-2z+12\sqrt{1+z}$.

Bài 3. Cho x,y,z là các số thực không âm thoả mãn điều kiện

$$\sqrt{1+2x^2}+\sqrt{1+2y^2}+\sqrt{1+2z^2}=5.$$

Chứng minh rằng $4\sqrt{2}x^3+y^6+z^6\leq 64$.

Bài toán 6. Cho *x,y,z* là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện

$$xy+yz+zx>0, z=max\left\{x,y,z\right\}$$

Ta luôn có $\sqrt{\frac{x}{y+z}}+\sqrt{\frac{y}{z+x}}\geq\sqrt{\frac{x+y}{z}}$.

Chứng minh.

Thật vậy ta có thể giả sử $x\leq y$. Nếu $x=0$ bất đẳng thức trở thành đẳng thức.

Với $z\geq y\geq x>0$ khi đó viết lại bất đẳng thức dưới dạng:

$$\sqrt{\frac{xz}{\left(x+y\right)\left(y+z\right)}}+\sqrt{\frac{yz}{\left(x+y\right)\left(x+z\right)}}\geq 1.$$

Ta có

$$\sqrt{\frac{xz}{\left(x+y\right)\left(y+z\right)}}=\frac{2xz}{2\sqrt{z\left(x+y\right).x\left(y+z\right)}}\geq\frac{2xz}{z\left(x+y\right)+x\left(y+z\right)}=\frac{2xz}{xy+yz+2zx}$$

$$\sqrt{\frac{yz}{\left(y+z\right)\left(x+y\right)}}=\frac{2yz}{2\sqrt{y\left(x+z\right).z\left(x+y\right)}}\geq\frac{2yz}{y\left(x+z\right)+z\left(x+y\right)}=\frac{2yz}{xy+xz+2yz}.$$

Mặt khác $xy+xz+2yz\geq xy+yz+2zx$ suy ra

$$\sqrt{\frac{xz}{\left(x+y\right)\left(y+z\right)}}+\sqrt{\frac{yz}{\left(x+y\right)\left(x+z\right)}}\geq\frac{2xz}{xy+yz+2zx}+\frac{2yz}{xy+yz+2zx}=\frac{2\left(xz+yz\right)}{xy+yz+2zx}\geq 1.$$

Vì $yz\geq xz$.

Bất đẳng thức được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z$ hoặc $x = 0$ hoặc $y = 0$.

Ngoài ra ta có một đánh giá yếu hơn như sau:

$$\sqrt{\frac{x}{y+z}} + \sqrt{\frac{y}{z+x}} \ge \frac{2(x+y)}{x+y+z}.$$

Một bất đẳng thức có dạng tương tự

Cho x,y,z là các số thực không âm và $z = \min\{x, y, z\}; xy + yz + zx > 0$ ta có

$$\sqrt{\frac{x}{y+z}} + \sqrt{\frac{y}{z+x}} \ge 2\sqrt{\frac{x+y}{x+y+2z}}.$$

Chứng minh.

Sử dụng bất đẳng thức Holder ta có

$$\left(\sqrt{\frac{x}{y+z}} + \sqrt{\frac{y}{z+x}}\right)^2 \left(x^2(y+z) + y^2(z+x)\right) \ge (x+y)^3.$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{x}{y+z}} + \sqrt{\frac{y}{z+x}} \ge \sqrt{\frac{(x+y)^3}{x^2(y+z) + y^2(z+x)}}$$

Chú ý sử dụng bất đẳng thức AM – GM ta có

$$\begin{aligned} x^2(y+z) + y^2(z+x) &= xy(x+y-2z) + z(x+y)^2 \\ &\le \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 (x+y-2z) + z(x+y)^2. \\ &= \frac{(x+y)^4 + 2z(x+y)^2}{4} \end{aligned}$$

Suy ra $\sqrt{\frac{x}{y+z}} + \sqrt{\frac{y}{z+x}} \ge \sqrt{\frac{(x+y)^3}{\frac{(x+y)^4 + 2z(x+y)^2}{4}}} = 2\sqrt{\frac{x+y}{x+y+2z}}$.

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y$.

➢ CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho *x,y,z* là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện

$$xy + yz + zx > 0, z = max\{x, y, z\}$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x}{y+z} + 2\sqrt{\frac{y}{z+x}} + 3\sqrt[3]{\frac{z}{x+y}}$.

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta có: $\frac{x}{y+z}+1\ge 2\sqrt{\frac{x}{y+z}}$.

Suy ra $P\ge 2\left(\sqrt{\frac{x}{y+z}}+\sqrt{\frac{y}{z+x}}\right)+3\sqrt[3]{\frac{z}{x+y}}-1$.

Ta chứng minh. $\sqrt{\frac{x}{y+z}}+\sqrt{\frac{y}{z+x}}\ge\frac{2(x+y)}{x+y+z}$.

Thật vậy nếu $x=0$ hoặc $y=0$ giả sử $y=0$ bất đẳng thức trở thành:

$\sqrt{\frac{x}{z}}\ge\frac{2x}{x+z}\Leftrightarrow x(x+z)^2\ge 4x^2z\Leftrightarrow x(x-z)^2\ge 0$ (luôn đúng).

Với $x,y>0$ sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$\sqrt{\frac{x}{y+z}}+\sqrt{\frac{y}{z+x}}=\frac{x}{\sqrt{x(y+z)}}+\frac{y}{\sqrt{y(z+x)}}\ge\frac{2x}{x+y+z}+\frac{2y}{x+y+z}=\frac{2(x+y)}{x+y+z}.$$

Vậy $P\ge\frac{4(x+y)}{x+y+z}+3\sqrt[3]{\frac{z}{x+y}}-1=\frac{4}{1+\frac{z}{x+y}}+3\sqrt[3]{\frac{z}{x+y}}-1$.

Đặt $t=\sqrt[3]{\frac{z}{x+y}},\left(t\ge\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right)\Rightarrow P\ge f(t)=\frac{4}{1+t^3}+3t-1$.

Xét hàm số $f(t)=\frac{4}{1+t^3}+3t-1$ với $t\ge\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ ta có:

$$f'(t)=-\frac{12t^2}{\left(1+t^3\right)^2}+3=\frac{3(t-1)\left(t^2+t-1\right)\left(t^3+2t+1\right)}{\left(1+t^3\right)^2};\ f'(t)=0\Leftrightarrow t=1,\left(t\ge\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right)$$

Ta có f'(t) đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua $t=1$ nên f(t) đạt cực tiểu tại $t=1$ hay $P\ge f(t)\ge f(1)=4$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $y=0,x=z$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 4 đạt tại $x=z,y=0$.

Bài tập tương tự

Cho *x*,*y*,*z* là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện

$$xy+yz+zx>0,z=max\{x,y,z\}$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=2\sqrt{\frac{x}{y+z}}+2\sqrt{\frac{y}{z+x}}+3\sqrt[3]{\frac{z}{x+y}}$.

Ví dụ 2. Cho x,y,z là các số thực không âm thoả mãn điều kiện $xy+yz+zx>0$.

Chứng minh rằng $\sqrt{1+\frac{48x}{y+z}}+\sqrt{1+\frac{48y}{z+x}}+\sqrt{1+\frac{48z}{x+y}}\ge 15$.

Lời giải

Không mất tính tổng quát giả sử $z=\min\{x,y,z\}$ ta có

$$\sqrt{\frac{x}{y+z}}+\sqrt{\frac{y}{z+x}}\ge 2\sqrt{\frac{x+y}{x+y+2z}}.$$

Sử dụng bất đẳng thức Mincopski và bất đẳng thức trên ta được

$$\sqrt{1+\frac{48x}{y+z}}+\sqrt{1+\frac{48y}{z+x}}\ge\sqrt{4+48\left(\sqrt{\frac{x}{y+z}}+\sqrt{\frac{y}{z+x}}\right)^2}$$
$$\ge\sqrt{4+48\left(2\sqrt{\frac{x+y}{x+y+2z}}\right)^2}=2\sqrt{1+\frac{48(x+y)}{x+y+2z}}.$$

Vậy ta chỉ cần chứng minh $2\sqrt{1+\frac{48(x+y)}{x+y+2z}}+\sqrt{1+48\frac{z}{x+y}}\ge 15$.

Bất đẳng thức khá đơn giản bằng cách đặt $t=\sqrt{1+\frac{48z}{x+y}},1\le t\le 5$.

Bạn đọc tự chứng minh.

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z$ hoặc $x=y;z=0$ hoặc các hoán vị.

Bài tập tương tự

Cho x,y,z là các số thực dương chứng minh rằng

$$\sqrt{1+\frac{16x}{y+z}}+\sqrt{1+\frac{16y}{z+x}}+\sqrt{1+\frac{16z}{x+y}}\ge 9.$$

Ví dụ 3. Xét các số thực $a\ge b\ge c>0$ thoả mãn điều kiện $a+b+c=1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\frac{24}{5\sqrt{5(a+b)}}$.

Lời giải

Theo giả thiết kết hợp bất đẳng thức phụ ta có

$$P=\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\frac{24}{5\sqrt{5(a+b)}}$$
$$\geq 2\sqrt{\frac{a+b}{a+b+2c}}+\frac{24}{5\sqrt{5\left(a+b\right)}}\quad .$$
$$=2\sqrt{\frac{1-c}{1+c}}+\frac{24}{5\sqrt{5\left(1-c\right)}}$$

Xét hàm số $f(c)=2\sqrt{\frac{1-c}{1+c}}+\frac{24}{5\sqrt{5\left(1-c\right)}}$ trên nửa khoảng $\left(0;\frac{1}{3}\right]$ ta có

$$f'(c)=\frac{-10\sqrt{5}\left(1-c\right)+12\left(1+c\right)\sqrt{1+c}}{5\sqrt{5}\left(1-c^2\right)\sqrt{1-c^2}};$$

$$f'(c)=0\Leftrightarrow -10\sqrt{5}\left(1-c\right)+12\left(1+c\right)\sqrt{1+c}=0 \quad .$$

$$\Leftrightarrow 125\left(1-c\right)^2=36\left(1+c\right)^3\Leftrightarrow 36c^3-17c^2+358c-89=0$$

$$\Leftrightarrow \left(4c-1\right)\left(9c^2-2c+89\right)=0\Leftrightarrow c=\frac{1}{4}$$

Từ đó suy ra $f(c)\geq f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{78}{5\sqrt{15}}$.

Dấu bằng đạt tại $a=b=\frac{3}{8},c=\frac{1}{4}$. Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\frac{78}{5\sqrt{15}}$.

Ví dụ 4(TSĐH Khối B/2014) Cho a,b,c là các số thực không âm thoả mãn điều kiện $c\left(a+b\right)>0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\frac{c}{2\left(a+b\right)}.$$

Lời giải

Chú ý $\sqrt{\frac{a}{b+c}}\geq\frac{2a}{a+b+c};\sqrt{\frac{b}{c+a}}\geq\frac{2b}{a+b+c}$.

Từ đó suy ra $P\geq\frac{2\left(a+b\right)}{a+b+c}+\frac{c}{2\left(a+b\right)}=\frac{2}{1+\frac{c}{a+b}}+\frac{c}{2\left(a+b\right)}$.

Đặt $t=\frac{c}{a+b},t>0$ khi đó sử dụng bất đẳng thức AM – GM ta có

$$P \ge \frac{2}{1+t} + \frac{t}{2} = \frac{2}{t+1} + \frac{t+1}{2} - \frac{1}{2} \ge 2\sqrt{\frac{2}{t+1}.\frac{t+1}{2}} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = c, b = 0$ hoặc $a = 0, b = c$.

Bài tập tương tự

Cho a,b,c là các số thực không âm thoả mãn điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 = 2$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \sqrt{\frac{1+bc}{(b+c)^2}} + \sqrt{\frac{1+ca}{(a+c)^2}} + \frac{c}{2(a+b)}$.

Ví dụ 5. Cho a,b,c là các số thực không âm thoả mãn điều kiện $ab + bc + ca > 0$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{2c+a}} + 2\sqrt{\frac{c}{a+b+c}}$.

Lời giải

Ta sẽ chứng minh: $\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{2c+a}} + 2\sqrt{\frac{c}{a+b+c}} \ge 2$.

+ Nếu c bằng 0 ta chỉ cần sử dụng bất đẳng thức AM – GM cho hai số dương có điều phải chứng minh.

+ Nếu a bằng 0 khi đó ta cần chứng minh

$$\sqrt{\frac{b}{2c}} + 2\sqrt{\frac{c}{b+c}} \ge 2 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{b}{2c}} + 2\sqrt{\frac{1}{\frac{b}{c}+1}} \ge 2$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{2}{\sqrt{2x^2+1}} \ge 2, \left(x = \sqrt{\frac{b}{2c}} \ge 0\right).$$

$$\Leftrightarrow 4 \ge (2-x)^2\left(2x^2+1\right) \Leftrightarrow x\left(2x^3 - 8x^2 + 9x - 4\right) \le 0$$

Bất đẳng thức cuối đúng với $x \le 2$.

+ Nếu b bằng 0 chứng minh tương tự trường hợp trên.

+ Ta xét tất cả các số đều dương khi đó sử dụng bất đẳng thức AM – GM ta có

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{2c+a}} + 2\sqrt{\frac{c}{a+b+c}} = \frac{a}{\sqrt{a(b+c)}} + \frac{b}{\sqrt{b(2c+a)}} + \frac{2c}{\sqrt{c(a+b+c)}}$$

$$\ge \frac{2a}{a+b+c} + \frac{2b}{a+b+2c} + \frac{4c}{a+b+2c} > \frac{2a+2b+4c}{a+b+2c} = 2$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b, c = 0$.

Ví dụ 6. Cho các số thực $x, y, z \in [0;1)$ thỏa mãn điều kiện $x + y + z = \frac{25}{24}$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\sqrt{\frac{x}{1-x}}+\sqrt{\frac{y}{1-y}}+\sqrt{\frac{z}{1-z}}$.

Lời giải

Không mất tính tổng quát giả sử $z=\min\{x,y,z\}\Rightarrow z\le\frac{25}{72}\Rightarrow x+y=\frac{25}{24}-z>\frac{2}{3}$.

Sử dụng bất đẳng thức Holder ta có:

$$\left(\sqrt{\frac{x}{1-x}}+\sqrt{\frac{y}{1-y}}\right)^2\left(x^2(1-x)+y^2(1-y)\right)\ge(x+y)^3.$$

Suy ra $\sqrt{\frac{x}{1-x}}+\sqrt{\frac{y}{1-y}}\ge\sqrt{\frac{(x+y)^3}{x^2(1-x)+y^2(1-y)}}$.

Chú ý. Sử dụng bất đẳng thức AM – GM ta có

$$\begin{aligned}x^2(1-x)+y^2(1-y)&=x^2+y^2-x^3-y^3\\&=(x+y)^2-(x+y)^3+xy\left(3(x+y)-2\right)\\&\le(x+y)^2-(x+y)^3+\left(\frac{x+y}{2}\right)^2\left(3(x+y)-2\right).\\&=\frac{1}{2}(x+y)^2-\frac{1}{4}(x+y)^3\end{aligned}$$

Suy ra $\sqrt{\frac{x}{1-x}}+\sqrt{\frac{y}{1-y}}\ge\sqrt{\frac{(x+y)^3}{\frac{1}{2}(x+y)^2-\frac{1}{4}(x+y)^3}}=2\sqrt{\frac{25-24z}{23+24z}}$.

Khi đó $P\ge f(z)=2\sqrt{\frac{25-24z}{23+24z}}+\sqrt{\frac{z}{1-z}}$.

Xét hàm số $f(z)=2\sqrt{\frac{25-24z}{23+24z}}+\sqrt{\frac{z}{1-z}}$ trên $\left[0;\frac{25}{72}\right]$ ta có

$$f'(z)=\frac{1}{2(z-1)^2\sqrt{\frac{z}{1-z}}}-\frac{1152}{(23+24z)^2\sqrt{\frac{25-24z}{23+24z}}};.$$

$$f'(z)=0\Leftrightarrow 2304^2(1-z)^3z=(23+24z)^3(25-24z)$$

Phương trình cuối có 2 nghiệm thuộc đoạn $\left[0;\frac{25}{72}\right]$ đó là $0<z_1<z_2=\frac{25}{72}$.

Lập bảng biến thiên suy ra $\min f(z)=f(0)=\frac{10}{\sqrt{23}}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\frac{10}{\sqrt{23}}$ đạt tại $x=y=\frac{25}{48}, z=0$ hoặc các hoán vị.

Bài tập tương đương tự

1) Cho a,b,c là các số thực không âm thoả mãn điều kiện

$$\frac{1}{a^2+47}+\frac{1}{b^2+47}+\frac{1}{c^2+47}=\frac{1}{24}.$$

Chứng minh rằng $a+b+c\ge 10\sqrt{\frac{47}{23}}$.

HD: Tồn tại $x,y,z\in[0;1)$ sao cho $\frac{1}{a^2+47}=\frac{1-x}{47};\frac{1}{b^2+47}=\frac{1-y}{47};\frac{1}{c^2+47}=\frac{1-z}{47}$.

Khi đó $x+y+z=\frac{25}{24};P=\sqrt{\frac{x}{1-x}}+\sqrt{\frac{y}{1-y}}+\sqrt{\frac{z}{1-z}}$.

Đây chính là bài toán trên.

2) Cho các số thực $a,b,c\ge 1$ và $\frac{1}{a^2+47}+\frac{1}{b^2+47}+\frac{1}{c^2+47}=\frac{1}{24}$.

Chứng minh rằng $a+b+c\ge 15$.

➢ BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1. Cho *x,y,z* là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện

$$xy+yz+zx>0, z=max\{x,y,z\}$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=2\sqrt{\frac{x}{y+z}}+2\sqrt{\frac{y}{z+x}}+3\sqrt[3]{\frac{z}{x+y}}$.

HD: Ta chứng minh. $\sqrt{\frac{x}{y+z}}+\sqrt{\frac{y}{z+x}}\ge\frac{2(x+y)}{x+y+z}$.

Thật vậy nếu $x=0$ hoặc $y=0$ giả sử $y=0$ bất đẳng thức trở thành:

$\sqrt{\frac{x}{z}}\ge\frac{2x}{x+z}\Leftrightarrow x(x+z)^2\ge 4x^2z\Leftrightarrow x(x-z)^2\ge 0$ (luôn đúng).

Với $x,y>0$ sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$\sqrt{\frac{x}{y+z}}+\sqrt{\frac{y}{z+x}}=\frac{x}{\sqrt{x(y+z)}}+\frac{y}{\sqrt{y(z+x)}}\ge\frac{2x}{x+y+z}+\frac{2y}{x+y+z}=\frac{2(x+y)}{x+y+z}.$$

Vậy $P \geq \frac{4(x+y)}{x+y+z} + 3\sqrt[3]{\frac{z}{x+y}} = \frac{4}{1+\frac{z}{x+y}} + 3\sqrt[3]{\frac{z}{x+y}}$.

Đặt $t = \sqrt[3]{\frac{z}{x+y}}, \left(t \geq \sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right) \Rightarrow P \geq f(t) = \frac{4}{1+t^3} + 3t$.

Xét hàm số $f(t) = \frac{4}{1+t^3} + 3t$ với $t \geq \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ ta có:

$$f'(t) = -\frac{12t^2}{\left(1+t^3\right)^2} + 3 = \frac{3(t-1)\left(t^2+t-1\right)\left(t^3+2t+1\right)}{\left(1+t^3\right)^2}; f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1, \left(t \geq \sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right).$$

Ta có f'(t) đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua $t = 1$nên f(t) đạt cực tiểu tại $t = 1$hay $P \geq f(t) \geq f(1) = 5$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $y = 0, x = z$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 5 đạt tại $x = z, y = 0$.

Bài 2. Cho x,y,z là các số thực không âm thoả mãn điều kiện $xy + yz + zx > 0$.

Chứng minh rằng $\sqrt{\frac{x}{y+z}} + \sqrt{\frac{y}{z+x}} + \sqrt{\frac{z}{x+y}} \geq 2\sqrt{1 + \frac{xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)}}$.

HD: Giả sử $z = \min\{x, y, z\}$ khi đó ta có

$$\sqrt{\frac{x}{y+z}} + \sqrt{\frac{y}{z+x}} \geq 2\sqrt{\frac{x+y}{x+y+2z}}.$$

Chú ý sử dụng bất đẳng thức AM – GM ta có

$$\frac{xy}{(x+z)(y+z)} = \frac{1}{\frac{z(x+y+z)}{xy}+1} \leq \frac{1}{\frac{4z(x+y+z)}{(x+y)^2}+1} = \frac{(x+y)^2}{(x+y+2z)^2}.$$

Do vậy ta chỉ cần chứng minh $2\sqrt{\frac{x+y}{x+y+2z}} + \sqrt{\frac{z}{x+y}} \geq 2\sqrt{1 + \frac{z(x+y)}{(x+y+2z)^2}}$.

Đặt $t = \sqrt{\frac{z}{x+y}}$ đưa về chứng minh bất đẳng thức một biến.

Bài 3. Cho a,b,c là các số thực không âm thoả mãn điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 = 2$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \sqrt{\frac{1+bc}{(b+c)^2}} + \sqrt{\frac{1+ca}{(a+c)^2}} + \frac{c}{2(a+b)}$.

HD: Chú ý

$$1+bc\ge a\left(b+c\right);1+ca\ge b\left(a+c\right)\Rightarrow P\ge\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\frac{c}{2\left(a+b\right)}\ge\frac{3}{2}.$$

Bài toán 7. Chứng minh rằng với mọi số thực x ta có $e^x\ge 1+x+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^n}{n!}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=0$.

Chứng minh. Xem chủ đề 1 Khảo sát hàm một biến.

Từ bất đẳng thức trên ta có $x\ge\ln\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^n}{n1}\right)$.

Thông thường sử dụng bất đẳng thức $x\ge\ln(1+x),\forall x\ge 0$.

Chú ý. Với x là số thực không âm và $a\ge e$ ta có $a^x\ge 1+x+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^n}{n!}$.

Ví dụ 1(TSĐH Khối A,A1/2012) Cho x,y,z là ba số thực thỏa mãn điều kiện $x+y+z=0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=3^{|x-y|}+3^{|y-z|}+3^{|z-x|}-\sqrt{6x^2+6y^2+6z^2}.$$

Lời giải

Nhận xét. Biểu thức P và điều kiện các biến có vai trò như nhau nên dự đoán dấu bằng xảy ra tại $x=y=z$ suy ra $x=y=z=0$ khi đó $P=3$. Vậy ta đi chứng minh P không nhỏ hơn 3.

Thay $z=-x-y$ vào P ta được:

$$P=3^{|x-y|}+3^{|x+2y|}+3^{|y+2x|}-\sqrt{6x^2+6y^2+6\left(-x-y\right)^2}.$$

Suy ra :

$$\begin{aligned}P&\ge\left|x-y\right|+1+\left|x+2y\right|+1+\left|y+2x\right|+1-\sqrt{6x^2+6y^2+6\left(x+y\right)^2}\\&\ge\left|4x+2y\right|+3-\sqrt{12x^2+12y^2+12xy}\end{aligned}.$$

Ta chứng minh $P\ge 3$ vậy ta đi chứng minh:

$$\left|4x+2y\right|+3-\sqrt{12x^2+12y^2+12xy}\ge 3\Leftrightarrow\left|2x+y\right|\ge\sqrt{3x^2+3y^2+3xy}.$$

$$\Leftrightarrow 4x^2+4xy+y^2\ge 3x^2+3y^2+3xy$$

$$\Leftrightarrow x^2+xy-2y^2\ge 0\Leftrightarrow\left(x-y\right)\left(x+2y\right)\ge 0.$$

Để bất đẳng thức cuối đúng nếu ta có $x \ge y \ge z \Rightarrow 2x + y \ge 0$ và $x + 2y = x + y + y = -z + y \ge 0$ (chỉ việc giả sử $x \ge y \ge z$ từ đầu) do đó bất đẳng thức được chứng minh tức $P \ge 3$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 3 đạt tại $x = y = z = 0$.

Nhận xét. Như vậy bằng việc dự đoán dấu bằng xảy ra và biến đổi bất đẳng thức tương đương ta nghĩ đến việc giả sử $x \ge y \ge z$ đây chính là nút thắt đưa đến lời giải hết sức tự nhiên như trên.

Ví dụ 2. Cho x,y,z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $xy + yz + zx = 3$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = 10^{|x-y|} + 10^{|y-z|} + 10^{|z-x|} - 4\sqrt{\frac{x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2}{3}} - \frac{x^2 + y^2 + z^2}{3(x+y+z)}.$$

Lời giải

Ta có: $x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 \le \frac{1}{3}\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^2$

$$\Rightarrow -4\sqrt{\frac{x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2}{3}} \ge -\frac{4}{3}\left(x^2 + y^2 + z^2\right)$$

$$x + y + z \ge \sqrt{3(xy + yz + zx)} = 3 \Rightarrow -\frac{x^2 + y^2 + z^2}{3(x+y+z)} \ge -\frac{x^2 + y^2 + z^2}{9}.$$

Suy ra:

$$P \ge 10^{|x-y|} + 10^{|y-z|} + 10^{|z-x|} - \frac{13}{9}\left(x^2 + y^2 + z^2\right)$$

$$= 10^{|x-y|} + 10^{|y-z|} + 10^{|z-x|} - \frac{13}{18}\left[(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 + 6\right].$$

$$= 10^{|x-y|} + 10^{|y-z|} + 10^{|z-x|} - \frac{13}{18}\left[(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2\right] - \frac{13}{3}$$

Xét hàm số $f(t) = 10^t - \frac{13}{18}t^2$ với $t \ge 0$ ta có

$f'(t) = 10^t \ln 10 - \frac{13}{9}t;\ f''(t) = 10^t \ln^2 10 - \frac{13}{9} > \ln^2 10 - \frac{13}{9} > 0$ nên f'(t) là hàm đồng biến trên $[0;+\infty) \Rightarrow f'(t) \ge f'(0) = 0$ nên f(t) là hàm đồng biến trên $[0;+\infty)$ do đó $f(t) \ge f(0) = 1$.

Hay $10^t - \frac{13}{18}t^2 \ge 1, \forall t \ge 0$.

Áp dụng với $t = |x-y|, |y-z|, |z-x|$ ta có:

$$10^{|x-y|} + 10^{|y-z|} + 10^{|z-x|} - \frac{13}{18}\left[(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2\right] \ge 3.$$

Do đó giá trị nhỏ nhất của P bằng $-\frac{4}{3}$ đạt tại $x = y = z = 1$.

Ví dụ 3. Cho *x,y,z* là các số thực thỏa mãn điều kiện $x + y + z = 0$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = |2x-y| + |2y-z| + |2z-x| - \ln\left(\sqrt{14\left(x^2+y^2+z^2\right)} + 1\right).$$

Lời giải

Nhận xét. Dự đoán dấu bằng đạt tại $x = y = z \Rightarrow x = y = z = 0 \Rightarrow P = 0$.

Vậy ta chứng minh P đạt giá trị nhỏ nhất bằng 0.

Thay $z = -x - y$ vào biểu thức của P ta được:

$$\begin{aligned} P &= |2x-y| + |x+3y| + |2y+3x| - \ln\left(\sqrt{14\left(x^2+y^2+(-x-y)^2\right)} + 1\right) \\ &\ge |2x-y+x+3y+2y+3x| - \ln\left(\sqrt{28\left(x^2+y^2+xy\right)} + 1\right) \\ &= |6x+4y| - \ln\left(\sqrt{28\left(x^2+y^2+xy\right)} + 1\right) \end{aligned}.$$

Ta cần chứng minh: $|6x+4y| - \ln\left(\sqrt{28\left(x^2+y^2+xy\right)} + 1\right) \ge 0$.

$$\Leftrightarrow |6x+4y| \ge \ln\left(\sqrt{28\left(x^2+y^2+xy\right)} + 1\right).$$

Sử dụng bất đẳng thức quen thuộc: $\ln(x+1) \le x, \forall x \ge 0$ ta có:

$$\ln\left(\sqrt{28\left(x^2+y^2+xy\right)} + 1\right) \le \sqrt{28\left(x^2+y^2+xy\right)}.$$

Vậy nhận định được chứng minh nếu ta chứng minh được bất đẳng thức sau đúng:

$$|6x+4y| \ge \sqrt{28\left(x^2+y^2+xy\right)} \Leftrightarrow 36x^2 + 48xy + 16y^2 \ge 28x^2 + 28y^2 + 28xy.$$

$$\Leftrightarrow 8x^2 + 20xy - 12y^2 \ge 0 \Leftrightarrow (x+3y)(8x+4y) \ge 0.$$

Bất đẳng thức cuối luôn đúng nếu ta có $xy \ge 0$. Thật vậy với ba số x,y,z luôn có hai số cùng dấu và bài toán kết thúc nếu ta giả sử từ đầu x, y cùng dấu.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 0 đạt tại $x = y = z = 0$.

Ví dụ 4. Cho a,b là hai số thực dương thoả mãn điều kiện $a + b = a^4 + b^4$.

Chứng minh rằng $a^a b^b \le 1 \le a^{a^3} b^{b^3}$.

Lời giải

Bất đẳng thức đã cho tương đương với: $a\ln a + b\ln b \le 0 \le a^3 \ln a + b^3 \ln b$.

Để chứng minh bất đẳng thức vế trái ta sử dụng bất đẳng thức

$\ln x \le x - 1, \forall x > 0$ ta có $a\ln a + b\ln b \le a(a-1) + b(b-1) = a^2 + b^2 - a - b$.

Vậy ta chỉ cần chứng minh $a^2 + b^2 \le a + b$.

Thật vậy sử dụng bất đẳng thức Holder ta có

$$\left(a^4 + b^4\right)(a+b)^2 \ge \left(a^2 + b^2\right)^3 \Rightarrow a^2 + b^2 \le a + b.$$

Ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = 1$.

Chứng minh bất đẳng thức vế phải

Theo giả thiết kết hợp sử dụng bất đẳng thức AM – GM ta có

$$a + b = a^4 + b^4 \ge \frac{1}{8}(a+b)^4 \Rightarrow a + b \le 2 \Rightarrow a, b \in (0;2).$$

Khi đó xét hàm số $f(x) = 3\ln x + \dfrac{x - x^4}{x^3}$ trên khoảng (0;2) ta có

$$f'(x) = \frac{3}{x} - 1 - \frac{2}{x^3} = \frac{(x-1)\left(-x^2 + 2x + 2\right)}{x^3};\ f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \in (0;2).$$

Khi đó f’(x) đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua $x = 1$ nên f(x) đạt cực tiểu tại $x = 1$.

Vì vậy $f(x) \ge f(1) = 0 \Leftrightarrow x^3 \ln x \ge \dfrac{x^4 - x}{3}$.

Do đó $a^3 \ln a + b^3 \ln b \ge \dfrac{a^4 - a}{3} + \dfrac{b^4 - b}{3} = 0$.

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = 1$.

➢ BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1. Cho a,b,c là các số thực thay đổi thỏa mãn $a,b\ge 0,c>0$ và $a+b+c=1$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{1}{2013}\ln\left(1+a^2\right)+\frac{1}{2014}\ln\left(1+b^2\right)+\frac{8\left(1-\sqrt{c^2+1}\right)}{3c}.$$

HD:

Do $a,b\ge 0,c>0,a+b+c=1\Rightarrow a,b\in[0;1],c\in(0;1]$.

Sử dụng kết quả bài toán phụ ta có

$$\begin{aligned}\frac{1}{2013}\ln\left(1+a^2\right)+\frac{1}{2014}\ln\left(1+b^2\right)&\le\frac{1}{2013}a^2+\frac{1}{2014}b^2\\&\le\frac{1}{2013}a+\frac{1}{2014}b\le\frac{4}{3}a+\frac{4}{3}b=\frac{4}{3}(1-c)\end{aligned}.$$

Do đó: $P\le\frac{4}{3}(1-c)+\frac{8\left(1-\sqrt{c^2+3}\right)}{3c}$.

Xét hàm số $g(c)=\frac{4}{3}(1-c)+\frac{8\left(1-\sqrt{c^2+3}\right)}{3c}$ liên tục trên $(0;1]$, ta có:

$$g'(c)=-\frac{4}{3}-\frac{8}{3c^2}-\frac{8}{3}.\frac{\frac{c^2}{\sqrt{c^2+3}}-\sqrt{c^2+3}}{c^2}=-\frac{4}{3}-\frac{8}{3c^2}+\frac{8}{c^2\sqrt{c^2+3}}.$$

$$g'(c)=\frac{24-4c^2\sqrt{c^2+3}-8\sqrt{c^2+3}}{3c^2\sqrt{c^2+3}}\ge 0,\forall c\in(0;1].$$

Nên $g(c)$ là hàm đồng biến trên $(0;1]$. Suy ra $g(c)\le g(1)=-\frac{8}{3}$.

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng $-\frac{8}{3}$ khi $a=b=0,c=1$.

Bài 2. Cho x,y,z là các số thực. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=3^{|x-y|}+3^{|y-z|}+3^{|z-x|}-\frac{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2}{2}-2\sqrt{x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx}.$$

HD: Sử dụng bất đẳng thức $a^x\ge 1+x+\frac{x^2}{2},\forall x,a\ge e$ ta có

$$3^{|x-y|}+3^{|y-z|}+3^{|z-x|}-\frac{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2}{2}\ge 3+|x-y|+|y-z|+|z-x|.$$

Do đó $P \ge 3 + |x-y| + |y-z| + |z-x| - 2\sqrt{x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx}$.

Ta chứng minh $|x-y| + |y-z| + |z-x| - 2\sqrt{x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx} \ge 0$.

Không mất tính tổng quát giả sử $x \ge y \ge z$ bất đẳng thức trở thành

$$(x-y)+(y-z)+(x-z) \ge 2\sqrt{\frac{1}{2}(x-y)^2+\frac{1}{2}(y-z)^2+\frac{1}{2}(z-x)^2}$$

$$\Leftrightarrow 2(x-z) \ge \sqrt{2\left((x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\right)}$$

$$\Leftrightarrow 4(x-z)^2 \ge 2\left((x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\right)$$

$$\Leftrightarrow (x-z)^2 \ge (x-y)^2+(y-z)^2$$

$$\Leftrightarrow ((x-y)+(y-z))^2 \ge (x-y)^2+(y-z)^2 \Leftrightarrow 2(x-y)(y-z) \ge 0.$$

Bất đẳng thức cuối luôn đúng ta có đpcm. Suy ra $P \ge 3$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 3 đạt tại $x = y = z$.

Bài 3. Cho *x,y,z* là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện

$$(x+y)^2+(y+z)^2+(z+x)^2 \le 18.$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = 4^{\frac{x}{3}} + 4^{\frac{y}{3}} + 4^{\frac{z}{3}} - \frac{1}{108}(x+y+z)^4$.

Bài 3. HD : Ta chứng minh $4^{\frac{x}{3}} \le x+1, \forall x \in [0;3]$.

Xét hàm số $f(x) = 4^{\frac{x}{3}} - x - 1$ với $x \in [0;3]$ ta có

$$f'(x) = \frac{1}{3}\ln 4.4^{\frac{x}{3}} - 1;\ f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_0 = 3\log_4 \frac{3}{\ln 3}.$$

Ta có f'(x) đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua x_0 nên f(x) đạt cực tiểu tại x_0.

Do đó $f(x) \le max\{f(0); f(3)\} = 0$ hay $4^{\frac{x}{3}} \le x+1$ với mọi $x \in [0;3]$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 0$ hoặc $x = 3$.

Suy ra $P \le (x+y+z) + 3 - \frac{(x+y+z)^4}{108}$.

Bài toán 7. Cho *x,y* là hai số thực không âm thỏa mãn $x+y\le\frac{2}{3}$ ta luôn có

$$\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+\sqrt{\frac{1-y}{1+y}}\le 1+\sqrt{\frac{1-(x+y)}{1+(x+y)}}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=0$ hoặc $y=0$.

Chứng minh.

Bất đẳng thức đã cho tương đương với:

$$\frac{1-x}{1+x}+\frac{1-y}{1+y}+2\sqrt{\frac{(1-x)(1-y)}{(1+x)(1+y)}}\le 1+\frac{1-x-y}{1+x+y}+2\sqrt{\frac{1-x-y}{1+x+y}}$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\sqrt{\frac{(1-x)(1-y)}{(1+x)(1+y)}}-\sqrt{\frac{1-x-y}{1+x+y}}\right)\le 1+\frac{1-x-y}{1+x+y}-\frac{1-x}{1+x}-\frac{1-y}{1+y}.$$

Chú ý $\frac{(1-x)(1-y)}{(1+x)(1+y)}-\frac{1-x-y}{1+x+y}=\frac{2xy(x+y)}{(1+x)(1+y)(1+x+y)}\ge 0$.

Và $1+\frac{1-x-y}{1+x+y}-\frac{1-x}{1+x}-\frac{1-y}{1+y}=\frac{2xy(x+y+2)}{(1+x)(1+y)(1+x+y)}$.

Suy ra
$$\sqrt{\frac{(1-x)(1-y)}{(1+x)(1+y)}}-\sqrt{\frac{1-x-y}{1+x+y}}=\frac{\frac{2xy(x+y)}{(1+x)(1+y)(1+x+y)}}{\sqrt{\frac{(1-x)(1-y)}{(1+x)(1+y)}}+\sqrt{\frac{1-x-y}{1+x+y}}}$$
$$\le\frac{\frac{2xy(x+y)}{(1+x)(1+y)(1+x+y)}}{2\sqrt{\frac{1-x-y}{1+x+y}}}$$
$$=\frac{xy(x+y)}{(1+x)(1+y)(1+x+y)\sqrt{\frac{1-x-y}{1+x+y}}}.$$

Vậy ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{xy(x+y)}{(1+x)(1+y)(1+x+y)\sqrt{\frac{1-x-y}{1+x+y}}}\le\frac{xy(x+y+2)}{(1+x)(1+y)(1+x+y)}.$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{\frac{1-x-y}{1+x+y}}\ge\frac{x+y}{x+y+2}$$

Bất đẳng thức cuối luôn đúng do

$$\sqrt{\frac{1-x-y}{1+x+y}}-\frac{x+y}{x+y+2}\geq\sqrt{\frac{1-2/3}{1+2/3}}-\frac{2/3}{2/3+2}=\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{1}{4}>0.$$

➢ CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho *x,y,z* là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $x+y+z=1$.

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+\sqrt{\frac{1-y}{1+y}}+\sqrt{\frac{1-z}{1+z}}.$$

Lời giải

Tìm giá trị nhỏ nhất

Chú ý với $x,y,z\in[0;1]$ ta có $(1-x)\left(1-\left(1-x^2\right)\right)\geq 0$

$$\Rightarrow\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\geq 1-x.$$

Tương tự ta có $\sqrt{\frac{1-y}{1+y}}\geq 1-y;\sqrt{\frac{1-z}{1+z}}\geq 1-z$.

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên ta được:

$$P=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+\sqrt{\frac{1-y}{1+y}}+\sqrt{\frac{1-z}{1+z}}\geq 3-x-y-z=2.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=1,y=z=0$ hoặc các hoán vị.

<u>**Cách 2:**</u> Nếu để ý ta có

$$\begin{aligned}P&=\sqrt{\frac{y+z}{(x+y)+(x+z)}}+\sqrt{\frac{z+x}{(y+z)+(y+z)}}+\sqrt{\frac{x+y}{(z+x)+(z+y)}}\\&\geq\frac{2(y+z)}{2(x+y+z)}+\frac{2(z+x)}{2(x+y+z)}+\frac{2(x+y)}{2(x+y+z)}=2\end{aligned}.$$

Tìm giá trị lớn nhất

Không mất tính tổng quát giả sử $z=\max\{x,y,z\}\Rightarrow z\geq\frac{1}{3};x+y\leq\frac{2}{3}$.

Khi đó sử dụng bất đẳng thức phụ ta có

$$\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+\sqrt{\frac{1-y}{1+y}}\leq 1+\sqrt{\frac{1-x-y}{1+x+y}}=1+\sqrt{\frac{z}{z+2}}.$$

Suy ra $P \le 1 + \sqrt{\frac{z}{z+2}} + \sqrt{\frac{1-z}{1+z}}$.

Xét hàm số $f(z) = 1 + \sqrt{\frac{z}{z+2}} + \sqrt{\frac{1-z}{1+z}}$ trên đoạn $\left[\frac{1}{3};1\right]$ ta có

$$f'(z) = \frac{1}{(2-z)^2\sqrt{\frac{z}{2-z}}} - \frac{1}{(1+z)^2\sqrt{\frac{1-z}{1+z}}};$$

$$f'(z) = 0 \Leftrightarrow (1+z)^3(1-z) = (2-z)^3 z \Leftrightarrow z = \frac{1}{2} \in \left[\frac{1}{3};1\right]$$

So sánh các giá trị suy ra $\max f(z) = \max\left\{f\left(\frac{1}{3}\right); f\left(\frac{1}{2}\right); f(1)\right\} = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}} + 1$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 0, y = z = \frac{1}{2}$ hoặc các hoán vị.

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng $1 + \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Bài tập tương tự

Cho x,y,z là các số thực không âm thoả mãn điều kiện

$$z = \max\{x, y, z\}; x + y + z = 1 .$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \sqrt{\frac{1-y}{1+y}} + \sqrt{\frac{2-z}{z}}$.

- **BÀI TẬP RÈN LUYỆN**

Bài 1. Cho a,b,c là các số thực không âm thoả mãn điều kiện

$$\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} + \frac{1}{1+c^2} = 2 .$$

Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của biểu thức $P = a + b + c$.

Bài toán 8. Cho *x,y* là hai số thực dương thỏa mãn $x + y < 1$ ta luôn có

$$\left(\frac{1}{x} - 1\right)\left(\frac{1}{y} - 1\right) \ge \left(\frac{2}{x+y} - 1\right)^2 .$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y$.

Chứng minh.

Bất đẳng thức đã cho tương đương với: $\frac{1}{xy} - \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \ge \frac{4}{(x+y)^2} - \frac{4}{x+y}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{xy} - \frac{4}{(x+y)^2} \ge \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{4}{x+y}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-y)^2}{xy(x+y)^2} \ge \frac{(x-y)^2}{xy(x+y)}.$$

$$\Leftrightarrow (x-y)^2(1-x-y) \ge 0$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y$.

➢ **CÁC VÍ DỤ**

Ví dụ 1. Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c=1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \sqrt{\left(\frac{1}{a}-1\right)\left(\frac{1}{b}-1\right)} + \frac{18}{a+b+2c}$.

Lời giải

Ta có $\left(\frac{1}{a}-1\right)\left(\frac{1}{b}-1\right) = \frac{(1-a)(1-b)}{ab} = \frac{1-(a+b)+ab}{ab} = \frac{c}{ab}+1$.

Ta có $ab \le \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \left(\frac{1-c}{2}\right)^2$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b$.

Suy ra $\sqrt{\left(\frac{1}{a}-1\right)\left(\frac{1}{b}-1\right)} \ge \sqrt{\frac{c}{\left(\frac{1-c}{2}\right)^2}+1} = \sqrt{\left(\frac{c+1}{1-c}\right)^2} = \frac{c+1}{1-c}$.

Do đó $P \ge \frac{c+1}{1-c} + \frac{18}{a+b+2c} = \frac{c+1}{1-c} + \frac{18}{1+c}$.

Mặt khác $\frac{c+1}{1-c} + \frac{18}{1+c} = \left(\frac{c+1}{1-c} + \frac{18}{1+c} - 15\right) + 15 = \frac{4(2c-1)^2}{1-c^2} + 15 \ge 15$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $c = \frac{1}{2}, a = b = \frac{1-c}{2} = \frac{1}{4}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 15 đạt tại $a = b = \frac{1}{4}, c = \frac{1}{2}$.

<u>**Cách 2:**</u> Sử dụng bất đẳng thức phụ ta có

$$P \ge \frac{2}{a+b} - 1 + \frac{18}{a+b+2c} = \frac{2}{1-c} + \frac{18}{1+c} - 1.$$

Thực hiện đánh giá như lời giải trên ta có kết quả bài toán.

Nhận xét. Lời giải 2 cho ta đánh giá trong trường hợp tổng ba số khác 1.

Bài toán 9. Chứng minh rằng với mọi số thực không âm a,b thoả mãn điều kiện ta có $\frac{1}{1+kx^2}+\frac{1}{1+ky^2}\ge 1+\frac{1}{1+k\left(x+y\right)^2}$.

Chứng minh.

Bất đẳng thức đã cho tương đương với:

$$\frac{1-k^2x^2y^2}{\left(1+kx^2\right)\left(1+ky^2\right)}\ge\frac{1}{1+k\left(x+y\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow\frac{2kxy-k^3x^2y^2\left(x+y\right)^2-2k^2x^2y^2}{\left(1+kx^2\right)\left(1+ky^2\right)\left(1+k\left(x+y\right)^2\right)}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow\frac{kxy\left(2-kxy\left(k\left(x+y\right)^2+2\right)\right)}{\left(1+kx^2\right)\left(1+ky^2\right)\left(1+k\left(x+y\right)^2\right)}\ge 0.$$

➢ **CÁC VÍ DỤ**

Ví dụ 1. Chứng minh rằng với mọi số thực không âm a,b thoả mãn điều kiện $a+b\le\frac{2}{\sqrt{7}}$ ta có $\frac{1}{1+3a^2}+\frac{1}{1+3b^2}\ge 1+\frac{1}{1+3\left(a+b\right)^2}$.

Lời giải

Bất đẳng thức đã cho tương đương với: $\dfrac{ab\left(1-3ab-\dfrac{9ab\left(a+b\right)^2}{2}\right)}{\left(1+3a^2\right)\left(1+3b^2\right)\left(1+3\left(a+b\right)^2\right)}\ge 0$.

Ta chỉ cần chứng minh $1-3ab-\frac{9ab\left(a+b\right)^2}{2}\ge 0$

$\Leftrightarrow 2\ge 3ab\left(2+3\left(a+b\right)^2\right)$.

Bất đẳng thức đúng bởi vì

$$3ab\left(2+3\left(a+b\right)^2\right)\le 3\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\left(2+3\left(a+b\right)^2\right)\le 3\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right)^2\left(2+3\left(\frac{2}{\sqrt{7}}\right)^2\right)<2.$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=0$ hoặc $b=0$.

Bài tập tương tự

Cho a,b là các số thực không âm thoả mãn điều kiện $a+b\le\sqrt{2}$.

Chứng minh rằng $\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2}\ge 1+\frac{1}{1+(a+b)^2}$.

Ví dụ 2. Cho a,b,c là các số thực không âm thoả mãn điều kiện $a+b+c=1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{1}{1+3a^2}+\frac{1}{1+3b^2}+\frac{1}{1+3c^2}.$$

Lời giải

Không mất tính tổng quát giả sử $a=\max\{a,b,c\}$

$\Rightarrow a\ge\frac{1}{3};b+c\le\frac{2}{3}$.

Khi đó ta có $\frac{1}{1+3b^2}+\frac{1}{1+3c^2}\ge 1+\frac{1}{1+3(b+c)^2}$.

Vì vậy $P\ge\frac{1}{1+3a^2}+1+\frac{1}{1+3(b+c)^2}$.

$$=\frac{1}{1+3a^2}+\frac{1}{1+3(1-a)^2}+1$$

$$=\frac{3(2a-1)^2(1+6a(1-a))}{7(3a^2+1)(3a^2-6a+4)}+\frac{15}{7}\ge\frac{15}{7}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=\frac{1}{2},c=0$ hoặc các hoán vị.

Bài tập tương tự

Cho a,b,c,d là các số thực không âm thoả mãn điều kiện $a+b+c+d=2$.

Chứng minh rằng

$$\frac{1}{1+3a^2}+\frac{1}{1+3b^2}+\frac{1}{1+3c^2}+\frac{1}{1+3d^2}\ge\frac{16}{7}.$$

MỘT SỐ BẤT ĐẲNG THỨC DẠNG LƯỢNG GIÁC HOÁ GIẢI BẰNG ĐÁNH GIÁ ĐẠI SỐ

Dưới đây đề cập một số bất đẳng thức dạng lượng giác hoá có thể đánh giá bằng các bất đẳng thức cơ bản hoặc sử dụng tính đơn điệu của hàm số (xem chương 4).

Bài 1. Cho *a,b,c* là các số thực dương thỏa mãn $ab+bc+ca=1$ ta luôn có

$$\frac{a}{1+a^2}+\frac{b}{1+b^2}\le\frac{1}{\sqrt{1+c^2}}.$$

Lời giải

Vì $ab+bc+ca=1$ nên $1+a^2=ab+bc+ca+a^2=(a+b)(a+c)$.

$$1+b^2=(b+c)(b+a);1+c^2=(c+a)(c+b)$$

Suy ra $(a+b)(b+c)(c+a)=\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)}$.

Khi đó sử dụng bất đẳng thức C –S ta có

$$\frac{a}{1+a^2}+\frac{b}{1+b^2}=\frac{a}{(a+b)(a+c)}+\frac{b}{(b+c)(b+a)}=\frac{a(b+c)+b(c+a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

$$=\frac{1+ab}{\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)}}\le\frac{\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)}}{\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)}}=\frac{1}{\sqrt{1+c^2}}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}a=b\\ab+bc+ca=1\end{cases}$.

Bài 2. Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $ab+bc+ca=1$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\frac{a}{1+a^2}+\frac{b}{1+b^2}+\frac{3c}{\sqrt{1+c^2}}$.

Lời giải

Sử dụng $\frac{a}{1+a^2}+\frac{b}{1+b^2}\le\frac{1}{\sqrt{1+c^2}}$.

Suy ra $P\le\frac{3c+1}{\sqrt{1+c^2}}\le\frac{\sqrt{(c^2+1)(3^2+1)}}{\sqrt{c^2+1}}=\sqrt{10}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}c=3\\a=b\\ab+bc+ca=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=b=-3+\sqrt{10}\\c=3\end{cases}$.

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng $\sqrt{10}$.

Bài tập tương tự

Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $ab+bc+ca=1$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\frac{a}{1+a^2}+\frac{b}{1+b^2}+\frac{\sqrt{3}c}{\sqrt{1+c^2}}$.

Bài 3. Cho các số thực không âm x,y,z thỏa mãn điều kiện $xz+yz+1=xy$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\frac{2x}{x^2+1}+\frac{2y}{y^2+1}+\frac{z^2-1}{z^2+1}$.

Lời giải

Theo giả thiết ta có $xz+yz=xy-1\ge 0 \Leftrightarrow xy\ge 1$.

Khi đó chia hai vế cho xy ta được: $\frac{z}{y}+\frac{z}{x}+\frac{1}{xy}=1$.

Đặt $a=\frac{1}{x},b=\frac{1}{y},c=z$ ta có $ab+bc+ca=1$ và $P=\frac{2a}{1+a^2}+\frac{2b}{1+b^2}+\frac{c^2-1}{c^2+1}$.

Ta có $1+a^2=ab+bc+ca+a^2=(a+b)(a+c)$.

$$1+b^2=(b+c)(b+a);1+c^2=(c+a)(c+b)$$

Suy ra $(a+b)(b+c)(c+a)=\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)}$.

Ta có $\frac{a}{1+a^2}+\frac{b}{1+b^2}=\frac{a}{ab+bc+ca+a^2}+\frac{b}{ab+bc+ca+b^2}$

$$=\frac{a}{(a+b)(a+c)}+\frac{b}{(b+c)(b+a)}=\frac{a(b+c)+b(c+a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

$$=\frac{1+ab}{(a+b)(b+c)(a+c)}\le\frac{\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)}}{\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)}}=\frac{1}{\sqrt{1+c^2}}.$$

Vậy $P\le f(c)=\frac{2}{\sqrt{1+c^2}}+\frac{c^2-1}{c^2+1}$.

Xét hàm số $f(c)=\frac{2}{\sqrt{1+c^2}}+\frac{c^2-1}{c^2+1}$ với $c\ge 0$ ta có

$$f'(c) = -\frac{2c\left(\sqrt{c^2+1}-2\right)}{\left(1+c^2\right)^2};\ f'(c)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c=0 \\ c=\sqrt{3} \end{array}\right..$$

Lập bảng biến thiên suy ra $\max\limits_{c\geq 0} f(c) = f(\sqrt{3}) = \frac{3}{2}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $c=\sqrt{3}, a=b=2-\sqrt{3} \Leftrightarrow x=y=2+\sqrt{3}, z=\sqrt{3}$.

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng $\frac{3}{2}$ đạt tại $x=y=2+\sqrt{3}, z=\sqrt{3}$.

Bài toán 10. Với mọi số thực dương *a,b,c* ta luôn có

$$\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{1}{(a+c)^2} \geq \frac{1}{a^2+bc}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Chứng minh.

Sử dụng bất đẳng thức C-S cho hai số dương ta được:

$$\begin{cases} \left(a^2+bc\right)\left(1+\frac{b}{c}\right) \geq (a+b)^2 \Rightarrow \frac{1}{(a+b)^2} \geq \frac{1}{\left(a^2+bc\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)} = \frac{c}{\left(a^2+bc\right)(b+c)} \\ \left(a^2+bc\right)\left(1+\frac{c}{b}\right) \geq (a+c)^2 \Rightarrow \frac{1}{(a+c)^2} \geq \frac{1}{\left(a^2+bc\right)\left(1+\frac{c}{b}\right)} = \frac{b}{\left(a^2+bc\right)(b+c)} \end{cases}.$$

Cộng theo vế hai bất đẳng thức trên ta có điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Đặc biệt. Khi $a=1$ ta có bất đẳng thức hay dùng sau đây:

\+ Với mọi số thực dương a, b ta luôn có: $\frac{1}{(a+1)^2}+\frac{1}{(b+1)^2} \geq \frac{1}{1+ab}$.

\+ Với mọi số thực dương a,b ta luôn có: $\frac{1}{\left(1+\sqrt{a}\right)^2}+\frac{1}{\left(1+\sqrt{b}\right)^2} \geq \frac{2}{a+b+2}$.

Chứng minh.

Ta có: $\frac{1}{\left(1+\sqrt{a}\right)^2}+\frac{1}{\left(1+\sqrt{b}\right)^2} \geq \frac{1}{1+\sqrt{ab}} \geq \frac{1}{1+\frac{a+b}{2}} = \frac{2}{a+b+2}$.

➢ **CÁC VÍ DỤ**

Ví dụ 1. Cho *a,b,c* là các số thực dương thay đổi thỏa mãn $abc=1$.

Chứng minh rằng $\frac{1}{(1+a)^2}+\frac{1}{(1+b)^2}+\frac{1}{(1+c)^2}\ge\frac{3}{4}$.

Lời giải

Bài toán phụ. Với mọi số thực dương a, b ta luôn có:

$$\frac{1}{(a+1)^2}+\frac{1}{(b+1)^2}\ge\frac{1}{1+ab}.$$

Chứng minh. Ta có:

$$\begin{cases}(1+ab)\left(1+\frac{a}{b}\right)\ge(1+a)^2\Rightarrow\frac{1}{(a+1)^2}\ge\frac{1}{(1+ab)\left(1+\frac{a}{a}\right)}=\frac{b}{(1+ab)(a+b)}\\(1+ab)\left(1+\frac{b}{a}\right)\ge(1+b)^2\Rightarrow\frac{1}{(1+b)^2}\ge\frac{1}{(1+ab)\left(1+\frac{b}{a}\right)}=\frac{a}{(1+ab)(a+b)}\end{cases}.$$

Cộng lại theo vế hai bất đẳng thức trên ta có điều phải chứng minh.

Vậy ta có: $P=\left(\frac{1}{(1+a)^2}+\frac{1}{(1+b)^2}\right)+\frac{1}{(1+c)^2}\ge\frac{1}{1+ab}+\frac{1}{(1+c)^2}$

$$=\frac{1}{1+\frac{1}{c}}+\frac{1}{(1+c)^2}=\frac{c^2+c+1}{(c+1)^2}.$$

Ta chứng minh

$\frac{c^2+c+1}{(c+1)^2}\ge\frac{3}{4}\Leftrightarrow 4c^2+4c+4\ge3\left(c^2+2c+1\right)\Leftrightarrow(c-1)^2\ge0$ (luôn đúng).

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\frac{3}{4}$ đạt tại $a=b=c=1$.

Ví dụ 2. Cho *x,y,z* là các số thực dương thỏa mãn $xyz=1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{1}{(1+x)^2}+\frac{1}{(1+y)^2}+\frac{4}{3(1+z)^3}$.

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức: $\frac{1}{(1+x)^2}+\frac{1}{(1+y)^2}\ge\frac{1}{1+xy}=\frac{1}{1+\frac{1}{z}}=\frac{z}{1+z}$.

Khi đó $P \ge \frac{z}{1+z} + \frac{4}{3(1+z)^3} = \frac{3z^3+6z^2+3z+4}{3(z+1)^3}$.

Dự đoán đẳng thức xảy ra khi $x=y=z=1 \Rightarrow P=\frac{2}{3}$.

Ta chứng minh

$$\frac{3z^3+6z^2+3z+4}{3(z+1)^3} \ge \frac{2}{3} \Leftrightarrow z^3-3z+2 \ge 0 \Leftrightarrow (z+2)(z-1)^2 \ge 0 \text{ (luôn đúng).}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\frac{2}{3}$ đạt tại $x=y=z=1$.

Ví dụ 3. Cho *x,y,z* là các số thực dương thay đổi thỏa mãn $xyz=1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{1}{(1+x)^3}+\frac{1}{(1+y)^3}+\frac{1}{(1+z)^3}$.

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta được:

$$\frac{1}{(1+x)^3}+\frac{1}{(1+x)^3}+\frac{1}{8} \ge \frac{3}{2(1+x)^2}$$

$$\frac{1}{(1+y)^3}+\frac{1}{(1+y)^3}+\frac{1}{8} \ge \frac{3}{2(1+y)^2}.$$

$$\frac{1}{(1+z)^3}+\frac{1}{(1+z)^3}+\frac{1}{8} \ge \frac{3}{2(1+z)^2}$$

Cộng theo vế ba đất đẳng thức trên ta được:

$$2P+\frac{3}{8} \ge \frac{3}{2}\left[\frac{1}{(1+x)^2}+\frac{1}{(1+y)^2}+\frac{1}{(1+z)^2}\right] \ge \frac{3}{2}\left(\frac{1}{1+xy}+\frac{1}{(1+z)^2}\right) = \frac{3}{2}.\frac{z^2+z+1}{(z+1)^2} \ge \frac{9}{8}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\frac{3}{8}$ đạt tại $x=y=z=1$.

Nhận xét. Thay $x=\frac{b}{a}, y=\frac{c}{b}, z=\frac{a}{c}$ ta có bài toán trong đề thi Kỳ thi chọn HSG quốc gia năm 2006 như sau:

Bài toán. (VMO 2006) Cho a,b,c là các số thực dương.

Chứng minh rằng $\left(\frac{a}{a+b}\right)^3+\left(\frac{b}{b+c}\right)^3+\left(\frac{c}{c+a}\right)^3 \ge \frac{3}{8}$.

Ví dụ 4. Cho x, y, z là các số thực dương thay đổi thỏa mãn $x \le y \le z$ và $xyz = 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{3}{(x+1)^2} + \frac{2}{(y+1)^2} + \frac{1}{(z+1)^2}$.

Lời giải

Do $x \le z \Rightarrow \frac{1}{(x+1)^2} \ge \frac{1}{(z+1)^2} \Rightarrow P \ge 2\left(\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(y+1)^2} + \frac{1}{(z+1)^2}\right)$.

Sử dụng bất đẳng thức phụ ta có

$$P \ge \frac{2}{1+xy} + \frac{2}{(1+z)^2} = \frac{2}{1+\frac{1}{z}} + \frac{2}{(1+z)^2} = 2.\frac{z^2+z+1}{(1+z)^2}.$$

Ta chứng minh $2.\frac{z^2+z+1}{(1+z)^2} \ge \frac{3}{2} \Leftrightarrow (z-1)^2 \ge 0$ (luôn đúng).

Vậy GTNN của P bằng $\frac{3}{2}$ khi $x = y = z = 1$.

Ví dụ 5. Cho các số thực dương a,b,c,d thay đổi thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$.

Chứng minh rằng $(1-a)(1-b)(1-c)(1-d) \ge abcd$.

Lời giải

Ta phải chứng minh $\frac{1-a}{a}.\frac{1-b}{b}.\frac{1-c}{c}.\frac{1-d}{d} \ge 1$.

Đặt $x = \frac{1-a}{a}, y = \frac{1-b}{b}, z = \frac{1-c}{c}, t = \frac{1-d}{d}$ ta có $0 < x, y, z, t < 1$.

Theo giả thiết ta có: $\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+y)^2} + \frac{1}{(1+z)^2} + \frac{1}{(1+t)^2} = 1$.

Ta có: $\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+y)^2} + \frac{1}{(1+z)^2} + \frac{1}{(1+t)^2} \ge \frac{1}{1+xy} + \frac{1}{1+zt} = \frac{2+xy+zt}{1+xy+zt+xyzt}$.

Suy ra: $\frac{2+xy+zt}{1+xy+zt+xyzt} \le 1 \Leftrightarrow xyzt \ge 1$ ta có điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = d = \frac{1}{2}$.

➢ BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1. Cho a,b,c,d là các số thực dương . Chứng minh

$$\left(\frac{a}{a+b}\right)^2+\left(\frac{b}{b+c}\right)^2+\left(\frac{c}{c+d}\right)^2+\left(\frac{d}{d+a}\right)^2\ge 1.$$

HD: Viết lại bất đẳng thức dưới dạng:

$$\frac{1}{\left(1+\frac{b}{a}\right)^2}+\frac{1}{\left(1+\frac{c}{b}\right)^2}+\frac{1}{\left(1+\frac{d}{c}\right)^2}+\frac{1}{\left(1+\frac{a}{d}\right)^2}\ge 1.$$

Đặt $x=\frac{b}{a}, y=\frac{c}{b}, z=\frac{d}{c}, t=\frac{a}{d}$ ta có $xyzt=1$ và đưa và bất đẳng thức quen thuộc

$\frac{1}{(1+x)^2}+\frac{1}{(1+y)^2}+\frac{1}{(1+z)^2}+\frac{1}{(1+t)^2}\ge 1$ với x,y,z,t là các số thực dương thỏa mãn $xyzt=1$.

Bài 2. Cho *a,b,c* là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\left(\frac{a}{a+b}\right)^2+\left(\frac{b}{b+c}\right)^2+\left(\frac{c}{c+a}\right)^2.$$

HD: Viết lại P dưới dạng:

$$P=\frac{1}{\left(1+\frac{b}{a}\right)^2}+\frac{1}{\left(1+\frac{c}{b}\right)^2}+\frac{1}{\left(1+\frac{a}{c}\right)^2}=\frac{1}{(1+x)^2}+\frac{1}{(1+y)^2}+\frac{1}{(1+z)^2}$$

với $x=\frac{b}{a}, y=\frac{c}{b}, z=\frac{a}{c}$ nên ta có $xyz=1$.

Sử dụng bất đẳng thức phụ ta được: $\frac{1}{(1+x)^2}+\frac{1}{(1+y)^2}\ge\frac{1}{1+xy}$.

Suy ra: $P\ge\frac{1}{1+xy}+\frac{1}{(1+z)^2}=\frac{1}{1+\frac{1}{z}}+\frac{1}{(1+z)^2}=\frac{z^2+z+1}{(z+1)^2}\ge\frac{3}{4}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\frac{3}{4}$ đạt tại $a=b=c$.

Nhận xét. *Từ kết quả trên ta chứng minh được với mọi a,b,c dương ta luôn có*

$$\left(\frac{a}{a+b}\right)^3+\left(\frac{b}{b+c}\right)^3+\left(\frac{c}{c+a}\right)^3\ge\frac{3}{8}.$$

Thật vậy, đặt $A=\frac{a}{a+b},B=\frac{b}{b+c},C=\frac{c}{c+a}$ theo chứng minh trên ta có:

$$A^2+B^2+C^2\ge\frac{3}{4}.$$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta được:

$$A^3+A^3+\frac{1}{8}\ge\frac{3}{2}A^2,B^3+B^3+\frac{1}{8}\ge\frac{3}{2}B^2,C^3+C^3+\frac{1}{8}\ge\frac{3}{2}C^2.$$

Cộng lại theo vế ba đất đẳng thức trên ta được:

$$2\left(A^3+B^3+C^3\right)+\frac{3}{8}\ge\frac{3}{2}\left(A^2+B^2+C^2\right)\ge\frac{9}{8}\Rightarrow A^3+B^3+C^3\ge\frac{3}{8}.$$

Bài toán được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$.

Bài 3. Cho a,b,c là các số thực dương thay đổi thỏa mãn $a\le b\le c$ và $abc=1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{5}{(1+a)^2}+\frac{4}{(1+b)^2}+\frac{3}{(1+c)^2}$.

Bài 4. Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $a\ge b\ge c$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{1}{(a+1)^2}+\frac{2}{(b+1)^2}+\frac{3}{(c+1)^2}+\frac{ab+bc+ca}{4}.$$

Bài 5. Cho x,y,z là các số thực dương thay đổi thỏa mãn $x\le y\le z$ và $xyz=1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{3}{(x+1)^2}+\frac{2}{(y+1)^2}+\frac{1}{(z+1)^2}$.

HD: Do $x\le z\Rightarrow\frac{1}{(x+1)^2}\ge\frac{1}{(z+1)^2}$

$$\Rightarrow P\ge2\left(\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(y+1)^2}+\frac{1}{(z+1)^2}\right).$$

Vậy ta có:

$$P\ge2\left[\left(\frac{1}{(1+x)^2}+\frac{1}{(1+y)^2}\right)+\frac{1}{(1+z)^2}\right]\ge\frac{2}{1+xy}+\frac{2}{(1+z)^2}=\frac{2}{1+\frac{1}{z}}+\frac{2}{(1+z)^2}=2.\frac{z^2+z+1}{(1+z)^2}.$$

Ta chứng minh $2.\frac{z^2+z+1}{(1+z)^2}\ge\frac{3}{2}\Leftrightarrow(z-1)^2\ge0$ (luôn đúng).

Vậy GTNN của P bằng $\frac{3}{2}$ khi $x = y = z = 1$.

Bài 6. Cho a,b,c,d là các số thực dương thay đổi thỏa mãn $abcd = 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{(1+a)^2} + \frac{1}{(1+b)^2} + \frac{1}{(1+c)^2} + \frac{1}{(1+d)^2}.$$

HD: Sử dụng bất đẳng thức phụ ta có:

$$\frac{1}{(1+a)^2} + \frac{1}{(1+b)^2} + \frac{1}{(1+c)^2} + \frac{1}{(1+d)^2} \geq \frac{1}{1+ab} + \frac{1}{1+cd} = \frac{ab+cd+2}{1+ab+cd+abcd} = 1.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 1 đạt tại $a = b = c = d = 1$.

Bài toán 11. Với mọi số thực dương a,b ta có $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \geq \frac{8}{(a+b)^2}$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.

Chứng minh.

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM cho hai số dương ta được:

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \geq \frac{2}{ab} \geq \frac{2}{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2} = \frac{8}{(a+b)^2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.

Đây chỉ là một bất đẳng thức rút ra từ bất đẳng thức AM – GM cho hai số dương ta cùng xét một số bài toán áp dụng.

➢ CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho x, y, z là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $x^2 + y^2 + z^2 \leq 3y$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{4}{(y+2)^2} + \frac{8}{(z+3)^2}$.

Lời giải

Ta có:

$$\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{4}{(y+2)^2} = \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{\left(\frac{y}{2}+1\right)^2} \geq \frac{2}{(x+1)\left(\frac{y}{2}+1\right)} \geq \frac{8}{\left(x+1+\frac{y}{2}+1\right)^2}.$$

$$\frac{8}{\left(x+1+\frac{y}{2}+1\right)^2}+\frac{8}{(z+3)^2}\ge\frac{16}{\left(x+1+\frac{y}{2}+1\right)(z+3)}\ge\frac{64}{\left(x+1+\frac{y}{2}+1+z+3\right)^2}.$$

Mặt khác: $2x+4y+2z\le x^2+1+y^2+4+z^2+1=x^2+y^2+z^2+6\le 3y+6$

$\Rightarrow 2x+y+2z\le 6\Rightarrow x+\frac{y}{2}+z\le 3\Rightarrow P\ge\frac{64}{(3+2+3)^2}=1$.

Vậy GTNN của P bằng 1 khi $x=z=1, y=2$.

Ví dụ 2. Cho *a*,*b*,*c* là các số thực không âm và không đồng thời bằng 0 thay đổi thỏa mãn điều kiện $a^2+b^2+c^2\le 6b$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{1}{(a+b+c)^2}+\frac{8}{(b+11)^2}+\frac{1}{(c+6)^2}$.

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức phụ $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\ge\frac{8}{(x+y)^2}$ ta được:

$$\frac{1}{(a+b+c)^2}+\frac{1}{(c+6)^2}\ge\frac{8}{(a+b+2c+6)^2}.$$

Suy ra $P\ge 8\left(\frac{1}{(a+b+2c+6)^2}+\frac{1}{(b+11)^2}\right)\ge\frac{64}{(a+2b+2c+17)^2}$.

Mặt khác theo bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$2a+10b+4c\le\left(a^2+1\right)+\left(b^2+25\right)+\left(c^2+4\right)\le 6b+30\Rightarrow a+2b+2c\le 15.$$

Do đó $P\ge\frac{64}{(15+17)^2}=\frac{1}{16}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\frac{1}{16}$ đạt tại $a=1, b=5, c=4$.

➢ BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1. Cho *a*,*b*,*c* là các số thực đôi một phân biệt.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}\right)$.

HD: Không mất tính tổng quát giả sử $a > b > c$ khi đó ta có:

$$\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}\geq\frac{2}{(a-b)(b-c)}\geq\frac{8}{(a-c)^2}.$$

$$a^2+b^2+c^2\geq a^2+c^2\geq\frac{(a-c)^2}{2}$$

Suy ra $P\geq\frac{(a-c)^2}{2}\left[\frac{8}{(a-c)^2}+\frac{1}{(a-c)^2}\right]=\frac{9}{2}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $b=0, a=-c$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\frac{9}{2}$ đạt tại $a=-c, b=0$ hoặc các hoán vị.

Bài 2. Cho *a,b,c* là các số thực đôi một phân biệt thuộc đoạn $[0;2]$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}.$$

HD: Không mất tính tổng quát giả sử $a > b > c$ ta có:

$$\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}\geq\frac{2}{(a-b)(b-c)}\geq\frac{8}{(a-c)^2}.$$

Do đó $P\geq\frac{9}{(a-c)^2}\geq\frac{9}{4}, \forall a,c\in[0;2]$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\frac{9}{4}$ đạt tại $a=2, b=1, c=0$ hoặc các hoán vị.

CHỦ ĐỀ 9: BÀI TOÁN CHỌN LỌC BẤT ĐẲNG THỨC VÀ CỰC TRỊ BA BIẾN

Trong chủ đề này tôi tổng hợp lại một số bài toán bất đẳng thức và cực trị ba biến hay trong các đề thi thử, đề thi chọn Học sinh giỏi cấp tỉnh và thành phố các năm cùng một số bài toán đề xuất trên Diễn đàn học tập trực tuyến Mathlinks.vn. Và sau một số bài toán có bổ sung thêm một số bài toán tương tự dành cho bạn đọc rèn luyện.

Bài 1. Cho x,y,z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $x(1-yz) = y + z$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\dfrac{\left(z+z\sqrt{xy}\right)^2}{(x+y)\left(z^2+1\right)}+\dfrac{2z}{\left(1+z^2\right)\sqrt{1+z^2}}$.

Lời giải

Theo giả thiết ta có $z(1+xy)=x-y\Rightarrow x>y$.

Sử dụng bất đẳng thức C –S ta có

$$\left(z+z\sqrt{xy}\right)^2=z^2\left(1+2\sqrt{xy}+xy\right)=z^2(1+xy)+2z^2\sqrt{xy}=z(x-y)+2z^2\sqrt{xy}$$

$$\le\sqrt{\left(z^2+z^4\right)\left[(x-y)^2+4xy\right]}=(x+y)z\sqrt{z^2+1}$$

Khi đó $P\le\dfrac{(x+y)z\sqrt{z^2+1}}{(x+y)\left(z^2+1\right)}+\dfrac{2z}{\left(1+z^2\right)\sqrt{z^2+1}}=\dfrac{z}{\sqrt{z^2+1}}+\dfrac{2z}{\left(1+z^2\right)\sqrt{z^2+1}}$.

Xét hàm số $g(z)=\dfrac{z}{\sqrt{z^2+1}}+\dfrac{2z}{\left(1+z^2\right)\sqrt{z^2+1}}$ với z dương ta có

$$g'(z)=\frac{3\left(1-z^2\right)}{\left(z^2+1\right)^2\sqrt{z^2+1}};g'(z)=0\Leftrightarrow z=1.$$

Ta có g'(z) đổi dấu từ dương sang âm khi đi qua 1 vì vậy $g(z)\le g(1)=\sqrt{2}$.

Với $z=1, x=\sqrt{2}+1, y=\sqrt{2}-1$ thì P bằng $\sqrt{2}$.

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng $\sqrt{2}$.

Bài 2. Cho a, b, c là các số không âm thoả mãn điều kiện $ab+bc+ca=4$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\sqrt{a^2+9bc}+\sqrt{b^2+9ac}+\sqrt{c^2+9ba}.$$

Lời giải

Ta chứng minh $\sqrt{a^2+9bc}+\sqrt{b^2+9ac}+\sqrt{c^2+9ba}\ge 5\sqrt{ab+bc+ca}$.

Không mất tính tổng quát giả sử $c=\min\{a,b,c\}$.

Sử dụng bất đẳng thức Mincopski ta có

$$\sqrt{a^2+9bc}+\sqrt{b^2+9ac}\ge\sqrt{(a+b)^2+9c\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2}.$$

Và $\sqrt{c^2+9ab}\ge 3\sqrt{ab}$.

Vậy ta chỉ cần chứng minh

$$\sqrt{(a+b)^2+9c\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2}+3\sqrt{ab}\ge 5\sqrt{ab+bc+ca}$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{(a+b)^2+9c\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2}\ge 5\sqrt{ab+bc+ca}-3\sqrt{ab}$$

$$\Leftrightarrow(a+b)^2+9c\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2\ge 9ab+25(ab+bc+ca)-30\sqrt{ab(ab+bc+ca)}.$$

$$\Leftrightarrow(a+b)^2+18c\sqrt{ab}+30\sqrt{ab(ab+bc+ca)}\ge 34ab+16c(a+b)$$

$$\Leftrightarrow(a+b)^2+18c\sqrt{ab}-4ab-6c(a+b)$$

$$+30\left[\sqrt{ab(ab+bc+ca)}-\left(ab+\frac{c(a+b)}{3}\right)\right]\ge 0$$

Ta có $\sqrt{ab(ab+bc+ca)}-\left[ab+\frac{c(a+b)}{3}\right]=\dfrac{ab(ab+bc+ca)-\left[ab+\frac{c(a+b)}{3}\right]^2}{\sqrt{ab(ab+bc+ca)}+ab+\frac{c(a+b)}{3}}$

$$=\frac{c(a+b)(3ab-bc-ca)}{9\sqrt{ab(ab+bc+ca)}+9ab+3c(a+b)}\ge 0.$$

Vậy ta chứng minh $(a+b)^2+18c\sqrt{ab}-4ab-6c(a+b)\ge 0$.

Bất đẳng thức có dạng thuần nhất nên chuẩn hoá $a+b=1$.

Đặt $x=\sqrt{ab},0\le c\le x\le\frac{a+b}{2}=\frac{1}{2}$.

Ta cần chứng minh $f(x)=-4x^2+18cx-6c+1\ge 0$.

Vế trái là tam thức bậc hai với hệ số x^2 âm nên chỉ cần chỉ ra rằng

$$\min\left\{f(c);f\left(\frac{1}{2}\right)\right\}\ge 0.$$

Thật vậy ta có $f\left(\frac{1}{2}\right)=3c\ge 0;f(c)=5c^2+(3c-1)^2>0$.

Bất đẳng thức được chứng minh.

Vậy ta có $\sqrt{a^2+9bc}+\sqrt{b^2+9ac}+\sqrt{c^2+9ba}\ge 10$.

Dấu bằng đạt tại $a=b=2,c=0$ hoặc các hoán vị.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 10.

Bài 3. Cho a,b,c là độ dài ba cạnh của một tam giác và thỏa mãn điều kiện $a^2+b^2+c^2=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{a+b}{\sqrt{a+b-c}}+\frac{b+c}{\sqrt{b+c-a}}+\frac{c+a}{\sqrt{c+a-b}}.$$

Lời giải

Ta chứng minh giá trị nhỏ nhất của P bằng 6.

Thật vậy chỉ cần chứng minh rằng

$$\frac{a+b}{\sqrt{a+b-c}}+\frac{b+c}{\sqrt{b+c-a}}+\frac{c+a}{\sqrt{c+a-b}}\ge 6\sqrt[4]{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}.$$

Bất đẳng thức có dạng thuần nhất nên chuẩn hoá $a+b+c=3$.

Ta cần chứng minh rằng $\dfrac{3-a}{\sqrt{3-2a}}+\dfrac{3-b}{\sqrt{3-2b}}+\dfrac{3-c}{\sqrt{3-2c}}\ge 6\sqrt[4]{\dfrac{a^2+b^2+c^2}{3}}$.

Ta chứng minh $\dfrac{3-x}{\sqrt{3-2x}}\ge\dfrac{x^2+3}{2},\forall x\in\left(0;\dfrac{3}{2}\right)$.

Thật vậy bất đẳng thức đã cho tương đương với:

$$4(3-x)^2\ge\left(x^2+3\right)^2(3-2x)\Leftrightarrow(x-1)^2\left(2x^3+x^2+12x+9\right)\ge 0.$$

Bất đẳng thức được chứng minh.

Áp dụng bất đẳng thức kết hợp bất đẳng thức AM – GM ta có

$$\frac{3-a}{\sqrt{3-2a}}+\frac{3-b}{\sqrt{3-2b}}+\frac{3-c}{\sqrt{3-2c}}\ge\frac{a^2+b^2+c^2+3.3}{2}$$

$$\ge 2\sqrt[4]{3^3\left(a^2+b^2+c^2\right)}=6\sqrt[4]{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}$$

Ta có đpcm.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 6 đạt tại $a=b=c=1$.

Bài 4. Cho x,y,z là các số thực dương thoả mãn điều kiện

$$x^2+y^2+z^2+1\le 2x+3y.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{x^3+x^2+36}{2x+2}+\frac{y^3+y^2+36}{4y+4}+\frac{2z^3+z^2+9}{2z+1}.$$

Lời giải

Ta có $P=\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{4}+z^2+\frac{18}{x+1}+\frac{9}{y+1}+\frac{9}{2z+1}$.

Dựa vào biểu thức của P trên ta dự đoán dấu bằng đạt tại

$$x+1=y+1=2z+1\Rightarrow x=y=2z.$$

Thay vào điều kiện ta được: $x=y=2,z=1$.

Dựa vào đó ta có các đánh giá sau đây:

Sử dụng bất đẳng thức C –S ta có

$$\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{4}+z^2=\frac{2x^2+y^2+4z^2}{4}\ge\frac{1}{16}(2x+y+2z)^2.$$

$$\frac{18}{x+1}+\frac{9}{y+1}+\frac{9}{2z+1}=\frac{9}{x+1}+\frac{9}{x+1}+\frac{9}{y+1}+\frac{9}{2z+1}$$

$$\ge\frac{9.4^2}{2(x+1)+y+1+2z+1}=\frac{144}{2x+y+2z+4}$$

Do đó $P\ge\frac{144}{2x+y+2z+4}+\frac{1}{16}(2x+y+2z)^2$.

Chú ý giả thiết bài toán ta có $2x+3y\ge x^2+y^2+z^2+1$

$$=(x^2+4)+(y^2+4)+(z^2+1)-8$$

$$\ge 4x+4y+2z-8$$

$$\Rightarrow 2x+y+2z\le 8$$

Đặt $t=2x+y+2z, t\in(0;8]$ ta có $P\ge\frac{1}{16}t^2+\frac{144}{t+4}=\frac{(t-8)^2(t+20)}{16(t+4)}+16\ge 16$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=2,z=1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 16.

Bài 5. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện $a^2+b^2+c^2=14$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{4(a+c)}{a^2+3c^2+28}+\frac{4a}{a^2+bc+7}-\frac{5}{(a+b)^2}-\frac{3}{a(b+c)}.$$

Lời giải

Chú ý đến giả thiết bài toán và tích a(b+c) ta có đánh giá như sau:

$14+2bc=a^2+(b+c)^2\ge 2a(b+c)\Rightarrow a(b+c)\le 7+bc$.

Suy ra $\frac{4a}{a^2+bc+7} \le \frac{4a}{a^2+a(b+c)} = \frac{4}{a+b+c}$.

Sử dụng bất đẳng thức AM – GM ta có: $a(b+c) \le \left(\frac{a+b+c}{2}\right)^2$

$$\Rightarrow -\frac{3}{a(b+c)} \le -\frac{3}{\left(\frac{a+b+c}{2}\right)^2} = -\frac{12}{(a+b+c)^2}.$$

Cộng theo vế hai bất đẳng thức trên ta được:

$$\frac{4a}{a^2+bc+7} - \frac{3}{a(b+c)} \le -\frac{12}{(a+b+c)^2} + \frac{4}{a+b+c}$$

$$= -12\left(\frac{1}{a+b+c} - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{1}{3} \le \frac{1}{3}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b+c; a+b+c = 6$.

Sử dụng bất đẳng thức C –S ta có:

$$\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(a^2+3c^2\right) \ge (a+c)^2 \Rightarrow a^2+3c^2 \ge \frac{3}{4}(a+c)^2.$$

Suy ra $\frac{4(a+c)}{a^2+3c^2+28} \le \frac{4(a+c)}{\frac{3}{4}(a+c)^2+28} \le \frac{1}{25}(a+c-4) + \frac{2}{5}$.

Và $-\frac{5}{(a+b)^2} \le \frac{2}{25}(a+b-5) - \frac{1}{5}$.

Chú ý ở hai bất đẳng thức trên ta sử dụng bất đẳng thức dạng tiếp tuyến.

Cộng theo vế hai bất đẳng thức trên và sử dụng bất đẳng thức C –S ta được:

$$\frac{4(a+c)}{a^2+3c^2+28} - \frac{5}{(a+b)^2} \le \frac{3a+2b+c-9}{25}$$

$$\le \frac{\sqrt{\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(3^2+2^2+1^2\right)} - 9}{25} = \frac{1}{5}$$

Từ đó suy ra $P_{\max} = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{8}{15}$ đạt tại $a = 3, b = 2, c = 1$.

Nhận xét. Ta có thể đánh giá phân thức đầu tiên bằng cách khác như sau:

$$a^2+3c^2+28 = 2a^2+b^2+4c^2+14 \ge 2a^2+4bc+14.$$

Mặt khác: $2a^2+2bc+2(bc+7) \ge 2a^2+2bc+2a(b+c) = 2(a+b)(a+c)$.

Suy ra $\dfrac{4(a+c)}{a^2+3c^2+28} \le \dfrac{2}{a+b}$.

Do đó $P \le \dfrac{2}{a+b} + \dfrac{4}{a+b+c} - \dfrac{5}{(a+b)^2} - \dfrac{12}{(a+b+c)^2}$

$$= \frac{8}{15} - \frac{1}{5}\cdot\left(\frac{a+b-5}{a+b}\right)^2 - \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{a+b+c-6}{a+b+c}\right)^2 \le \frac{8}{15}$$

Ta có kết quả tương tự trên.

Bài tập tương tự

1) Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện $a+b+c=3$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2} + \frac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2} + \frac{8\left(a+b-3\sqrt{c^2+3}\right)}{9c}.$$

2) Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện $a^2+b^2+c^2=26$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{4(a+c)}{2a^2+4bc+26} + \frac{4a}{a^2+bc+13} - \frac{4}{a(b+c)} - \frac{7}{(a+b)^2}.$$

Bài 6. Cho a, b, c là các số thuộc đoạn [0, 3].

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$.

Lời giải

Giả sử $a = \max\{a,b,c\}$.

Nếu $a \ge b \ge c \Rightarrow A \le 0$.

Nếu $a \ge c \ge b$.

Khi đó

$$\begin{aligned} P(a,b,c) - P(a,0,c) &= (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c) - ac(a-c)(a+c) \\ &= (a-c)\left[(a-b)(c-b)(a+b+c) - ac(a+c)\right] \\ &= (a-c)b\left(b^2 - ac - c^2 - a^2\right) \le 0 \end{aligned}.$$

Do đó $P(a,b,c) \le P(a,0,c) = ac(a-c)(a+c) = a^3c - ac^3$.

Xét hàm số $f(a) = a^3c - ac^3$ trên đoạn [0;3] ta có

$f'(a) = c\left(3a^2 - c^2\right) \ge 0; \forall 3 \ge a \ge c \ge 0$.

Do đó f(a) đồng biến trên đoạn [0;3] suy ra

$f(a) \le f(3) = g(c) = 27c - 3c^3$.

Xét hàm số $g(c) = 27c - 3c^3$ trên đoạn [0;3] ta có

$g'(c) = 27 - 9c^2; g'(c) = 0 \Leftrightarrow c = \sqrt{3}$.

Ta có g'(c) đổi dấu từ dương sang âm khi đi qua $c = \sqrt{3}$ nên g(c) đạt cực đại tại $c = \sqrt{3}$.

Vì vậy $g(c) \le g(\sqrt{3}) = 18\sqrt{3}$.

Suy ra $P_{\max} = 18\sqrt{3}$. Dấu bằng đạt tại $a = 3, b = 0, c = \sqrt{3}$.

Bài tập tương tự

Cho a, b, c là các số thuộc đoạn [0, 2].

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$.

Bài 7. Cho *x,y,z* là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $x + 3y \le 9z$ và $x > y > z$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \left(\frac{x}{y-z}\right)^2 + 3\left(\frac{y}{x-z}\right)^2 + 3\left(\frac{z}{x-y}\right)^2$.

Lời giải

Ta có $(a-3)^2 \ge 0 \Rightarrow a^2 \ge 6a - 9$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = 3$.

$(b-1)^2 \ge 0 \Rightarrow b^2 \ge 2b - 1$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $b = 1$.

Áp dụng vào bài toán ta có:

Ta có: $\left(\frac{x}{y-z}\right)^2 \ge 6.\frac{x}{y-z} - 9; \left(\frac{y}{x-z}\right)^2 \ge 2.\frac{y}{x-z} - 1; \left(\frac{z}{x-y}\right)^2 \ge 2.\frac{z}{x-y} - 1$.

Suy ra: $P \ge 6\left(\frac{x}{y-z} + \frac{y}{x-z} + \frac{z}{x-y}\right) - 15 = 6Q - 15$.

Với $Q = \frac{x}{y-z} + \frac{y}{x-z} + \frac{z}{x-y} = \frac{x^2}{x(y-z)} + \frac{z^2}{z(x-y)} + \frac{y}{x-z}$.

Sử dụng bất đẳng thức C-S ta có: $\frac{x^2}{x(y-z)} + \frac{z^2}{z(x-y)} \ge \frac{(x+z)^2}{x(y-z) + z(x-y)}$.

Suy ra: $Q \ge \frac{(x+z)^2}{x(y-z) + z(x-y)} + \frac{y}{x-z} = \frac{(x+z)^2}{y(x-z)} + \frac{y}{x-z}$

$$= \left(\frac{x+z}{y}\right)^2 . \frac{y}{x-z} + \frac{y}{x-z} = \frac{y}{x-z}\left[1 + \left(\frac{x+z}{y}\right)^2\right]$$

Mặt khác $\left(\frac{x+z}{y}-2\right)^2 \geq 0 \Rightarrow \left(\frac{x+z}{y}\right)^2 \geq 4.\frac{x+z}{y}-4$.

Do đó $Q \geq \frac{y}{x-z}\left[1+4.\frac{x+z}{y}-4\right] = 4.\frac{x+z}{x-z}-3.\frac{y}{x-z} = \frac{4x+4z-3y}{x-z} \geq 5$.

Vì $x+3y \leq 9z$.

Tại $x=3, y=2, z=1$ thì $P=15$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 15 đạt tại $x=3, y=2, z=1$.

Cách 2: Theo giả thiết tồn tại các số dương a,b sao cho

$$x=(a+1)z, y=(b+1)z, (a>b).$$

Ta có: $x+3y \leq 9z \Leftrightarrow (x-z)+3(y-z) \leq 5z \Leftrightarrow a+3b \leq 5$.

Khi đó $P = \left(\frac{a+1}{b}\right)^2 + 3\left(\frac{b+1}{a}\right)^2 + 3\left(\frac{1}{a-b}\right)^2$.

Sử dụng bất đẳng thức C-S ta có

$$(9+3+3)\left[\left(\frac{a+1}{b}\right)^2 + 3\left(\frac{b+1}{a}\right)^2 + 3\left(\frac{1}{a-b}\right)^2\right] \geq 3\left(\frac{a+1}{b}+\frac{b+1}{a}+\frac{1}{a-b}\right).$$

Xét $Q = \frac{a+1}{b}+\frac{b+1}{a}+\frac{1}{a-b} = \frac{1}{a-b}+\frac{a-b}{b}+\frac{b+1}{b}+\frac{b+1}{a}$

$$\geq 2\sqrt{\frac{1}{a-b}.\frac{a-b}{b}}+\frac{b+1}{b}+\frac{b+1}{5-3b} = \frac{b+1}{b}+\frac{b+1}{5-3b}+\frac{2}{\sqrt{b}}$$

Mặt khác $\frac{b+1}{b}+\frac{b+1}{5-3b}+\frac{2}{\sqrt{b}} = 5+\frac{\left(\sqrt{b}-1\right)^2\left(13b+20\sqrt{b}+5\right)}{b(5-3b)} \geq 5, \forall b \in \left(0;\frac{5}{3}\right)$.

Suy ra $Q \geq 5 \Rightarrow P \geq 15$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $b=1 \Rightarrow a=2 \Leftrightarrow 2x=3y=6z$.

Nhận xét. Đây là một bài toán hay và khó biểu thức của P là dạng đồng bậc nên chắc hẳn nhiều học sinh sẽ nghĩ đến phép đặt như trên.

Bài 8. Với mọi a,b,c tìm số thực M nhỏ nhất thoả mãn bất đẳng thức

$$\left|ab\left(a^2-b^2\right)+bc\left(b^2-c^2\right)+ca\left(c^2-a^2\right)\right| \leq M\left(a^2+b^2+c^2\right)^2.$$

Lời giải

Chú ý $\left|ab\left(a^2-b^2\right)+bc\left(b^2-c^2\right)+ca\left(c^2-a^2\right)\right| = \left|(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)\right|$.

Vậy ta cần tìm số thực M nhỏ nhất sao cho

$\left|(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)\right| \leq M\left(a^2+b^2+c^2\right)^2$ với mọi a,b,c.

Bất đẳng thức thuần nhất nên chuẩn hoá $a^2+b^2+c^2=1$.
Ta cần tìm M nhỏ nhất sao cho
$M \ge \left|(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)\right| \Leftrightarrow M = \max\left|(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)\right|$.
Ký hiệu $P=\left|(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)\right|$.
Không mất tính tổng quát giả sử $a \ge b \ge c$ khi đó

$$(a-b)(b-c) \le \left(\frac{a-c}{2}\right)^2 \Rightarrow P \le \frac{1}{4}\left|(a-c)^3(a+b+c)\right|.$$

Và $(a-c)^2=\left[(a-b)+(b-c)\right]^2$

$$\begin{aligned}
&=(a-c)^2+(b-c)^2+2(a-b)(b-c)\\
&\le (a-c)^2+(b-c)^2+\frac{1}{2}(a-c)^2\\
&\Rightarrow \frac{3}{2}(a-c)^2 \le (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\\
&\Rightarrow P \le \frac{1}{4}\sqrt{\left[\frac{2}{3}\left((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right)^3\right].(a+b+c)^2}
\end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a-b=b-c \Leftrightarrow a+c=2b$.
Khi đó sử dụng bất đẳng thức AM – GM ta có

$$P \le \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\left(\frac{(a+b+c)^2+3.\frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{3}}{4}\right)^4}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{32}.\sqrt{3^4\left(a^2+b^2+c^2\right)^4}=\frac{9\sqrt{2}}{32}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} a^2+b^2+c^2=1 \\ a+c=2b \\ (a+b+c)^2=\dfrac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{3} \end{cases}$

Vậy giá trị cần tìm của M là $\dfrac{9\sqrt{2}}{32}$.

Bài 9. Cho *a,b,c* là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a+6(b+c) \le 15$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=3(a+b+c)-5abc$.

Lời giải

Nhận xét. Điều kiện đối xứng với b và c nên ta nhóm lại biểu thức của P như sau

$P = a(3-5bc)+3(b+c)$.

+ Nếu $3-5bc>0 \Rightarrow P>0$.

+ Nếu $3-5bc \le 0 \Leftrightarrow bc \ge \dfrac{3}{5}$ khi đó theo giả thiết ta có $a \le 15-6(b+c); b+c<\dfrac{5}{2}$.

Suy ra

$$P \ge \left[15-6(b+c)\right](3-5bc)+3(b+c) = -15(b+c)+30bc(b+c)+45-75bc$$

$$= -15(b+c)+15bc(2b+2c-5)+45 \ge -15(b+c)+\frac{15}{4}(b+c)^2(2b+2c-5)+45$$

$$= \frac{15}{2}(b+c)^3-\frac{75}{4}(b+c)^2-15(b+c)+45$$

Đặt $t=b+c \ge 2\sqrt{bc} \ge 2\sqrt{\dfrac{3}{5}} > \dfrac{3}{2}$ khi đó $P \ge f(t) = \dfrac{15}{4}t^3-\dfrac{75}{4}t^2-15t+45$.

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{15}{4}t^3-\dfrac{75}{4}t^2-15t+45$ với $t>\dfrac{3}{2}$ ta có

$$f'(t)=\frac{15}{2}\left(3t^2-5t-2\right)=\frac{15}{2}(t-2)(3t+1);\ f'(t)=0 \Leftrightarrow t=2.$$

Ta có f'(t) đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua $t=2$ nên f(t) đạt cực tiểu tại $t=2$.

Do đó $P \ge f(t) \ge f(2)=0$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $b=c=1, a=3$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 0 đạt tại $a=3, b=c=1$.

Bài 10. Cho *x,y,z* là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện

$$5\left(x^2+y^2+z^2\right)=6(xy+yz+zx).$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\sqrt{2(x+y+z)}-\left(y^2+z^2\right)$.

Lời giải

Nhận xét. Biểu thức của P đối xứng với 2 biến y và z nên ta nghĩ đến việc đánh giá biểu thức P theo $y+z$ và đẳng thức điều kiện có dạng đẳng cấp nên làm ta suy nghĩ đến việc đánh giá x theo $y+z$. Để tìm giá trị lớn nhất của P ta tìm cận trên của x theo $y+z$.

Ta có

$$5x^2+\frac{5}{2}(y+z)^2 \le 5x^2+5(y^2+z^2)=6(xy+yz+zx) \le 6x(y+z)+6.\frac{1}{4}(y+z)^2.$$

Do đó $5x^2-6x(y+z)+(y+z)^2 \le 0$,

Suy ra $x+y+z\le 2(y+z)$.

Khi đó $P\le\sqrt{2(x+y+z)}-\frac{1}{2}(y+z)^2\le\sqrt{4(y+z)}-\frac{1}{2}(y+z)^2=2\sqrt{y+z}-\frac{1}{2}(y+z)^2.$

Đặt $\sqrt{y+z}=t,$ khi đó $t\ge 0$ và $P\le 2t-\frac{t^4}{2}.$ (1)

Xét hàm số $f(t)=2t-\frac{1}{2}t^4$ với $t\ge 0.$

Ta có $f'(t)=2-2t^3;\ f'(t)=0\Leftrightarrow t=1.$

Suy ra bảng biến thiên:

t	0		1		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		$\nearrow$	$\frac{3}{2}$	$\searrow$	

Dựa vào bảng biến thiên ta có $f(t)\le f(1)=\frac{3}{2}$ với mọi $t\ge 0.$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $P\le\frac{3}{2},$ dấu đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases}x=y+z\\y=z\\y+z=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=z=\frac{1}{2}\end{cases}$

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\frac{3}{2},$ đạt tại $x=1,\ y=z=\frac{1}{2}.$

Bài tập tương tự

Cho x,y,z là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện

$$8\left(x^2+y^2+z^2\right)=3\left(x+y+z\right)^2.$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\sqrt{2\left(x+y+z\right)}-\left(y^2+z^2\right).$

Bài 11. Cho x,y,z là các số thực dương thay đổi thỏa mãn điều kiện

$$x^2+y^2+z^2=1.$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\frac{xy}{1+z^2}+\frac{yz}{1+x^2}-\frac{x^3y^3+y^3z^3}{24x^3z^3}.$

Lời giải

Ta có:

$$\frac{xy}{1+z^2}+\frac{yz}{1+x^2}-\frac{x^3y^3+y^3z^3}{24x^3z^3}=\frac{xy}{x^2+y^2+2z^2}+\frac{yz}{y^2+z^2+2x^2}-\frac{1}{24}\left(\frac{y^3}{x^3}+\frac{y^3}{z^3}\right).$$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta được:

$$\frac{xy}{x^2+y^2+2z^2}+\frac{yz}{y^2+z^2+2x^2}\le\frac{(x+y)^2}{4\left(x^2+y^2+2z^2\right)}+\frac{(y+z)^2}{4\left(y^2+z^2+2x^2\right)}.$$

Sử dụng bất đẳng thức C-S ta được:

$$\frac{(x+y)^2}{x^2+y^2+2z^2}+\frac{(y+z)^2}{y^2+z^2+2x^2}\le\frac{x^2}{x^2+z^2}+\frac{y^2}{y^2+z^2}+\frac{z^2}{x^2+z^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}$$

$$=1+\frac{y^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{y^2+z^2}\le 1+\frac{1}{4}\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)+\frac{1}{4}\left(1+\frac{y^2}{z^2}\right)$$

$$=\frac{3}{2}+\frac{1}{4}\left(\frac{y^2}{x^2}+\frac{y^2}{z^2}\right)$$

Suy ra: $P\le\frac{1}{4}\left[\frac{3}{2}+\frac{1}{4}\left(\frac{y^2}{x^2}+\frac{y^2}{z^2}\right)\right]-\frac{1}{24}\left(\frac{y^3}{x^3}+\frac{y^3}{z^3}\right)$

$$=\frac{3}{8}+\frac{1}{48}\left(\frac{3y^2}{x^2}+\frac{3y^2}{z^2}-\frac{2y^3}{x^3}-\frac{2y^3}{z^3}\right)$$

$$=\frac{3}{8}+\frac{1}{48}\left(\frac{3y^2}{x^2}-\frac{2y^3}{x^3}\right)+\frac{1}{48}\left(3\frac{y^2}{z^2}-\frac{2y^3}{z^3}\right)$$

Xét hàm số $f(t)=3t^2-2t^3$ trên $(0;+\infty)$, ta được:

$f'(t)=6t-6t^2=6t(1-t)$ suy ra f'(t) đổi dấu từ dương sang âm khi đi qua $t=1$ do đó f(t) đạt cực đại tại $t=1$ trên $(0;+\infty)$.

Suy ra $f(t)\le f(1)=1, \forall\, t>0$.

Tức $P\le\frac{3}{8}+\frac{1}{48}\left(f\left(\frac{y}{x}\right)+f\left(\frac{y}{z}\right)\right)\le\frac{3}{8}+\frac{1}{48}(1+1)=\frac{5}{12}$.

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng $\frac{5}{12}$ đạt tại $x=y=z=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Bài 12. Cho a,b,c là các số thực không đồng thời bằng 0 thoả mãn điều kiện $a+b+c=0$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\frac{13a^2b^2c^2-2abc-2}{\left(a^2+b^2+c^2\right)^3}$.

Lời giải

Theo giả thiết a,b,c là ba nghiệm của phương trình: $x^3+qx-r=0$ với $p=a+b+c=0,q=ab+bc+ca,r=abc$.

Điều kiện để phương trình có ba nghiệm là hàm số $y=x^3+qx-r$ có $y_{CD}.y_{CT}\le 0$.

Ta có $y'=3x^2+q;y'=0\Leftrightarrow x^2=-\frac{q}{3}\Rightarrow\begin{cases}q\le 0\\ x=\pm\sqrt{\frac{-q}{3}}\end{cases}$.

Khi đó

$$y\left(-\sqrt{\frac{-q}{3}}\right).y\left(\sqrt{\frac{-q}{3}}\right)=-\left(r+\frac{2q}{3}\sqrt{\frac{-q}{3}}\right)\left(\frac{2q}{3}\sqrt{-\frac{q}{3}}-r\right)=r^2+\frac{4q^3}{27}\le 0\Rightarrow -q^3\ge\frac{27}{4}r^2.$$

Ta chỉ cần tìm giá trị lớn nhất của P dương vậy xét $13r^2-2r-2>0$.
Khi đó

Chú ý $a^2+b^2+c^2=p^2-2q=-2q\Rightarrow P=\frac{13r^2-2r-2}{(-2q)^3}=\frac{13r^2-2r-2}{-8q^3}$.

$$P=\frac{13r^2-2r-2}{-8q^3}\le\frac{13r^2-2r-2}{8.\frac{27}{4}r^2}=\frac{13}{54}-\frac{1}{27r}-\frac{1}{27r^2}=\frac{1}{4}-\frac{1}{27}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{2}\right)^2\le\frac{1}{4}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}p=0\\ r=-2\\ -q^3=\frac{27}{4}r^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}p=0\\ q=-3\\ r=-2\end{cases}$.

Do đó a,b,c là ba nghiệm của phương trình

$$x^2-3x+2=0\Leftrightarrow(x-1)^2(x+2)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=-2\end{array}\right..$$

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng ¼ đạt tại $a=b=1,c=-2$ hoặc các hoán vị.

Bài 13. Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện

$$a^2+b^2+(a+b)c+4c^2=4.$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{a(b+c)^2}{a+c}+\frac{b(a+c)^2}{b+c}-\frac{\sqrt{8-7c^2}-c}{c(a+b)}.$$

Lời giải

Ta có: $a^2+b^2+c(a+b)+4c^2=4 \Rightarrow 4 \ge 4c^2+c(a+b)+\frac{1}{2}(a+b)^2$.

$\Leftrightarrow t^2+2tc+8c^2-8 \le 0 \Leftrightarrow (t+c)^2 \le 8-7c^2 \Leftrightarrow t \le -c+\sqrt{8-7c^2}$.

Do đó $P \le \frac{a(b+c)^2}{a+c}+\frac{b(a+c)^2}{b+c}-\frac{1}{c}$.

Đặt $a+c=x, b+c=y$ khi đó theo giả thiết ta có:

$(x-c)^2+(y-c)^2+(x+y-2c)c+4c^2=4 \Leftrightarrow x^2+y^2-c(x+y)=4-4c^2$.

Mặt khác:

$$\frac{a(b+c)^2}{a+c}+\frac{b(a+c)^2}{b+c}=\frac{y^2(x-c)}{x}+\frac{x^2(y-c)}{y}=x^2+y^2-c\left(\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}\right).$$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x} \ge x+y \Rightarrow P \le x^2+y^2-c(x+y)-\frac{1}{c}=-4c^2-\frac{1}{c}+4.$$

Xét hàm số $f(c)=-4c^2-\frac{1}{c}+4$ với $c>0$ ta có:

$$f'(c)=-8c+\frac{1}{c^2};\ f'(c)=0 \Leftrightarrow 8c=\frac{1}{c^2} \Leftrightarrow c=\frac{1}{2}.$$

Ta có f'(c) đổi dấu từ dương sang âm khi đi qua $c=\frac{1}{2}$ nên f(c) đạt cực tiểu tại $c=\frac{1}{2}$ hay $P \le f(c) \le f\left(\frac{1}{2}\right)=1$.

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng 1 đạt tại $a=b=1, c=\frac{1}{2}$.

Bài tập tương tự

1) Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện $a>b; (a+c)(b+c)=1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{6}{(b+c)^2}+\frac{12}{(c+a)^2}$.

2) Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện $a^2+b^2+(a+b)c+4c^2=4$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\frac{a(b+c)^2}{a+c}+\frac{b(a+c)^2}{b+c}-\frac{1}{c}$.

Bài 14. Cho a,b,c là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\sqrt{\frac{(a+b+c)(ab+bc+ca)}{abc}}+\frac{4bc}{(b+c)^2}.$$

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức AM – GM ta có:

$$\begin{aligned}\frac{(a+b+c)(ab+bc+ca)}{abc}&=3+\frac{b+c}{a}+\frac{a(b+c)}{bc}+\frac{b^2+c^2}{bc}\\&\ge 3+\frac{2(b+c)}{\sqrt{bc}}+\frac{b^2+c^2}{bc}\\&=1+\frac{2(b+c)}{\sqrt{bc}}+\frac{(b+c)^2}{bc}=\left(\frac{b+c}{\sqrt{bc}}+1\right)^2\end{aligned}$$

Do đó $P\ge \frac{b+c}{\sqrt{bc}}+1+\frac{4bc}{(b+c)^2}$.

Đặt $t=\frac{(b+c)^2}{bc},(t\ge 4)$ ta có $P\ge f(t)=1+\sqrt{t}+\frac{4}{t}$.

Xét hàm số $f(t)=1+\sqrt{t}+\frac{4}{t}$ với $t\ge 4$ ta có

$f'(t)=\frac{1}{2\sqrt{t}}-\frac{4}{t^2}=\frac{t\sqrt{t}-8}{2t^2}\ge 0,\forall t\ge 4$ do đó f(t) là hàm đồng biến trên $[4;+\infty)$ suy ra

$P\ge f(t)\ge f(4)=4$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

<u>**Cách 2:**</u> Ta có thể đánh giá biểu thức trong căn như sau:

$$\begin{aligned}(a+b+c)(ab+bc+ca)&=(a+b+c)\left[a(b+c)+bc\right]\\&=a^2(b+c)+bc(b+c)+a(b+c)^2+abc\\&\ge 2a(b+c)\sqrt{bc}+abc+a(b+c)^2\end{aligned}$$

Suy ra $\sqrt{\frac{(a+b+c)(ab+bc+ca)}{abc}}\ge\sqrt{\frac{2a(b+c)\sqrt{bc}+abc+a(b+c)^2}{abc}}=\frac{b+c}{\sqrt{bc}}+1$.

Ta có kết quả tương tự trên.

Bài 15. Cho *x,y,z,t* là các số thực thuộc đoạn $\left[\frac{1}{2};\frac{2}{3}\right]$.

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=9\left(\frac{x+z}{x+t}\right)^2+16\left(\frac{z+t}{x+y}\right)^2.$$

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$9\left(\frac{x+z}{x+t}\right)^2+16\left(\frac{z+t}{x+y}\right)^2 \ge 2\sqrt{9\left(\frac{x+z}{x+t}\right)^2.16\left(\frac{z+t}{x+y}\right)^2}=24.\frac{(x+z)(z+t)}{(x+t)(x+y)}$$

$$\ge 24.\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(t+\frac{1}{2}\right)}{(x+t)\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\right)}=18.\frac{(2x+1)(2t+1)}{4(x+t)}.$$

$$=18\left[\frac{1}{2}+\frac{4xt+1}{4(x+t)}\right]\ge 18\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)=18$$

Do $2(x+t)-4xt-1=(1-2x)(2t-1)\le 0$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 18 đạt tại $x=y=\frac{2}{3}, z=t=\frac{1}{2}$.

Tìm giá trị lớn nhất của P

Ta có: $\frac{x+z}{x+t}\le\frac{x+\frac{2}{3}}{x+t}\le\frac{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}}{\frac{1}{2}+t}=\frac{7}{3(2t+1)}$ (do $\frac{x+\frac{2}{3}}{x+t}$ là hàm nghịch biến với x).

Tương tự ta có: $\frac{z+t}{x+y}\le\frac{\frac{2}{3}+t}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}=t+\frac{2}{3}$. Suy ra $P\le f(t)=\frac{49}{(2t+1)^2}+16\left(t+\frac{2}{3}\right)^2$.

Xét hàm số $f(t)=\frac{49}{(2t+1)^2}+16\left(t+\frac{2}{3}\right)^2$ liên tục trên đoạn $\left[\frac{1}{2};\frac{2}{3}\right]$ ta có:

$$f'(t)=32\left(t+\frac{2}{3}\right)-\frac{196}{(2t+1)^3}\ge 32\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\right)-\frac{196}{\left(2.\frac{1}{2}+1\right)^3}=\frac{77}{6}>0.$$

Do đó f(t) là hàm đồng biến trên $\left[\frac{1}{2};\frac{2}{3}\right]$.

Do đó $P\le f(t)\le f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{337}{3}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=\frac{1}{2}, z=t=\frac{2}{3}$.

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng $\frac{337}{3}$ đạt tại $x=y=\frac{1}{2}, z=t=\frac{2}{3}$.

Bài 16. Cho *x,y,z* là các số thực thỏa mãn điều kiện $x^2+y^2+z^2=3$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\sqrt{3x^2+7y}+\sqrt{3x^2+7z}+\sqrt{5y+5z}$.

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức C-S ta có:

$$P^2\le 3\left(6x^2+7y+7z+5y+5z\right)=18\left[x^2+2\left(y+z\right)\right]$$
$$\le 18\left[x^2+2\sqrt{2\left(y^2+z^2\right)}\right]=18\left[x^2+2\sqrt{2\left(3-x^2\right)}\right].$$

Xét hàm số $f(x)=18\left[x^2+2\sqrt{2\left(3-x^2\right)}\right]$ liên tục trên $\left[-\sqrt{3};\sqrt{3}\right]$ ta có:

$$f'(x)=36\left(x-\frac{2x}{\sqrt{2\left(3-x^2\right)}}\right);\ f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ \sqrt{2\left(3-x^2\right)}=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=-1\\ x=1\end{array}\right..$$

Ta có $f(0)=2\sqrt{6},\ f(-\sqrt{3})=f(\sqrt{3})=3,\ f(-1)=f(1)=5$.

Suy ra $P\le f(x)\le \max\limits_{x\in\left[-\sqrt{3};\sqrt{3}\right]} f(x)=5$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=\pm1, y=z=1$.

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng 5 đạt tại $x=-1, y=z=1$ hoặc $x=y=z=1$.

Bài 17. Cho *x,y,z* là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $y+z=x\left(y^2+z^2\right)$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(y+1)^2}+\frac{1}{(z+1)^2}+\frac{4}{(x+1)(y+1)(z+1)}.$$

Lời giải

Theo giả thiết ta có: $y+z=x\left(y^2+z^2\right)\ge\frac{1}{2}x\left(y+z\right)^2\Rightarrow y+z\le\frac{2}{x}$.

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$\frac{1}{(y+1)^2}+\frac{1}{(z+1)^2}\ge\frac{2}{(y+1)(z+1)}\ge\frac{8}{(y+z+2)^2}\ge\frac{8}{\left(\frac{2}{x}+2\right)^2}=\frac{2x^2}{(x+1)^2}$$

$$\frac{1}{(1+x)(1+y)(1+z)}\ge\frac{4}{(1+x)(y+z+2)^2}\ge\frac{4}{(1+x)\left(\frac{2}{x}+2\right)^2}=\frac{x^2}{(x+1)^3}.$$

Suy ra $P \ge \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{2x^2}{(1+x)^2} + \frac{4x^2}{(1+x)^3} = \frac{2x^3+6x^2+x+1}{(1+x)^3}$.

Xét hàm số $f(x) = \frac{2x^3+6x^2+x+1}{(1+x)^3}$ với $x > 0$ ta có:

$f'(x) = \frac{2(5x-1)}{(1+x)^4}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{5}$.

Ta có f'(x) đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua $x = \frac{1}{5}$ nên f(x) đạt cực tiểu tại $x = \frac{1}{5}$ hay $P \ge f(x) \ge f\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{91}{108}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = \frac{1}{5}, y = z = 5$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\frac{91}{108}$ đạt tại $x = \frac{1}{5}, y = z = 5$.

Bài 18. Cho *a,b,c* là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $a > b > c$ và $3ab + 5bc + 7ca \le 9$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{32}{(a-b)^4} + \frac{1}{(b-c)^4} + \frac{1}{(c-a)^4}.$$

Lời giải

Theo giả thiết ta có $a > b > c \ge 0 \Rightarrow 9 \ge 7ca + 5bc + 3ab \ge 3ab \Rightarrow ab \le 3$.

Khi đó:

$$P \ge \frac{32}{(a-b)^4} + \frac{1}{a^4} + \frac{1}{b^4} \ge \frac{a^2b^2}{9}\left[\frac{32}{(a-b)^4} + \frac{1}{a^4} + \frac{1}{b^4}\right]$$

$$= \frac{1}{9}\left[\frac{32a^2b^2}{\left(a^2-2ab+b^2\right)^2} + \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2}\right] = \frac{1}{9}\left[\frac{32}{\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-2\right)^2} + \left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)^2 - 2\right]$$

Đặt $t = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}, (t > 2)$ do $a > b$ khi đó $P \ge f(t) = \frac{1}{9}\left[\frac{32}{(t-2)^2} + t^2 - 2\right]$.

Xét hàm số $f(t) = \frac{1}{9}\left[\frac{32}{(t-2)^2} + t^2 - 2\right]$ với $t > 2$ ta có:

$$f'(t)=\frac{1}{9}\left[-\frac{64}{(t-2)^3}+2t\right];\ f'(t)=0$$

$\Leftrightarrow 2t(t-2)^3=64 \Leftrightarrow t=4$

Ta có f'(t) đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua $t=4$ nên tại $t=4$ f(t) đạt cực tiểu hay $P\ge f(t)\ge f(4)=\frac{10}{9}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} c=0 \\ ab=3 \\ \frac{a}{b}+\frac{b}{a}=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\sqrt{6+3\sqrt{3}} \\ b=\sqrt{2+\sqrt{3}}\left(2\sqrt{3}-3\right) \\ c=0 \end{cases}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\frac{10}{9}$ đạt tại

$$a=\sqrt{6+3\sqrt{3}}, b=\sqrt{2+\sqrt{3}}\left(2\sqrt{3}-3\right), c=0.$$

Bài 19. Cho *a,b,c* là các số thực không âm thoả mãn $c=\min\{a,b,c\}$ và $a^2+b^2+c^2=3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=2ab+3bc+3ca+\frac{6}{a+b+c}.$$

Lời giải

Trước hết ta có: $2ab+3bc+3ca\le(a+b+c)^2-1$

Suy ra $P\le(a+b+c)^2+\frac{6}{a+b+c}-1$.

Đặt $t=a+b+c, \left(\sqrt{3}<t\le 3\right)$ khi đó $P\le f(t)=t^2+\frac{6}{t}-1$.

Xét hàm số $f(t)=t^2+\frac{6}{t}-1$ với $t\in\left(\sqrt{3};3\right]$ ta có:

$$f'(t)=2t-\frac{6}{t^2}>0, \forall t\in\left(\sqrt{3};3\right] \Rightarrow P\le f(t)\le f(3)=10.$$

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng 10 đạt tại $a=b=c=1$.

Nhận xét. Bất đẳng thức $2ab+3bc+3ca\le(a+b+c)^2-1$ có được nhờ dự đoán dấu bằng đạt tại $a=b=c=1$ và ý tưởng đưa về khảo sát hàm số với $t=a+b+c$.

Chứng minh.

$$(a+b+c)^2-1-2ab-3bc-3ca=2-bc-ca$$

$$=2-c(a+b)\geq 2-c\sqrt{2\left(a^2+b^2\right)}=2-c\sqrt{2\left(3-c^2\right)}$$

$$=2-\sqrt{2c^2\left(3-c^2\right)}\geq 2-\frac{2c^2+3-c^2}{2}=\frac{1-c^2}{2}\geq 0$$

Bài tập tương tự

Cho *a,b,c* là các số thực không âm có $c=\min\{a,b,c\}$ và $a^2+b^2+c^2=3$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\sqrt{\frac{2ab+3bc+3ca}{2}}-\frac{6}{(a+b+2c)^2-17}$.

Bài 20. Cho *a,b,c* là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $abc(a+b+c)=4$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{1}{\sqrt{(a+b)(a+c)}}-\frac{8bc}{bc\left(b^2+c^2\right)+8}$.

Lời giải

Nhận xét. Nhìn vào biểu thức P cho ta thấy P đối xứng với b và c nên ta tìm cách đánh giá xoay quanh hai biến này. Và dễ thấy áp dụng AM-GM cho $a+b, a+c$.

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$\sqrt{(a+b)(a+c)}\leq\frac{a+b+a+c}{2}=\frac{2a+b+c}{2}.$$

Vậy tìm cách đánh giá theo $2a+b+c$.

Ta có: $\frac{8bc}{bc\left(b^2+c^2\right)+8}=\frac{8}{b^2+c^2+\frac{8}{bc}}=\frac{8}{b^2+c^2+2a(a+b+c)}$

$$\leq\frac{8}{\frac{1}{2}(b+c)^2+2a(b+c)+2a^2}=\frac{16}{(2a+b+c)^2}$$

Suy ra $P\geq\frac{2}{2a+b+c}-\frac{16}{(2a+b+c)^2}$.

Đặt $t=2a+b+c,(t>0)$ khi đó $P\geq f(t)=\frac{2}{t}-\frac{16}{t^2}$.

Ta có: $t^2=4a^2+4a(b+c)+(b+c)^2=\frac{16}{bc}+(b+c)^2\geq\frac{16}{bc}+4bc\geq 16\Rightarrow t\geq 4$.

Xét hàm số $f(t)=\frac{2}{t}-\frac{16}{t^2}$ với $t\geq 4$ ta có $f'(t)=-\frac{2}{t^2}+\frac{32}{t^3}; f'(t)=0\Leftrightarrow t=16$.

Lập bảng biến thiên suy ra $P \geq f(t) \geq f(4) = -\dfrac{1}{2}$.

Đẳng thức xảy ra khi $a = 2 - \sqrt{2}, b = c = \sqrt{2}$.

Bài 21. Cho *a,b,c* là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a \geq b \geq c$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \dfrac{a+b}{\sqrt{ab^2+bc^2+ca^2}} + \dfrac{\sqrt{b\left(a^2+ac+c^2\right)}}{b+c}$.

Lời giải

Do $a \geq b \geq c > 0$ nên ta có:

$$\left(b-a\right)\left(b-c\right) \leq 0 \Leftrightarrow b^2+ac \leq ab+bc \Rightarrow ab^2+ca^2 \leq a^2b+abc$$

$$\Rightarrow ab^2+bc^2+ca^2 \leq a^2b+abc+bc^2 = b\left(a^2+ac+c^2\right)$$

Mặt khác: $a+b \geq 2b, b+c \leq 2b$ suy ra:

$$P \geq \frac{2b}{\sqrt{b\left(a^2+ac+c^2\right)}} + \frac{\sqrt{b\left(a^2+ac+c^2\right)}}{2b}$$

$$= 2\sqrt{\frac{b}{a^2+ac+c^2}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2+ac+c^2}{b}} \geq 2$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c, \sqrt{\dfrac{b}{a^2+ac+c^2}} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow a = b = c = \dfrac{4}{3}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 2 đạt tại $a = b = c = \dfrac{4}{3}$.

Bài 22. Cho *a,b,c* là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c=1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \dfrac{a^2}{1+b} + \dfrac{b^2}{1+a} + \dfrac{4c^2}{2+\sqrt{2a^2+2b^2}}$.

Lời giải

Ta có $c = 1-\left(a+b\right) \geq 1 - \sqrt{2\left(a^2+b\right)^2} \Rightarrow \dfrac{4c^2}{2+\sqrt{2\left(a^2+b^2\right)}} \geq \dfrac{4\left(1-\sqrt{2\left(a^2+b^2\right)}\right)^2}{2+\sqrt{2\left(a^2+b^2\right)}}$

$$\frac{a^2}{1+b} + \frac{b^2}{1+a} = \frac{a^4}{a^2+a^2b} + \frac{b^4}{b^2+ab^2} \geq \frac{\left(a^2+b^2\right)^2}{a^2+b^2+ab\left(a+b\right)}$$

$$\geq \frac{\left(a^2+b^2\right)^2}{a^2+b^2+\frac{1}{2}\left(a^2+b^2\right)\sqrt{2\left(a^2+b^2\right)}} = \frac{2\left(a^2+b^2\right)}{2+\sqrt{2\left(a^2+b^2\right)}}$$

Suy ra $P \ge \frac{2\left(a^2+b^2\right)}{2+\sqrt{2\left(a^2+b^2\right)}} + \frac{4\left(1-\sqrt{2\left(a^2+b^2\right)}\right)^2}{2+\sqrt{2\left(a^2+b^2\right)}}$

Đặt $t=\sqrt{2\left(a^2+b^2\right)},(t>0)$ ta có $P \ge f(t)=\frac{t^2+4(1-t)^2}{t+2}=\frac{5t^2-8t+4}{t+2}$

Xét hàm số $f(t)=\frac{5t^2-8t+4}{t+2}$ với $t>0$ ta có

$f'(t)=\frac{5\left(t^2+4t-4\right)}{(t+2)^2}; f'(t)=0 \Leftrightarrow t=-2+2\sqrt{2}\ \ (t>0)$.

Ta có f'(t) đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua $t=-2+2\sqrt{2}$ nên f(t) đạt cực tiểu tại $t=-2+2\sqrt{2}$ hay $P \ge f(t) \ge f\left(-2+2\sqrt{2}\right)=20\sqrt{2}-28$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}\sqrt{2\left(a^2+b^2\right)}=-2+2\sqrt{2}\\ a=b\\ a+b+c=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=b=-1+\sqrt{2}\\ c=3-2\sqrt{2}\end{cases}$

Vậy giá trị nhỏ nhất P bằng $20\sqrt{2}-28$ đạt tại $a=b=-1+\sqrt{2}, c=3-2\sqrt{2}$.

Bài 23. Cho x,y,z là các số thực không âm. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{1}{x+2y+3z+1}-\frac{5}{(x+2y)(3z+1)}.$$

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$(x+2y)(3z+1) \le \left(\frac{x+2y+3z+1}{2}\right)^2$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x+2y=3z+1$

$\Rightarrow P \le \frac{1}{x+2y+3z+1}-\frac{20}{(x+2y+3z+1)^2}$

$=-20\left(\frac{1}{x+2y+3z+1}-\frac{1}{40}\right)^2+\frac{1}{80} \le \frac{1}{80}$

Với $x+2y=20; z=\frac{19}{3}$ thì P bằng $\frac{1}{80}$. Vậy GTLN của P bằng $\frac{1}{80}$.

Bài 24. Cho a,b,c là các số thực dương thuộc đoạn $\left[\frac{1}{2};1\right]$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\frac{a}{b+c}.\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}$.

Lời giải

$$\frac{(c+a)(c+b)}{ab}\ge\frac{\left(c+\sqrt{ab}\right)^2}{ab}=\left(\frac{c}{\sqrt{ab}}+1\right)^2\ge\left(\frac{2c}{a+b}+1\right)^2$$

$$\Rightarrow P\le\frac{c}{a+b}+\frac{1}{\left(\frac{2c}{a+b}+1\right)^2}$$

Đặt $t=\frac{c}{a+b},\frac{1}{4}\le t\le 1$.

Ta có $P\le f(t)=f(t)=t+\frac{1}{(2t+1)^2}$.

Xét hàm số $f(t)=t+\frac{1}{(2t+1)^2}$ liên tục trên đoạn $\left[\frac{1}{4};1\right]$ ta có

$$f'(t)=1-\frac{4}{(2t+1)^3}=\frac{(2t+1)^3-4}{(2t+1)^3}>0,\forall t\in\left[\frac{1}{4};1\right].$$

Do đó $P_{\max}=f(1)=\frac{10}{9}\Leftrightarrow a=b=\frac{1}{2};c=1$

Bài 25. Cho *a,b,c* là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c=1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=a^3b^3c^3-(a-bc)(b-ca)(c-ab)$.

Lời giải

Ta chứng minh $8a^2b^2c^2\ge(a-bc)(b-ca)(c-ab)$.

Không mất tính tổng quát giả sử $a\ge b\ge c$ khi đó do $a,b,c\in(0;1)\Rightarrow\begin{cases}a-bc>0\\b-ca>0\end{cases}$

Nếu $c-ab<0$ bất đẳng thức luôn đúng.

Nếu $c-ab\ge 0$ khi đó ta chứng minh $2ab\ge\sqrt{(a-bc)(b-ca)}$

Thật vậy $2ab\ge\sqrt{(a-bc)(b-ca)}\Leftrightarrow 4a^2b^2\ge(a-bc)(b-ca)$

$$\Leftrightarrow 4a^2b^2\ge ab-a^2c-b^2c+abc^2\Leftrightarrow 4a^2b^2+c\left(a^2+b^2\right)-ab\left(c^2+1\right)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow 4a^2b^2+c(a-b)^2+ab\left(2c-c^2-1\right)\ge 0\Leftrightarrow 4a^2b^2+c(a-b)^2-ab(c-1)^2\ge 0$$

$\Leftrightarrow ab\left[4ab-(a+b)^2\right]+c(a-b)^2\ge 0\Leftrightarrow (c-ab)(a-b)^2\ge 0$ (luôn đúng).

Tương tự ta có $2bc\ge (b-ca)(c-ab);2ca\ge (c-ab)(a-bc)$.

Nhân theo vế 3 bất đẳng thức trên ta có ngay điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Khi đó $P\ge a^3b^3c^3-8a^2b^2c^2$.

Đặt $t=abc,\left(0<t\le\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3=\frac{1}{27}\right)$ ta có $P\ge f(t)=t^3-8t^2$.

Xét hàm số $f(t)=t^3-8t^2$ với $t\in\left(0;\frac{1}{27}\right]$ ta có

$f'(t)=3t^2-16t=t(3t-16)<0,\forall t\in\left(0;\frac{1}{27}\right]$.

Do đó f(t) là hàm nghịch biến trên $\left(0;\frac{1}{27}\right]$.

Suy ra $P\ge f(t)\ge f\left(\frac{1}{27}\right)=-\frac{215}{19683}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $-\frac{215}{19683}$ đạt tại $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Bài 26. Cho *a,b,c* là các số thực dương. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{25\sqrt{5}}{\sqrt{(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)}}-\frac{36}{a+b+c}.$$

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức: $(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)\ge\frac{5}{16}(a+b+c+1)^2$.

Chứng minh xem chương 2.

Khi đó $P\le\frac{100}{a+b+c+1}-\frac{36}{a+b+c}$.

Đặt $t=a+b+c$ khi đó $P\le f(t)=\frac{100}{t+1}-\frac{36}{t}$.

Ta có $f'(t)=-\frac{100}{(t+1)^2}+\frac{36}{t^2}; f'(t)=0\Leftrightarrow 6(t+1)=10t\Leftrightarrow t=\frac{3}{2}$.

Ta có f'(t) đổi dấu từ dương sang âm khi đi qua $t=\frac{3}{2}$ nên f(t) đạt cực đại tại $t=\frac{3}{2}$.

Suy ra $P\le f(t)\le f\left(\frac{3}{2}\right)=16$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{2}$.

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng 16 đạt tại $a=b=c=\frac{1}{2}$.

Bài 27. Cho *x,y,z* là độ dài 3 cạnh một tam giác.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\sqrt{1+\frac{24(y+z-x)}{x}}+\sqrt{1+\frac{24(z+x-y)}{y}}+\sqrt{1+\frac{24(x+y-z)}{z}}.$$

Lời giải

Đặt $a=x+y-z, b=y+z-x, c=x+z-y$ khi đó:

$$P=\sqrt{1+\frac{48a}{b+c}}+\sqrt{1+\frac{48b}{c+a}}+\sqrt{1+\frac{48c}{a+b}}.$$

Không mất tính tổng quát giả sử $c=\min\{a,b,c\}$.

Sử dụng bất đẳng thức Mincopski ta có:

$$\sqrt{1+\frac{48a}{b+c}}+\sqrt{1+\frac{48b}{c+a}}\ge\sqrt{2^2+\left(\sqrt{\frac{48a}{b+c}}+\sqrt{\frac{48b}{c+a}}\right)^2}=\sqrt{4+48\left(\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}\right)^2}.$$

Mặt khác: $\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}\ge 2\sqrt{\frac{a+b}{a+b+2c}}$.

Thật vậy ta có: $\left(\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}\right)^2\left[a^2(b+c)+b^2(c+a)\right]\ge(a+b)^3$.

$$a^2(b+c)+b^2(c+a)-\frac{(a+b)^3}{4}-\frac{c(a+b)^2}{2}=-\frac{(a-b)^2(a+b-2c)}{4}\le 0$$

$$\Rightarrow a^2(b+c)+b^2(c+a)\le\frac{(a+b)^3}{4}+\frac{c(a+b)^2}{2}$$

Do đó $\frac{(a+b)^3}{a^2(b+c)+b^2(c+a)}\ge\frac{(a+b)^3}{\frac{(a+b)^3}{4}+\frac{c(a+b)^2}{2}}=\frac{4(a+b)}{a+b+2c}$.

Suy ra $\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}\ge 2\sqrt{\frac{a+b}{a+b+2c}}$.

Vậy $P\ge 2\sqrt{1+\frac{48(a+b)}{a+b+2c}}+\sqrt{1+\frac{48c}{a+b}}$.

Đặt $t+1=\sqrt{1+\frac{48c}{a+b}},\left(0<t\le 4\right)\Rightarrow \sqrt{1+\frac{48\left(a+b\right)}{a+b+2c}}=\sqrt{\frac{t^2+2t+1176}{t^2+2t+24}}$

Suy ra $P\ge 2\sqrt{\frac{t^2+2t+1176}{t^2+2t+24}}+t+1$.

Ta chứng minh $2\sqrt{\frac{t^2+2t+1176}{t^2+2t+24}}+t+1\ge 15\Leftrightarrow 2\sqrt{\frac{t^2+2t+1176}{t^2+2t+24}}\ge 14-t$

$\Leftrightarrow 4\left(t^2+2t+1176\right)\ge \left(14-t\right)^2\left(t^2+2t+24\right)\Leftrightarrow t\left(18-t\right)\left(t-4\right)^2\ge 0$ (luôn đúng).

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $t=4\Leftrightarrow 2c=a+b\Leftrightarrow a=b=c\Leftrightarrow x=y=z$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 15 đạt tại $x=y=z$.

Bài 28. Cho a,b,c là các số thực thuộc đoạn $\left[\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right]$ và thoả mãn điều kiện $a+b+c=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=7\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-6\left(a^4+b^4+c^4\right).$$

Lời giải

Vì $a,b,c\in\left[\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right]\Rightarrow a+b-c=3-2c\ge 0$. Tương tự $b+c-a\ge 0,c+a-b\ge 0$.

Do đó

$$2\left(a^2b^2+b^2c^2+a^2a^2\right)-\left(a^4+b^4+c^4\right)=\left(a+b+c\right)\left(a+b-c\right)\left(b+c-a\right)\left(c+a-b\right)\ge 0.$$

Suy ra $2\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)+a^4+b^4+c^4\ge 2\left(a^4+b^4+c^4\right)$.

$\Leftrightarrow a^4+b^4+c^4\le \frac{1}{2}\left(a^2+b^2+c^2\right)^2$.

Suy ra $P\ge 7\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-3\left(a^2+b^2+c^2\right)^2$.

Đặt $a=y+z,b=z+x,c=x+y\Rightarrow x,y,z\ge 0$ và $x+y+z=\frac{3}{2}$.

Ta có

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}+\frac{1}{x+y}=\frac{2}{3}.\left(x+y+z\right)\left(\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}+\frac{1}{x+y}\right)$$

$$=\frac{2}{3}\left(\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}+3\right)\ge 2+\frac{2}{3}\left(\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}\right)$$

$$\frac{x}{y+z}=\frac{x^2}{x(y+z)}\ge\frac{x^2}{xy+yz+zx}$$

$$\frac{y}{z+x}=\frac{y^2}{y(z+x)}=\frac{y^2}{xy+yz+zx}$$

$$\frac{z}{x+y}=\frac{z^2}{z(x+y)}=\frac{z^2}{xy+yz+zx}$$

Suy ra $\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}\ge\frac{x^2+y^2+z^2}{xy+yz+zx}=\frac{9}{4(xy+yz+zx)}-2$

Và $\left(a^2+b^2+c^2\right)^2=4\left(x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx\right)^2$

$$=4\left[(x+y+z)^2-(xy+yz+zx)\right]^2=4\left(\frac{9}{4}-xy-yz-zx\right)^2$$

Suy ra $P\ge7\left[2+\frac{2}{3}\left(\frac{9}{4(xy+yz+zx)}-2\right)\right]-12\left(\frac{9}{4}-xy-yz-zx\right)^2$

$$=\frac{14}{3}+\frac{63}{6(xy+yz+zx)}-12\left(\frac{9}{4}-xy-yz-zx\right)^2$$

Đặt $t=xy+yz+zx,\left(0<t\le\frac{(x+y+z)^2}{3}=\frac{3}{4}\right)$ khi đó

$P\ge f(t)=\frac{14}{3}+\frac{63}{6t}-12\left(\frac{9}{4}-t\right)^2$.

Xét hàm số $f(t)=\frac{14}{3}+\frac{63}{6t}-12\left(\frac{9}{4}-t\right)^2$ với $t\in\left(0;\frac{3}{4}\right]$ ta có

$f'(t)=-\frac{3\left(16t^3-36t^2+7\right)}{2t^2}$; $f'(t)=0\Leftrightarrow16t^3-36t^2+7=0\Leftrightarrow t=\frac{1}{2}$ (do $0<t\le\frac{3}{4}$).

Ta có f'(t) đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua $t=\frac{1}{2}$ nên f(t) đạt cực tiểu tại $t=\frac{1}{2}$ hay $P\ge f(t)\ge f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{133}{12}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} x+y+z=\dfrac{3}{2} \\ xy+yz+zx=\dfrac{1}{2} \\ xyz=0 \end{cases} \Leftrightarrow (x;y;z)=\left(0;\dfrac{1}{2};1\right)$ hoặc các hoán vị suy ra $(a;b;c)=\left(\dfrac{1}{2};1;\dfrac{3}{2}\right)$ hoặc các hoán vị.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $-\dfrac{133}{12}$ đạt tại $a=\dfrac{1}{2}, b=1, c=\dfrac{3}{2}$ hoặc các hoán vị.

Bài 29. Cho a,b,c là các số thực thuộc đoạn $[0;2]$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=ab(a^2-b^2)+bc(b^2-c^2)+ca(c^2-a^2).$$

Lời giải

Không mất tính tổng quát, giả sử $a=\max\{a,b,c\}$

Ta có :

$$P=ab(a^2-b^2)+c(b^3-a^3)+c^3(a-b)=ab(a^2-b^2)+c(b-a)(a^2+ab+b^2-c^2)$$

Vì $a\ge b\ge 0,\ a\ge c\ge 0$ nên $c(b-a)(b^2+ab+a^2-c^2)\le 0$

Suy ra: $P\le ab(a^2-b^2)\le 2b(4-b^2)$ (do $b\in[0;2]$)

Mặt khác : $F=2b(4-b^2)\ge 0$.

Ta có $F^2=4b^2(2-b^2)(4-b^2)=2.\left[2b^2.(4-b^2).(4-b^2)\right]$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$F^2\le 2.\left(\frac{2b^2+4-b^2+4-b^2}{3}\right)^3=2.\frac{512}{27}\Leftrightarrow 0\le F\le\frac{32\sqrt{3}}{9}$$

Dấu bằng xảy ra khi $a=2,\ b=\dfrac{2\sqrt{3}}{3},\ c=0$.

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\dfrac{32\sqrt{3}}{9}$, đạt được chẳng hạn khi $a=2,\ b=\dfrac{2\sqrt{3}}{3},\ c=0$.

Bài 30. Cho a,b,c là các số thực dương thuộc đoạn [1;2] và thỏa mãn điều kiện $(a+b+c)^2 = 4(ab+bc+ca-1)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\sqrt{\frac{a+b-c}{c}}+\sqrt{\frac{b+c-a}{a}}+\sqrt{\frac{c+a-b}{b}}+2\sqrt{\frac{2}{a^2+b^2+c^2-2}}.$$

Lời giải

Đặt $x=a+b-c, y=b+c-a, z=a+c-b, (x,y,z>0)$

Theo giả thiết ta có: $xy+yz+zx=4$.

Khi đó $P=\sqrt{2}\left(\sqrt{\frac{x}{y+z}}+\sqrt{\frac{y}{z+x}}+\sqrt{\frac{z}{x+y}}\right)+\frac{4}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

Ta có: $\left(\sqrt{\frac{x}{y+z}}+\sqrt{\frac{y}{z+x}}+\sqrt{\frac{z}{x+y}}\right)^2$

$$=\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}+2\left(\sqrt{\frac{xy}{(y+z)(x+z)}}+\sqrt{\frac{yz}{(y+x)(z+x)}}+\sqrt{\frac{zx}{(z+y)(x+y)}}\right).$$

Ta có: $\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}=\frac{1}{4}(xy+yz+zx)\left(\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}\right)$

$$=\frac{x^2+y^2+z^2}{4}+\frac{xyz}{4}\left(\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}\right)\ge\frac{x^2+y^2+z^2}{4}.$$

$$\sqrt{\frac{xy}{(y+z)(x+z)}}=\frac{xy}{\sqrt{(xy+zx)(xy+yz)}}\ge\frac{2xy}{2xy+yz+zx}\ge\frac{xy}{xy+yz+zx}.$$

Tương tự: $\sqrt{\frac{yz}{(y+x)(z+x)}}\ge\frac{yz}{xy+yz+zx},\sqrt{\frac{zx}{(z+y)(x+y)}}\ge\frac{zx}{xy+yz+zx}$.

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên ta được:

$$\sqrt{\frac{xy}{(y+z)(x+z)}}+\sqrt{\frac{yz}{(y+x)(z+x)}}+\sqrt{\frac{zx}{(z+y)(x+y)}}\ge 1.$$

Do đó $\sqrt{\frac{x}{y+z}}+\sqrt{\frac{y}{z+x}}+\sqrt{\frac{z}{x+y}}\ge\sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{4}+2}$.

Suy ra: $P\ge\sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{2}+4}+\frac{4}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

Đặt $t=\sqrt{x^2+y^2+z^2},\left(t\ge\sqrt{xy+yz+zx}=2\right)$ khi đó $P\ge f(t)=\sqrt{\frac{t^2}{2}+4}+\frac{4}{t}$.

Xét hàm số $f(t)=\sqrt{\frac{t^2}{2}+4}+\frac{4}{t}$ với $t\ge 2$ ta có:

$f'(t)=\frac{t}{\sqrt{2\left(t^2+8\right)}}-\frac{4}{t^2}; f'(t)=0\Leftrightarrow t^3=4\sqrt{2\left(t^2+8\right)}\Leftrightarrow t=2\sqrt{2}$.

Ta có f'(t) đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua $t=2\sqrt{2}$ nên f(t) đạt cực tiểu tại $t=2\sqrt{2}$ hay $P\ge f(t)\ge f(2\sqrt{2})=3\sqrt{2}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $3\sqrt{2}$ đạt tại $a=1,b=2,c=1$ hoặc các hoán vị.

Bài 31. Cho các số thực dương *a, b, c* thỏa mãn điều kiện $abc=1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=a^2b+b^2c+c^2a+\frac{1}{\sqrt[6]{a^3+b^3+c^3}}$.

Lời giải

Đặt $x=a^2b=a.ab=\frac{a}{c}; y=b^2c=b.bc=\frac{b}{a}; z=c^2a=c.ca=\frac{c}{b}\Rightarrow xyz=1$.

Vì $abc=1$ nên ta biến đổi được P thành $P=x+y+z+\frac{1}{\sqrt[6]{xy^2+yz^2+zx^2}}$

Ta có $x^2y+y^2z+z^2x\ge 3\sqrt[3]{x^2y.y^2z.z^2x}=3$.

Sử dụng bất đẳng thức AM – GM ta có

$$\frac{1}{\sqrt[6]{xy^2+yz^2+zx^2}}=\frac{\sqrt[6]{3}.\sqrt[6]{x^2y+y^2z+z^2x}}{\sqrt[6]{\left(xy^2+yz^2+zx^2\right)\left(x^2y+y^2z+z^2x\right).3xyz}}$$

$$\ge\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[6]{\left(xy^2+yz^2+zx^2\right)\left(x^2y+y^2z+z^2x\right).3xyz}}$$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta được:

$$\left(xy^2+yz^2+zx^2\right)\left(x^2y+y^2z+z^2x\right).3xyz\le\left(\frac{x^2y+y^2x+y^2z+z^2y+z^2x+x^2z+3xyz}{3}\right)^3$$

$$=\left[\frac{(x+y+z)(xy+yz+zx)}{3}\right]^3\le\frac{(x+y+z)^9}{27^2}$$

Suy ra $P\ge x+y+z+\frac{3.\sqrt[3]{3}}{(x+y+z)^{3/2}}$

Đặt $t=x+y+z,(t\ge 3)\Rightarrow P\ge f(t)=t+\frac{3.\sqrt[3]{3}}{t^{3/2}}$

Xét hàm số $f(t)=t+\dfrac{3.\sqrt[3]{3}}{t^{3/2}};t\ge 3$ ta thu được: $P\ge 3+\dfrac{1}{\sqrt[6]{3}}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $3+\dfrac{1}{\sqrt[6]{3}}$ đạt tại $a=b=c=1$.

Bài 32. Cho a,b,c là các số thực không âm thoả mãn điều kiện $a^2+b^2+c^2=2$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{a}{a^2+b+c}+\frac{b}{b^2+c+a}-\frac{a+b-2ab}{(a+b+c)^2}.$$

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức C –S ta có $\left(a^2+b+c\right)(1+b+c)\ge(a+b+c)^2$

$$\Rightarrow \frac{a}{a^2+b+c}\le\frac{a(1+b+c)}{(a+b+c)^2}.$$

Tương tự ta có $\dfrac{b}{b^2+c+a}\le\dfrac{b(1+c+a)}{(a+b+c)^2}$.

Từ đó suy ra $P\le\dfrac{a(b+c)+b(c+a)+2ab}{(a+b+c)^2}\le 1$.

Bởi vì $2+2bc=a^2+(b+c)^2\ge 2a(b+c)\Rightarrow a(b+c)\le 1+bc$

$$2+2ca=b^2+(c+a)^2\ge 2b(c+a)\Rightarrow b(c+a)\le 1+ca$$

$$\Rightarrow a(b+c)+b(c+a)+2ab\le 2+c(a+b)+2ab$$

$$=a^2+b^2+c^2+c(a+b)+2ab\le(a+b+c)^2$$

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng 1 đạt tại $a=b=1,c=0$.

Bài tập tương tự

Cho a,b,c là các số thực dương có tổng bằng 3. Chứng minh

$$\frac{1}{a^2+b+c}+\frac{1}{b^2+c+a}+\frac{1}{c^2+a+b}\le 1.$$

Bài 33. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện

$$(a+5b+3c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{4b}+\frac{1}{3c}\right)=\frac{39}{4}.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{2(a+3c)(a+3c-4b)-7c^2+4c\sqrt{a^2+7c^2}}{2ac}$.

Lời giải

Theo giả thiết ta có

$$\frac{39}{4}=\left(a+4b+3c\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{4b}+\frac{1}{3c}\right)+b\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{4b}+\frac{1}{3c}\right)\geq 9+b\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{4b}+\frac{1}{3c}\right).$$

$\Rightarrow 3ac\geq 2b\left(a+3c\right)$

Chú ý. AM – GM ta có $\left(a+4b+3c\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{4b}+\frac{1}{3c}\right)\geq 9$.

Khi đó

$$P=\frac{2\left(a+3c\right)^2-8b\left(a+3c\right)-7c^2+4c\sqrt{a^2+7c^2}}{2ac}$$

$$\geq\frac{2\left(a+3c\right)^2-12ac-7c^2+4c\sqrt{a^2+7c^2}}{2ac}=\frac{2a^2+11c^2+4c\sqrt{a^2+7c^2}}{2ac}$$

$$=\frac{2x^2+11+4\sqrt{x^2+7}}{2x},x=\frac{a}{c}$$

Xét hàm số $f(x)=\frac{2x^2+11+4\sqrt{x^2+7}}{2x}$ với x dương ta có

$$f'(x)=\frac{\left(2x^2-11\right)\sqrt{x^2+7}-28}{2x^2\sqrt{x^2+7}};f'(x)=0\Leftrightarrow x=3.$$

Ta có f'(x) đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua x=3 nên $f(x)\geq f(3)=\frac{15}{2}$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=4b=3c$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\frac{15}{2}$.

Bài tập tương tự

1) Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện

$$\left(a+3b+c\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{c}\right)=\frac{21}{2}.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{a^2+\left(a+c\right)\left(a+c-2b\right)+\sqrt{2a^2+2c^2}}{ac}$.

ĐS: $P_{\min}=5;a=2b=c$.

2) Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện

$$\left(3a+2b+c\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}\right)=30.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{b+2c-7\sqrt{72a^2+c^2}}{a}$.

ĐS: $P_{\max}=-55; 2a=3b=6c$.

Bài 34. Cho x,y,z là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện

$$\sqrt{x^2+y^2+2x+2y+1}+z=3.$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=x^4+y^4+z^4$.

Lời giải

Trước hết ta chứng minh: $\sqrt{x^2+y^2+2x+2y+1}\ge 1+\sqrt{x^2+y^2}$.

Thật vậy bất đẳng thức tương đương với:

$x^2+y^2+2x+2y+1\ge 1+x^2+y^2+2\sqrt{x^2+y^2}$.

$\Leftrightarrow x+y\ge\sqrt{x^2+y^2}\Leftrightarrow xy\ge 0$, bất đẳng thức luôn đúng.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $xy=0$.

Suy ra $3-z\ge 1+\sqrt{x^2+y^2}\Leftrightarrow\sqrt{x^2+y^2}\le 2-z\Leftrightarrow x^2+y^2\le(2-z)^2$ và $0\le z\le 2$.

$P=x^4+y^4+z^4=\left(x^2+y^2\right)^2+z^4-2x^2y^2\le\left(x^2+y^2\right)^2+z^4\le(2-z)^4+z^4$.

Xét hàm số $f(z)=(2-z)^4+z^4$, ta có $f'(z)=4\left(z^3-(2-z)^3\right)=0\Leftrightarrow z=1$.

Ta có $f(0)=16, f(1)=2, f(2)=16$.

Suy ra $P\le f(z)\le 16$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}xy=0\\ \left[\begin{array}{l}z=2\\ z=0\end{array}\right.\\ \sqrt{x^2+y^2+2x+2y+1}+z=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\ y=0\\ z=2\end{cases}$ hoặc các hoán vị.

Vậy P lớn nhất bằng 16 khi và chỉ khi $(x,y,z)=(0,0,2)$ và các hoán vị.

Bài 35. Cho a,b,c là các số thực thỏa mãn điều kiện $abc=1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{\sqrt{5}-3}{3}.\frac{1}{(a^2-a+1)(b^2-b+1)}+\frac{1}{c^2-c+1}.$$

Lời giải

Ta chứng minh với mọi số thực a và b ta luôn có

$$3\left(1-a+a^2\right)\left(1-b+b^2\right)\ge 2\left(1-ab+a^2b^2\right).$$

Chứng minh. Viết lại bất đẳng thức dưới dạng:

$$\left(a^2-3a+3\right)b^2-\left(3a^2-5a+3\right)b+3a^2-3a+1\geq 0.$$

Vế trái là tam thức bậc hai của b có $a^2-3a+3>0,\forall a\in\mathbb{R}$ và;

$$\Delta_b=\left(3a^2-5a+3\right)^2-4\left(a^2-3a+3\right)\left(3a^2-3a+1\right)=-\left(a^2-3a+1\right)^2\leq 0,\forall a\in\mathbb{R}.$$

Do đó vế trái luôn không âm và bài toán được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}a^2-3a+1=0\\ b=\dfrac{3a^2-5a+3}{2\left(a^2-3a+3\right)}\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\\ b=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\end{cases}\\ \begin{cases}a=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\\ b=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\end{cases}\end{array}\right.$.

Khi đó $\left(a^2-a+1\right)\left(b^2-b+1\right)\geq\dfrac{2}{3}\left(a^2b^2-ab+1\right)=\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{c^2}-\dfrac{1}{c}+1\right)=2.\dfrac{c^2-c+1}{3c^2}$.

Suy ra $P\leq\dfrac{1}{c^2-c+1}+2k.\dfrac{1}{2.\dfrac{c^2-c+1}{3c^2}}=\dfrac{3kc^2+1}{c^2-c+1}$ với $k=\dfrac{\sqrt{5}-3}{6}$.

Xét hàm số $f(c)=\dfrac{3kc^2+1}{c^2-c+1}$ với $c>0$ ta có

$$f'(c)=\frac{-3kc^2+(6k-2)c+1}{\left(c^2-c+1\right)^2};\ f'(c)=0\Leftrightarrow -3kc^2+(6k-2)c+1=0.$$

$\Leftrightarrow c=\dfrac{7+3\sqrt{5}}{2}$ hoặc $c=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Bảng biến thiên:

c	0		$\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$		$\dfrac{7+3\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
$f'(c)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(c)$	1	↗	$\sqrt{5}-1$	↘	$\dfrac{1-\sqrt{5}}{3}$	↗	$\dfrac{\sqrt{5}-3}{2}$

Dựa vào bảng biến thiên suy ra $P \geq f(c) \geq f\left(\frac{7+3\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{1-\sqrt{5}}{3}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = \frac{3-\sqrt{5}}{2}, c = \frac{7+3\sqrt{5}}{2}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\frac{1-\sqrt{5}}{3}$ đạt tại $a = b = \frac{3-\sqrt{5}}{2}, c = \frac{7+3\sqrt{5}}{2}$.

Bài 36. Cho *x,y,z* là các số thực dương thỏa mãn điều kiện

$$(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 = 2.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = (x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) - \frac{2(x+y+z-1)}{3xyz}.$$

Lời giải

Không mất tính tổng quát giả sử $x = max\{x, y, z\}$. Đặt $y + z = 2t \Rightarrow x \geq t$.

Theo giả thiết ta có $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = 1$.

$\Leftrightarrow (x+y+z)^2 = 1 + 3(xy+yz+zx)$ (1).

Khi đó $P = (x+y+z).\frac{xy+yz+zx}{xyz} - \frac{2(x+y+z-1)}{3xyz}$

$$= \frac{(x+y+z)\left((x+y+z)^2-1\right) - 2(x+y+z-1)}{3xyz}$$

$$= \frac{(x+y+z)^3 - 3(x+y+z) + 2}{3xyz}$$

Và (1) $\Rightarrow x^2 + (y+z)^2 - x(y+z) - 3yz = 1$.

$\Leftrightarrow 3yz = x^2 + 4t^2 - 2tx - 1$.

Suy ra $P = \frac{(x+2t)^3 - 3(x+2t) + 2}{x\left(x^2+4t^2-2tx-1\right)} = \frac{x^3 + 6tx^2 + \left(12t^2-3\right)x + 8t^3 - 6t + 2}{x\left(x^2 - 2tx + 4t^2 - 1\right)}$.

Mặt khác ta có:

$$2 = (x-y)^2 + (x-z)^2 + (y-z)^2 \geq (x-y)^2 + (x-z)^2 \geq \frac{1}{2}(2x-y-z)^2.$$

$\Rightarrow (2x-y-z)^2 \leq 4 \Leftrightarrow 2x - y - z \leq 2 \Leftrightarrow x \leq t+1$.

Ta chứng minh $P \geq 9$.

Thật vậy bất đẳng thức tương đương với

$$\frac{x^3+6tx^2+\left(12t^2-3\right)x+8t^3-6t+2}{x\left(x^2-2tx+4t^2-1\right)}\geq 9$$

$$\Leftrightarrow x^3+6tx^2+\left(12t^2-3\right)x+8t^3-6t+2\geq 9x\left(x^2-2tx+4t^2-1\right)$$

$$\Leftrightarrow 8x^3-24x^2t+24xt^2-8t^3-6\left(x-t\right)-2\leq 0.$$

$\Leftrightarrow 4\left(x-t\right)^3-3\left(x-t\right)-1\leq 0\Leftrightarrow \left(x-t-1\right)\left[2\left(x-t\right)+1\right]^2\leq 0$ (luôn đúng vì $x\leq t+1$).

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} y=z \\ x=t+1=\dfrac{y+z}{2}+1 \\ \left(x-y\right)^2+\left(y-z\right)^2+\left(z-x\right)^2=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=z=1 \end{cases}.$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 9 đạt tại $\left(x;y;z\right)=\left(2;1;1\right)$ hoặc các hoán vị.

Cách 2: Ta chứng minh $P\geq 9$.

Viết lại bất đẳng thức dưới dạng:

$$\left(x+y+z\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)-\frac{2\left(x+y+z-1\right)}{3xyz}\geq 9$$

$$\Leftrightarrow 3\left(x+y+z\right)\left(xy+yz+z\right)+2-27xyz-2\left(x+y+z\right)\geq 0$$

$$\Leftrightarrow 3\left[\left(x+y+z\right)\left(xy+yz+zx\right)-9xyz\right]+2-2\left(x+y+z\right)\geq 0$$

$$\Leftrightarrow 3\left[x^2\left(y+z\right)+y^2\left(z+x\right)+z^2\left(x+y\right)-6xyz\right]+2-2\left(x+y+z\right)\geq 0$$

$$\Leftrightarrow 3\left[x^2\left(y+z\right)+y^2\left(z+x\right)+z^2\left(x+y\right)-6xyz\right]+$$

$$+2-\left(x+y+z\right)\left[\left(x-y\right)^2+\left(y-z\right)^2+\left(z-x\right)^2\right]\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(2z-x-y\right)\left(x-y\right)^2+\left(2x-z-y\right)\left(z-y\right)^2+\left(2y-x-z\right)\left(x-z\right)^2+2\geq 0$$

Đặt $a=x-y;b=y-z;c=z-x\Rightarrow \begin{cases} a+b+c=0 \\ a^2+b^2+c^2=2 \end{cases}.$

Ta cần chứng minh $\left(c-b\right)a^2+\left(b-a\right)c^2+\left(a-c\right)b^2+2\geq 0$.

$$\Leftrightarrow M=\left(a-b\right)\left(b-c\right)\left(a-c\right)\leq 2.$$

Ta có $M^2=\left(a-b\right)^2\left(b-c\right)^2\left(c-a\right)^2$.

Trong 3 số a,b,c luôn có hai số cùng dấu không mất tính tổng quát giả sử hai số đó là a và b, khi đó $ab\geq 0$.

Và điều kiện trở thành: $a^2+b^2+(a+b)^2=2$

$\Leftrightarrow a^2+ab+b^2=1$.

Khi đó

$$M^2=(a-b)^2(2a+b)^2(2b+a)^2=(1-3ab)(2+3ab)^2$$

$$=4.(1-3ab).\frac{2+3ab}{2}.\frac{2+3ab}{2}\le 4\left(\frac{1-3ab+2+3ab}{3}\right)^3=4$$

Suy ra $M\le 2$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$ab=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=0\\b=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-y=0\\y-z=0\end{array}\right..$$

$\Rightarrow (x;y;z)=(1;1;2);(2;1;1)$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 9 đạt tại $(x;y;z)=(2;1;1)$ hoặc các hoán vị.

Chương 4:

SỐ PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC KHÁC

CHỦ ĐỀ 1: KỸ THUẬT LƯỢNG GIÁC HÓA

Trong chủ đề này tôi đề cập đến một số phép lượng giác hoá cơ bản và một số bất đẳng thức trong tam giác và ứng dụng. Một chú ý là các bài toán trình bày trong chủ đề được giải bằng phương pháp lượng giác hoá có thể được giải bằng phương pháp đại số thông thường.

A. NỘI DUNG PHƯƠNG PHÁP

1. Các phép lượng giác hoá cơ bản

Nếu $|x| \le R$ thì đặt x = Rcosα , $\alpha \in [0;\pi]$; hoặc x = Rsinα, $\alpha \in \left[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

Nếu $|x| \ge R$ thì đặt x = $\frac{R}{\cos\alpha}$ $\quad \alpha \in [0,c) \cup \left[\pi, 3\frac{\pi}{2}\right)$.

Nếu $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$, $(\sqrt{>0})$ thì đặt $\begin{cases} x = a + R\cos\alpha \\ y = b + R\sin\alpha \end{cases}$, $(\alpha = 2\pi)$.

Nếu $\left(\frac{x-\alpha}{a}\right)^2 + \left(\frac{y-\beta}{b}\right)^2 = R^2,\ a,b > 0$ thì đặt $\begin{cases} x = \alpha + aR\cos\alpha \\ y = \beta + bR\sin\alpha \end{cases}$, $(\alpha = 2\pi)$.

Nếu trong bài toán xuất hiện $(ax)^2 + b^2,\ (a,b > 0)$ đặt $x = \frac{b}{a}tg\alpha,\ \alpha \in \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

Ví dụ 1. Cho bốn số thực x, y, u, v thoả mãn điều kiện $x^2 + y^2 = u^2 + v^2 = 1$.

Chứng minh rằng $-\sqrt{2} \le u(x-y) + v(x+y) \le \sqrt{2}$.

Lời giải

Đặt $x = \cos a, y = \sin a; u = \cos b, v = \sin b$.

Ta có $u(x-y) + v(x+y) = cosb(cosa - sina) + sinb(cosa + sina)$

$$= cos(a-b) + sin(b-a)$$

$$= \sqrt{2}\cos\left(b - a - \frac{\pi}{4}\right) \in \left[-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right]$$

Bất đẳng thức được chứng minh.

Ví dụ 2. Chứng minh rằng với mọi số thực a,b thuộc đoạn [-1;1] ta có

$$\left|a\sqrt{1-b^2}+b\sqrt{1-a^2}+\sqrt{3}\left(ab-\sqrt{\left(1-b^2\right)\left(1-a^2\right)}\right)\right|\le 2.$$

Lời giải

Do $|a|\le 1,\ |b|\le 1$ nên ta đặt: $\begin{cases} a=\cos\alpha \\ b=\cos\beta \end{cases} \quad \left(\alpha,\beta\in[0,\pi]\right)$

Khi đó : $a\sqrt{1-b^2}+b\sqrt{1-a^2}+\sqrt{3}\left(ab-\sqrt{\left(1-b^2\right)\left(1-a^2\right)}\right)$

$$=\cos\alpha.\sin\beta+\cos\beta.\sin\alpha+\sqrt{3}\left(\cos\alpha.\cos\beta-\sin\alpha.\sin\beta\right)$$

$$=\sin(\alpha+\beta)+\sqrt{3}.\cos(\alpha+\beta)=2\cos(\alpha+\beta-\frac{\pi}{6})$$

$$\Rightarrow\left|a\sqrt{1-b^2}+b\sqrt{1-a^2}+\sqrt{3}\left[ab-\sqrt{\left(1-b^2\right)\left(1-a^2\right)}\right]\right|\le 2$$

Bất đẳng thức được chứng minh.

Bài tập tương tự

1) Chứng minh rằng với mọi số thực x,y thuộc đoạn $\left[-2;2\right]$ ta có

$$x\sqrt{4-y^2}+y\sqrt{4-x^2}\le 4.$$

2) Cho $a,b\ge 1$. Chứng minh rằng : $a\sqrt{b-1}+b\sqrt{a-1}\le ab$.

Ví dụ 3. Cho a,b là hai số thực thoả mãn điều kiện $ab\ne 0$.

Chứng minh rằng $-2\sqrt{2}-2\le\dfrac{a^2-(a-4b)^2}{a^2+4b^2}\le 2\sqrt{2}-2$.

Lời giải

Đặt $a=2btg\alpha,\quad \alpha\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ khi đó

$$\frac{a^2-(a-4b)^2}{a^2+4b^2}=\frac{tg^2\alpha-(tg\alpha-2)^2}{1+tg^2\alpha}=4(tg\alpha-1).\cos^2\alpha$$

$$=2\sin 2\alpha-2(1+\cos 2\alpha)=2(\sin 2\alpha-\cos 2\alpha)-2$$

$$=2\sqrt{2}\sin(2\alpha-\frac{\pi}{2})-2\in\left[-2\sqrt{2}-2,2\sqrt{2}-2\right]$$

Bất đẳng thức được chứng minh.

Bài tập tương tự

Cho x,y là các số thực chứng minh rằng $-\frac{1}{2} \le \frac{(x-y)(1+xy)}{(1+x^2)(1+y^2)} \le \frac{1}{2}$.

Ví dụ 4. Cho a,b,x,y,z là các số thực dương có $a+b=1$.

Chứng minh rằng $(x+y)^3(y+z)^3 \ge 64abxy^2z(ax+y+bz)^2$.

Lời giải

Các đẳng thức và bất đẳng thức trong tam giác

$\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

$\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=2(1+\cos A\cos B\cos C)$

$\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A\sin B\sin C$

$\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$

$1=\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}$

$1=\cot A\cot B+\cot B\cot C+\cot C\cot A$

$1=\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 B+2\cos A\cos B\cos C$

Một số phép lượng giác hoá đưa về chứng minh bất đẳng thức trong tam giác

\+ Nếu a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=abc$ khi đó tồn tại ba góc một tam giác sao cho $a=\tan A, b=\tan B, c=\tan C$.

\+ Nếu a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $ab+bc+ca=1$ khi đó tồn tại ba góc một tam giác sao cho $a=\tan\frac{A}{2}, b=\tan\frac{B}{2}, c=\tan\frac{C}{2}$.

\+ Nếu a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $a^2+b^2+c^2+2abc=1$ khi đó tồn tại ba góc nhọn của một tam giác sao cho $a=\cos A, b=\cos B, c=\cos C$.

Đẳng thức quen thuộc:

$$(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)=(ab+bc+ca-1)^2+(a+b+c-abc)^2.$$

Bài toán 1. Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC ta có

$$\cos A+\cos B+\cos C \le \frac{3}{2}.$$

Chứng minh.

$VT=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}-2\cos^2\frac{A+B}{2}+1.$

Do A,B,C là các góc của tam giác nên $1>\cos\frac{A+B}{2}>0; 0\le\cos\frac{A-B}{2}\le 1$.

Do đó, $VT \le -2\cos^2\frac{A+B}{2}+2\cos\frac{A+B}{2}+1=\frac{3}{2}-2\left(\cos\frac{A+B}{2}-\frac{1}{2}\right)^2 \le \frac{3}{2}$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi tam giác đều.

Tổng quát với *x,y,z* là các số thực dương và *A,B,C* là các góc của một tam giác ta có $\frac{\cos A}{x}+\frac{\cos B}{y}+\frac{\cos C}{z} \le \frac{x^2+y^2+z^2}{2xyz}$.

Chứng minh.

Bất đẳng thức tương đương với:

$$2yz\cos A+2zx\cos B+2xy\cos C \le x^2+y^2+z^2$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+2yz\cos\left(B+C\right)-2zx\cos B-2xy\cos C \ge 0$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+2yz\cos B\cos C-2yz\sin B\sin C-2zx\cos B-2xy\cos C \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x-z\cos B-y\cos C\right)^2+\left(z\sin B-\text{y}\sin\text{C}\right)^2 \ge 0.$$

Bất đẳng thức được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{\sin A}{x}=\frac{\sin B}{y}=\frac{\sin C}{z}$.

Ví dụ 1. Cho a,b,c là độ dài ba cạnh một tam giác và x,y,z là các số thực thoả mãn

$$\begin{cases} cy+bz=a \\ az+cx=b \\ bx+ay=c \end{cases}.$$

Chứng minh rằng $x+y+z \le \frac{3}{2}$.

Lời giải

Dễ tính được

$$x=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc};\ y=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca};\ z=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.$$

Bài toán đưa về chứng minh $\cos A+\cos B+\cos C \le \frac{3}{2}$.

Bất đẳng thức luôn đúng đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$x=y=z=\frac{1}{2};a=b=c.$$

Cách 2: Từ giả thiết ta có:

$$\begin{cases} \dfrac{c}{a}y+\dfrac{b}{a}x=1 \\ \dfrac{a}{b}z+\dfrac{c}{b}x=1 \\ \dfrac{b}{c}x+\dfrac{a}{c}y=1 \end{cases}$$

Cộng theo vế ba phương trình trên ta được: $x(\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{b})+y(\dfrac{a}{c}+\dfrac{c}{a})+z(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a})=3$.

Sử dụng AM-GM ta có ngay đpcm.

Ví dụ 2. Cho a, b, c là các số thực khác 0 và $c>b$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\dfrac{bc+a^2-b\sqrt{a^2+c^2}+c\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a^2+c^2}}$.

Lời giải

$$P=\frac{bc+a^2}{\sqrt{(a^2+c^2)(a^2+b^2)}}+\frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}}$$
$$=\frac{bc+a^2}{\sqrt{(a^2+c^2)(a^2+b^2)}}+\frac{-b(c-b)}{(c-b)\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{c(c-b)}{(c-b)\sqrt{a^2+c^2}}$$

Vì 3 số a,b,c khác O nên trong hệ trục tọa độ Oxy chọn 3 điểm $A(0;a);B(b;0);C(c;0),b<c$ là ba đỉnh một tam giác.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(b;-a);\overrightarrow{AC}=(c;-a);\overrightarrow{BC}=(c-b;0)$.

Xét tam giác ABC có

$$\cos A=\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=\frac{bc+a^2}{\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}};$$

$$\cos B=\cos(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC})=\frac{-b(c-b)}{|c-b|\sqrt{a^2+b^2}};$$

$$\cos C=\cos(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})=\frac{c(c-b)}{|c-b|\sqrt{a^2+c^2}};$$

$$\Rightarrow P=\cos A+\cos B+\cos C\le\frac{3}{2}.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng $\frac{3}{2}$ khi đó $c > 0; b = -c; a = \pm\sqrt{3}c$.

Ví dụ 3. Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c = abc$.

Chứng minh rằng $\frac{1}{2\sqrt{a^2+1}} + \frac{1}{3\sqrt{b^2+1}} + \frac{1}{4\sqrt{c^2+1}} \le \frac{29}{48}$.

Lời giải

Theo giả thiết tồn tại 3 góc nhọn của một tam giác thỏa mãn

$a = \tan A, b = \tan B, c = \tan C$.

Khi đó:

$$\frac{1}{2\sqrt{a^2+1}} = \frac{1}{2\sqrt{\tan^2 A+1}} = \frac{\cos A}{2}$$

$$\frac{1}{3\sqrt{b^2+1}} = \frac{1}{3\sqrt{\tan^2 B+1}} = \frac{\cos B}{3}$$

$$\frac{1}{4\sqrt{c^2+1}} = \frac{1}{4\sqrt{\tan^2 C+1}} = \frac{\cos C}{4}$$

Ta cần chứng minh: $\frac{\cos A}{2} + \frac{\cos B}{3} + \frac{\cos C}{4} \le \frac{29}{48}$

Bất đẳng thức này luôn đúng bởi vì

$$\frac{\cos A}{2} + \frac{\cos B}{3} + \frac{\cos C}{4} \le \frac{2^2+3^2+4^2}{2.2.3.4} = \frac{29}{48}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: $\frac{\sin A}{2} = \frac{\sin B}{3} = \frac{\sin C}{4}$

$$\Leftrightarrow \frac{\tan A}{2\sqrt{\tan^2 A+1}} = \frac{\tan B}{3\sqrt{\tan^2 B+1}} = \frac{\tan C}{4\sqrt{\tan^2 C+1}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{2\sqrt{a^2+1}} = \frac{b}{3\sqrt{b^2+1}} = \frac{c}{4\sqrt{c^2+1}}$$

Ví dụ 4. Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{3a} + \frac{1}{2b} + \frac{1}{c} = 6$

Chứng minh rằng $\frac{3}{2} \ge \sqrt{\frac{a}{a+4bc}} + \sqrt{\frac{b}{b+9ca}} + \sqrt{\frac{c}{c+36ab}}$.

Lời giải

Phân tích biểu thức vế phải trước

$$VP=\sqrt{\frac{1}{1+\frac{4bc}{a}}}+\sqrt{\frac{1}{1+\frac{9ca}{b}}}+\sqrt{\frac{1}{1+\frac{36ab}{c}}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+\left(2\sqrt{\frac{bc}{a}}\right)^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+\left(3\sqrt{\frac{ca}{b}}\right)^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+\left(6\sqrt{\frac{ab}{c}}\right)^2}}$$

Đặt $x=2\sqrt{\frac{bc}{a}},y=3\sqrt{\frac{ca}{b}},z=6\sqrt{\frac{ab}{c}}\Rightarrow xy=6c;yz=18a;zx=12b$.

Theo giả thiết ta có:

$$\frac{1}{3a}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{c}=6\Leftrightarrow\frac{1}{18a}+\frac{1}{12b}+\frac{1}{6c}=1$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}+\frac{1}{xy}=1\Leftrightarrow x+y+z=xyz$$

Cho ta thấy dấu hiệu của lượng giác hoá vậy tồn tại ba góc một tam giác sao cho $x=\tan A,y=\tan B,z=\tan C$.

Ta cần chứng minh

$$\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 A}}+\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 B}}+\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 C}}\le\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow\cos A+\cos B+\cos C\le\frac{3}{2}$$

Bất đẳng thức cuối đúng và ta có điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}2\sqrt{\frac{bc}{a}}=\sqrt{3}\\3\sqrt{\frac{ca}{b}}=\sqrt{3}\\6\sqrt{\frac{ab}{c}}=\sqrt{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}bc=\frac{3}{4}a\\ca=\frac{1}{3}b\\ab=\frac{1}{12}c\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1/6\\b=1/4\\c=1/2\end{cases}$.

Bài tập tương tự

Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện $\frac{1}{a}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{3c}=6$.

Chứng minh rằng $\frac{a}{a+36bc}.\frac{b}{b+9ca}.\sqrt{\frac{c}{c+4ab}}\le\frac{1}{27}$.

Bài toán 2. Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC ta có

$$\cos A+\cos B+\sin C\le \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Chứng minh.

$$\cos A+\cos B+\sin C=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+\sin C$$

$$\le 2\cos\frac{A+B}{2}+\sin C=2\sin\frac{C}{2}\left(1+\cos\frac{C}{2}\right)$$

$$=2\sqrt{\left(1-\cos^2\frac{C}{2}\right)\left(1+\cos\frac{C}{2}\right)^2}=2\sqrt{\left(1-\cos\frac{C}{2}\right)\left(1+\cos\frac{C}{2}\right)^3}$$

Chú ý sử dụng bất đẳng thức AM – GM ta có

$$3\left(1-\cos\frac{C}{2}\right)\left(1+\cos\frac{C}{2}\right)^3\le\left(\frac{3\left(1-\cos\frac{C}{2}\right)+3\left(1+\cos\frac{C}{2}\right)}{4}\right)^4=\left(\frac{3}{2}\right)^4$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{\left(1-\cos\frac{C}{2}\right)\left(1+\cos\frac{C}{2}\right)^3}\le\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Bất đẳng thức được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $A=B=\frac{\pi}{6},C=\frac{2\pi}{3}$.

Ví dụ 1. Cho a,b,c là các số thực dương có tổng bằng 1. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{a+bc}+\frac{b}{b+ca}+\frac{\sqrt{abc}}{c+ab}\le 1+\frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

Lời giải

Gọi P là biểu thức vế trái của bất đẳng thức.

Ta có $P=\frac{1}{1+\sqrt{\frac{bc}{a}}}+\frac{1}{1+\sqrt{\frac{ca}{b}}}+\frac{\sqrt{\frac{ab}{c}}}{1+\sqrt{\frac{ab}{c}}}$.

Chú ý theo giả thiết ta có

$$a+b+c=\sqrt{\frac{ab}{c}}.\sqrt{\frac{ca}{b}}+\sqrt{\frac{ab}{c}}.\sqrt{\frac{bc}{a}}+\sqrt{\frac{bc}{a}}.\sqrt{\frac{ca}{b}}=1.$$

Suy ra tồn tại 3 góc một tam giác sao cho

$$\sqrt{\frac{bc}{a}}=\tan\frac{A}{2},\sqrt{\frac{ca}{b}}=\tan\frac{B}{2},\sqrt{\frac{ab}{c}}=\tan\frac{C}{2}.$$

Khi đó $P=\dfrac{1}{1+\tan^2\frac{A}{2}}+\dfrac{1}{1+\tan^2\frac{B}{2}}+\dfrac{\tan\frac{C}{2}}{1+\tan^2\frac{C}{2}}$

$$=\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}+\frac{1}{2}\sin C$$

$$=1+\frac{1}{2}\left(\cos A+\cos B+\sin C\right)\le 1+\frac{3\sqrt{2}}{4}$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$a=b=2\sqrt{3}-3,c=7-4\sqrt{3}$.

Bằng cách chứng minh tương tự các bất đẳng thức trên ta chứng minh được

Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC ta có

$\sin A+\sin B+\sin C\le\dfrac{3\sqrt{3}}{2};$

$\cos A.\cos B.\cos C\le\dfrac{1}{8}\le\sin\dfrac{A}{2}.\sin\dfrac{B}{2}.\sin\dfrac{C}{2}$

$\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C\ge\dfrac{3}{4};$

$\sin A+\sin B-\cos C\le\dfrac{3}{2};$

$\sqrt{3}\cos A-\sin B+\sqrt{3}\sin C\le\dfrac{5}{2};$

$\sin 2A+\sin 2B+\cos 2C\le\dfrac{3}{2};$

$\cos 2A+\sqrt{3}\left(\cos 2B+\cos 2C\right)\ge-\dfrac{5}{2}$

Bài toán 3. Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC ta có

$$\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C+2\cos A.\cos B.\cos C=1.$$

Chứng minh.

Đẳng thức đã cho tương đương với:

$\cos^2 B+\cos^2 C+2\cos A.\cos B.\cos C=\sin^2 A$

$\Leftrightarrow \left(\cos B+\cos C\right)^2-2\cos B.\cos C+2\cos A.\cos B.\cos C=\sin^2 A$

$\Leftrightarrow 4\cos^2\dfrac{B+C}{2}\cos^2\dfrac{B-C}{2}-4\cos B\cos C\sin^2\dfrac{A}{2}=4\sin^2\dfrac{A}{2}\cos^2\dfrac{A}{2}$

$\Leftrightarrow \cos^2\dfrac{B-C}{2}-\cos B\cos C=\cos^2\dfrac{A}{2}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1+\cos(B-C)}{2}-\cos B.\cos C=\dfrac{1+\cos A}{2}$

$\Leftrightarrow \cos(B-C)-2\cos B.\cos C=\cos A$

$\Leftrightarrow \cos(B-C)+\cos(B+C)-2\cos B.\cos C=0$

Đẳng thức cuối đúng và ta có đpcm.

Như vậy với các số thực dương x,y,z thoả mãn điều kiện

$x^2+y^2+z^2+2xyz=1$.

Khi đó tồn tại ba góc nhọn trong một tam giác sao cho

$x=\cos A; y=\cos B; z=\cos C$.

Thật vậy ta luôn có

$\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C+2\cos A.\cos B.\cos C=1$

$\Leftrightarrow \cos\dfrac{A+B+C}{2}.\cos\dfrac{A+B-C}{2}.\cos\dfrac{B+C-A}{2}.\cos\dfrac{C+A-B}{2}=0$

Với $A,B,C\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ thì $A+B+C=\pi$.

Ví dụ 1. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện

$$\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}+\frac{1}{c^2+1}=2 .$$

Chứng minh rằng $ab+bc+ca\le\dfrac{3}{2}$.

Lời giải

Giả thiết bài toán tương đương với:

$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2a^2b^2c^2=1\Rightarrow ab,bc,ca\in\left(0;1\right)$.

Do đó tồn tại ba góc nhọn trong một tam giác thoả mãn:

$ab=\cos A, bc=\cos B, ca=\cos C$.

Bất đẳng thức trở thành: $\cos A+\cos B+\cos C\le\dfrac{3}{2}$.

Bất đẳng thức cuối luôn đúng và ta có đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Ví dụ 2. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện $a+b+c+1=4abc$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\frac{\sqrt{4bc-1}}{bc}+\frac{\sqrt{4ca-1}}{ca}+\frac{1}{ab}$.

Lời giải

Giả thiết bài toán tương đương với $\frac{1}{4bc}+\frac{1}{4ca}+\frac{1}{4ab}+2.\frac{1}{8abc}=1$.

Do đó tồn tại ba góc nhọn trong một tam giác thoả mãn:

$\frac{1}{\sqrt{bc}}=2\cos A;\frac{1}{\sqrt{ca}}=2\cos B;\frac{1}{\sqrt{ab}}=2\cos C$.

Khi đó

$$P=4\cos^2 A\sqrt{\frac{1}{\cos^2 A}-1}+4\cos^2 B\sqrt{\frac{1}{\cos^2 B}-1}+4\cos^2 C$$
$$=2\sin 2A+2\sin 2B-4\sin^2 C+4$$
$$=4\sin(A+B)\cos(A-B)-4\sin^2 C+4$$
$$\le 4\sin C-4\sin^2 C+4=-\left(2\sin C-1\right)^2+5\le 5$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} C=\frac{\pi}{6} \\ A=B=\frac{5\pi}{12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b=\frac{\sqrt{3}}{3} \\ c=2\sqrt{3}+3 \end{cases}$.

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng 5 đạt tại $a=b=\frac{\sqrt{3}}{3},c=2\sqrt{3}+3$.

Ví dụ 3. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện $abc=a+b+c+2$.

Chứng minh rằng $2\left(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\right)\le 4+abc$.

Lời giải

Giả thiết bài toán tương đương với:

$\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}+\frac{1}{ab}+2.\frac{1}{abc}=1$.

Do đó tồn tại ba góc nhọn một tam giác sao cho

$\frac{1}{\sqrt{bc}}=\cos A,\frac{1}{\sqrt{ca}}=\cos B,\frac{1}{\sqrt{ab}}=\cos C$.

Ta cần chứng minh $2\left(\frac{1}{\cos A}+\frac{1}{\cos B}+\frac{1}{\cos C}\right)\le 4+\frac{1}{\cos A.\cos B.\cos C}$

$\Leftrightarrow 2(\cos A.\cos B + \cos B.\cos C + \cos C.\cos A) \le 4\cos A.\cos B.\cos C + 1$.

Để chứng minh bất đẳng thức cuối ta chứng minh như sau

$2\cos A.\cos B = \sqrt{\sin 2A.\cot A.\sin 2B.\cot B} \le \frac{1}{2}(\sin 2A.\cot B + \sin 2B.\cot A)$

$2\cos B.\cos C \le \frac{1}{2}(\sin 2B.\cot C + \sin 2C.\cot B)$

$2\cos C.\cos A \le \frac{1}{2}(\sin 2C.\cot A + \sin 2A.\cot C)$

Cộng lại thế vế và khai triển vế phải ta có ngay điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $A = B = C \Leftrightarrow a = b = c = 2$.

Bài tập tương tự

Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện $ab + bc + ca + abc = 4$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = ab + bc + ca + \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}$.

Ví dụ 4. Cho a,b,c,x,y,z là các số thực dương thoả mãn điều kiện

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + xyz = 4abc.$$

Chứng minh rằng $a + b + c \ge x + y + z$.

Lời giải

Giả thiết đã cho tương đương với: $\frac{x^2}{4bc} + \frac{y^2}{4ca} + \frac{z^2}{4ab} + 2.\frac{xyz}{8abc} = 1$.

Do đó tồn tại ba góc một tam giác sao cho:

$$\frac{x}{2\sqrt{bc}} = \cos A; \frac{y}{2\sqrt{ca}} = \cos B; \frac{z}{2\sqrt{ab}} = \cos C.$$

Ta cần chứng minh $a + b + c \ge 2\sqrt{bc}\cos A + 2\sqrt{ca}\cos B + 2\sqrt{ab}\cos C$.

Bất đẳng thức cuối luôn đúng và ta có đpcm.

B. BÀI TẬP CHỌN LỌC

Bài 1. Cho x,y,z là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $xz + yz + 1 = xy$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{2x}{x^2+1} + \frac{2y}{y^2+1} + \frac{z^2-1}{z^2+1}$.

Lời giải

<u>TH1:</u> Nếu $xy = 1 \Rightarrow z = 0 \Rightarrow P = \frac{2xy(x+y) + 2x + 2y}{x^2y^2 + x^2 + y^2 + 1} - 1 = \frac{4x + 4y}{(x+y)^2} - 1 \le 1$.

<u>TH2:</u> Nếu $xy > 1 \Rightarrow z = \frac{xy-1}{x+y}$.

Đặt $x=\tan a, y=\tan b, z=\dfrac{xy-1}{x+y}=-\cot(a+b)$ với $a,b\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right), a+b>\dfrac{\pi}{2}$.

Khi đó : $P=\sin 2a+\sin 2b+\cos(2a+2b)=1-2\sin^2(a+b)+2\sin(a+b)\cos(a-b)$

$$\le 1-2\sin^2(a+b)+2\sin(a+b)=-2\left[\sin(a+b)-\frac{1}{2}\right]^2+\frac{3}{2}\le\frac{3}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} a=b \\ \sin(a+b)=\dfrac{1}{2} \\ a,b\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right), a+b>\dfrac{\pi}{2}\end{cases} \Leftrightarrow a=b=\dfrac{5\pi}{12}$

$$\Rightarrow x=y=\tan\frac{5\pi}{12}=2+\sqrt{3}, z=-\cot\frac{5\pi}{6}=\sqrt{3}$$

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng $\dfrac{3}{2}$ đạt tại $x=y=2+\sqrt{3}, z=\sqrt{3}$

Bài 2. Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $ab+bc+ca=1$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\dfrac{a}{1+a^2}+\dfrac{b}{1+b^2}+\dfrac{3c}{\sqrt{1+c^2}}$

Lời giải

Theo giả thiết tồn tại ba góc của một tam giác thỏa mãn

$$a=\tan\frac{A}{2}, b=\tan\frac{B}{2}, c=\tan\frac{C}{2}.$$

Khi đó:

$$\frac{a}{1+a^2}=\frac{\tan\frac{A}{2}}{1+\tan^2\frac{A}{2}}=\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}=\frac{1}{2}\sin A \text{ và } \frac{b}{1+b^2}=\frac{1}{2}\sin B; \frac{c}{\sqrt{1+c^2}}=\sin\frac{C}{2}.$$

Từ đó suy ra

$$P=\frac{1}{2}(\sin A+\sin B)+3\sin\frac{C}{2}=\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+3\sin\frac{C}{2}$$

$$=\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}+3\sin\frac{C}{2}\le\cos\frac{C}{2}+3\sin\frac{C}{2}\le\sqrt{(1+9)\left(\cos^2\frac{C}{2}+\sin^2\frac{C}{2}\right)}=\sqrt{10}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} \cos\dfrac{A-B}{2}=1 \\ \cos\dfrac{C}{2}=\dfrac{\sin\dfrac{C}{2}}{3} \end{cases}$

$\Leftrightarrow a=b=\sqrt{10}-3, c=3$.

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng 10 đạt tại $a=b=\sqrt{10}-3, c=3$.

<u>Cách 2:</u> Ta xử lý bằng đại số như sau

Sử dụng giả thiết $ab+bc+ca=1$ ta có:

$$\frac{a}{1+a^2}+\frac{b}{1+b^2}=\frac{a}{ab+bc+ca+a^2}+\frac{b}{ab+bc+ca+b^2}$$
$$=\frac{a}{(a+b)(a+c)}+\frac{b}{(b+a)(b+c)}=\frac{a(b+c)+b(c+a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$
$$=\frac{2ab+c(a+b)}{(a+b)(b+c)(c+a)}\le\frac{\sqrt{ab}(a+b)+c(a+b)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$
$$=\frac{c+\sqrt{ab}}{(c+a)(c+b)}\le\frac{1}{\sqrt{(c+a)(c+b)}}=\frac{1}{\sqrt{1+c^2}}$$

Do đó $P\le\dfrac{1}{\sqrt{1+c^2}}+\dfrac{3c}{\sqrt{1+c^2}}\le\sqrt{(1+9)\left(\dfrac{1}{1+c^2}+\dfrac{c^2}{1+c^2}\right)}=\sqrt{10}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=\sqrt{10}-3, c=3$.

Bài 3. Cho *x*,*y*,*z* là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $xyz+x+y=z$ và $z\ge 1$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=4\left(\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+y^2}\right)+\frac{z}{1+z^2}.$$

Lời giải

Theo giả thiết ta có: $xy+\dfrac{y}{z}+\dfrac{x}{z}=1$ nên tồn tại 3 góc của một tam giác sao cho:

$$x=\tan\frac{A}{2}, y=\tan\frac{B}{2}, \frac{1}{z}=\tan\frac{C}{2}.$$

Khi đó :

$$P=4\left(\frac{1}{1+\tan^2\frac{A}{2}}+\frac{1}{1+\tan^2\frac{B}{2}}\right)+\frac{\tan\frac{C}{2}}{1+\tan^2\frac{C}{2}}=4\left(\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}\right)+\frac{1}{2}\text{sinC}$$

$$=4+2\left(\cos A+\cos B\right)+\frac{1}{2}\text{sinC}=4+4\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+\frac{1}{2}\sin C$$

$$=4+4\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}+\frac{1}{2}\sin C\le 4+4\sin\frac{C}{2}+\frac{1}{2}\sin C$$

Mặt khác $z\ge 1\Rightarrow \tan\frac{C}{2}\le 1\Leftrightarrow \frac{C}{2}\le 45^0\Leftrightarrow C\le 90^0\Rightarrow P\le\frac{9+4\sqrt{2}}{2}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $z=1, x=y=\sqrt{2}-1$.

Bài 4. Cho x,y,z là các số thực dương thay đổi thỏa mãn điều kiện $xyz+x+z=y$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{2}{x^2+1}-\frac{2}{y^2+1}-\frac{4z}{\sqrt{z^2+1}}+\frac{3z}{\left(z^2+1\right)\sqrt{z^2+1}}.$$

Lời giải

Đặt $x=\tan A, y=\tan B, z=\tan C,\left(0<A,B,C<\frac{\pi}{2}\right)$.

Theo giả thiết ta có:

$$x=\frac{y-z}{1+yz}\Leftrightarrow \tan A=\frac{\tan B-\tan C}{1+\tan B\tan C}=\tan\left(B-C\right)\Leftrightarrow A=B-C+k\pi.$$

Do $-\frac{\pi}{2}<A-B+C<\pi\Rightarrow k=0\Rightarrow A=B-C\Leftrightarrow A-B=-C$.

Khi đó:

$$P=2\left(\frac{1}{1+\tan^2 A}-\frac{1}{1+\tan^2 B}\right)-\frac{4\tan C}{\sqrt{1+\tan^2 C}}+\frac{3\tan C}{\left(1+\tan^2 C\right)\sqrt{1+\tan^2 C}}$$

$$=2\left(\cos^2 A-\cos^2 B\right)-4\sin C+3\sin C\cos^2 C$$

$$=\cos 2A-\cos 2B-4\sin C+3\text{sinCcos}^2 C$$

$$=-2\sin\left(A+B\right)\sin\left(A-B\right)-4\sin C+3\text{sinCcos}^2 C$$

$$=2\sin C\sin\left(A+B\right)-4\sin C+3\text{sinCcos}^2 C$$

$$\le 2\sin C-4\sin C+3\text{sinCcos}^2 C=\sin C\left(3\cos^2 C-2\right)=\sin C\left(1-3\sin^2 C\right)$$

Nếu $\sin C>\frac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow P<0$ xét với $\sin C\le\frac{\sqrt{3}}{3}$ sử dụng bất đẳng thức AM – GM ta có:

$$P=\sqrt{\sin^2 C\left(1-3\sin^2 C\right)^2}=\frac{\sqrt{6\sin^2 C\left(1-3\sin^2 C\right)\left(1-3\sin^2 C\right)}}{\sqrt{6}}$$

$$\le\frac{\sqrt{\left(\frac{6\sin^2 C+1-3\sin^2 C+1-3\sin^2 C}{3}\right)^3}}{\sqrt{6}}=\frac{2}{9}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\sin C=\frac{1}{3}\Leftrightarrow\tan C=\frac{\sqrt{2}}{4},\tan A=\frac{\sqrt{2}}{2},\tan B=\sqrt{2}\Leftrightarrow x=\sqrt{2},y=\frac{\sqrt{2}}{2},z=\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng $\frac{2}{9}$ đạt tại $x=\sqrt{2},y=\frac{\sqrt{2}}{2},z=\frac{\sqrt{2}}{4}$.

Cách 2: Theo giả thiết ta có:

$$x=\frac{y-z}{1+yz}\Rightarrow P=\frac{2}{\left(\frac{y-z}{1+yz}\right)^2+1}-\frac{2}{y^2+1}-\frac{4z}{\sqrt{z^2+1}}+\frac{3z}{\left(z^2+1\right)\sqrt{z^2+1}}$$

$$P=\frac{2\left(1+yz\right)^2}{\left(y^2+1\right)\left(z^2+1\right)}-\frac{2}{y^2+1}-\frac{4z}{\sqrt{z^2+1}}+\frac{3z}{\left(z^2+1\right)\sqrt{z^2+1}}$$

$$=\frac{2z\left[2y+\left(y^2-1\right)z\right]}{\left(y^2+1\right)\left(z^2+1\right)}-\frac{4z}{\sqrt{z^2+1}}+\frac{3z}{\left(z^2+1\right)\sqrt{z^2+1}}$$

Sử dụng bất đẳng thức C –S ta có

$$\frac{2z\left[2y+\left(y^2-1\right)z\right]}{\left(y^2+1\right)\left(z^2+1\right)}\le\frac{2z\sqrt{\left[4y^2+\left(y^2-1\right)^2\right]\left(1+z^2\right)}}{\left(y^2+1\right)\left(z^2+1\right)}=\frac{2z}{\sqrt{1+z^2}}$$

Suy ra $P\le\frac{2z}{\sqrt{1+z^2}}-\frac{4z}{\sqrt{z^2+1}}+\frac{3z}{\left(z^2+1\right)\sqrt{z^2+1}}=-3\left(\frac{z}{\sqrt{z^2+1}}\right)^3+\frac{z}{\sqrt{z^2+1}}$

Đặt $t=\frac{z}{\sqrt{z^2+1}},\left(t\in\left(0;1\right)\right)$ khi đó $P\le f(t)=-3t^3+t$.

Ta có $f'(t)=-9t^2+1;\ f'(t)=0\xleftrightarrow{t\in(0;1)}t=\frac{1}{3}$.

Ta có f'(t) đổi dấu dương sang âm khi đi qua $t=\frac{1}{3}$ nên f(t) đạt cực đại tại $t=\frac{1}{3}$ trên khoảng $\left(0;1\right)$ hay $f\left(t\right)\le f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{9}$.

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng $\frac{2}{9}$ đạt tại $x=\frac{\sqrt{2}}{2}, \mathrm{y}=\sqrt{2}, z=\frac{\sqrt{2}}{4}$.

Bài 5. Cho *x*,*y*,*z* là các số thực dương thỏa mãn điều kiện

$$4x^2+4y^2+4z^2+16xyz=1.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{x+y+z+4xyz}{1+4\left(xy+yz+zx\right)}$.

Lời giải

Theo giả thiết tồn tại 3 góc nhọn của một tam giác sao cho:

$2x=\cos A, 2y=\cos B, 2z=\cos C$.

Khi đó $\tan^2\frac{A}{2}\tan^2\frac{B}{2}\tan^2\frac{C}{2}\le\left(\frac{\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}}{3}\right)^3=\frac{1}{27}$.

$$\Leftrightarrow\cos^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2}\ge27\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow\left(1+\cos A\right)\left(1+\cos B\right)\left(1+\cos C\right)\ge27\left(1-\cos A\right)\left(1-\cos B\right)\left(1-\cos C\right)$$

$$\Leftrightarrow\left(1+2x\right)\left(1+2y\right)\left(1+2z\right)\ge27\left(1-2x\right)\left(1-2y\right)\left(1-2z\right)$$

$$\Leftrightarrow28\left(x+y+z+4xyz\right)\ge13\left(1+4xy+4yz+4zx\right)$$

$$\Leftrightarrow P=\frac{x+y+z+4xyz}{1+4xy+4yx+4zx}\ge\frac{13}{28}$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=\frac{1}{4}$.

Bài 6. Cho a,b,c là các số thực dương có tổng bằng 1. Chứng minh

$$\sqrt{3}\left(\frac{bc}{a+bc}-\frac{\sqrt{abc}}{c+ab}\right)+\frac{\sqrt{abc}}{b+ca}\ge\frac{2\sqrt{3}-5}{4}.$$

Lời giải

Chú ý theo giả thiết ta có $a+b+c=\sqrt{\frac{ab}{c}}.\sqrt{\frac{ca}{b}}+\sqrt{\frac{ab}{c}}.\sqrt{\frac{bc}{a}}+\sqrt{\frac{bc}{a}}.\sqrt{\frac{ca}{b}}=1$.

Suy ra tồn tại 3 góc một tam giác sao cho

$$\sqrt{\frac{bc}{a}}=\tan\frac{A}{2},\sqrt{\frac{ca}{b}}=\tan\frac{B}{2},\sqrt{\frac{ab}{c}}=\tan\frac{C}{2}.$$

Khi đó

$$P=\sqrt{3}\left(\frac{\tan^2\frac{A}{2}}{1+\tan^2\frac{A}{2}}-\frac{\tan\frac{C}{2}}{1+\tan^2\frac{C}{2}}\right)+\frac{\tan\frac{B}{2}}{1+\tan^2\frac{B}{2}}$$

$$=\sqrt{3}\left(\sin^2\frac{A}{2}-\frac{1}{2}\sin C\right)+\frac{1}{2}\sin B$$

$$=-\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}\cos A-\sin B+\sqrt{3}\sin C\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\ge-\frac{5}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Bất đẳng thức cuối đúng do $\sqrt{3}\cos A-\sin B+\sqrt{3}\sin C\le\frac{5}{2}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}A=B=\dfrac{\pi}{6}\\ C=\dfrac{2\pi}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=b=2\sqrt{3}-3\\ c=7-4\sqrt{3}\end{cases}$.

Bài 7. Cho *a,b,c* là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a^2+b^2+c^2+2abc=1$.

Chứng minh rằng $a^2+b^2+c^2\ge4\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)$.

Lời giải

Theo giả thiết tồn tại ba góc nhọn của một tam giác thỏa mãn:

$a=\cos A,b=\cos B,c=\cos C$.

Ta cần chứng minh:

$$\cos^2A+\cos^2B+\cos^2C\ge4\left(\cos^2A\cos^2B+\cos^2B\cos^2C+\cos^2C\cos^2A\right)$$

$$\Leftrightarrow\sum_{cyc}\frac{\cot^2A}{1+\cot^2A}\ge4\sum_{cyc}\frac{\cot^2A\cot^2B}{\left(1+\cot^2A\right)\left(1+\cot^2B\right)}$$

$$\Leftrightarrow\sum_{cyc}\frac{\cot^2A}{(\text{cotA}+\text{cotB})\left(\cot A+\cot C\right)}\ge4\sum_{cyc}\frac{\cot^2A\cot^2B}{\left(\cot A+\text{cotB}\right)^2\left(\cot C+\cot A\right)\left(\text{cotC}+\cot B\right)}$$

$$\Leftrightarrow\sum_{cyc}\left(\cot B+\cot C\right)\cot^2A\ge4\sum_{cyc}\frac{\cot^2A\cot^2B}{\cot A+\cot B}\text{ (luôn đúng).}$$

Do $4\sum_{cyc}\frac{\cot^2A\cot^2B}{\cot A+\cot B}\le\sum_{cyc}\cot A\cot B\left(\cot A+\cot B\right)=\sum_{cyc}\left(\cot B+\cot C\right)\cot^2A$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{2}$.

Cách 2: Ta đưa về chứng minh

$$\left(a^2+b^2+c^2+2abc\right)\left(a^2+b^2+c^2\right)\ge 4\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)$$

$$\Leftrightarrow a^4+b^4+c^4+2abc\left(a^2+b^2+c^2\right)\ge 2\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)$$

Ta có:

$$abc\le\frac{1}{8}, a+b+c\le\frac{3}{2}\Rightarrow 2\left(a^2+b^2+c^2\right)-a-b-c=2-4abc-a-b-c\ge 0.$$

Do đó $2abc\left(a^2+b^2+c^2\right)\ge abc\left(a+b+c\right)$.

Ta đưa về chứng minh bất đẳng thức:

$$a^4+b^4+c^4+abc\left(a+b+c\right)\ge 2\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)$$

$$\Leftrightarrow a^2\left(a-b\right)\left(a-c\right)+b^2\left(b-c\right)\left(b-a\right)+c^2\left(c-a\right)\left(c-b\right)\ge 0$$

Không mất tính tổng quát giả sử $a\ge b\ge c$ khi đó $c^2\left(c-a\right)\left(c-b\right)\ge 0$ và

$$\begin{aligned}a^2\left(a-b\right)\left(a-c\right)+b^2\left(b-c\right)\left(b-a\right)&=\left(a-b\right)\left[a^2\left(a-c\right)-b^2\left(b-c\right)\right]\\&\ge\left(a-b\right)\left[a^2\left(b-c\right)-b^2\left(b-c\right)\right]\\&=\left(a-b\right)\left(b-c\right)\left(a^2-b^2\right)\ge 0\end{aligned}$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$

Bài tập tương tự

Cho a,b,c là các số thực không âm thỏa mãn $a^2+b^2+c^2+abc=4$.

Chứng minh rằng $\left(a^2+b^2-abc\right)\left(b^2+c^2-abc\right)\left(c^2+a^2-abc\right)\ge a^2b^2c^2$.

Bài 8. Cho x,y,z là các số thực dương thoả mãn điều kiện $6x+3y+2z=xyz$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\dfrac{x\sqrt{yz}}{\sqrt{x^2+1}\sqrt[4]{\left(y^2+4\right)\left(z^2+9\right)}}$.

Lời giải

Giả thiết bài toán tương đương với $\frac{2}{xy}+\frac{6}{yz}+\frac{3}{zx}=1$.

Đặt $a=\frac{1}{x},b=\frac{2}{y},c=\frac{3}{z}\Rightarrow ab+bc+ca=1$. Khi đó tồn tại ba góc một tam giác sao cho $a=\tan\frac{A}{2},b=\tan\frac{B}{2},c=\tan\frac{C}{2}$.

Khi đó $P=\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}.\sqrt{\frac{1}{\sqrt{1+b^2}}.\frac{1}{\sqrt{1+c^2}}}=\cos\frac{A}{2}\sqrt{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}\le\frac{4\sqrt{3}}{9}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=2\sqrt{2},z=3\sqrt{2}$.

C. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1. Cho a,b là hai số thực bất kỳ chứng minh rằng $\left|\frac{(a-b)(1-ab)}{\left(1+a^2\right)\left(1+b^2\right)}\right|\le\frac{1}{2}$.

Bài 2. Cho x,y là hai số thực thoả mãn điều kiện $36x^2+16y^2=5$.

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $Z=y-2x+5$.

Bài 2. Đặt $x=\frac{\sqrt{5}}{6}\sin a$ thì từ giả thiết ta có $y=\frac{\sqrt{5}}{4}\cos a$.

Bài 3. Chứng minh rằng với mọi số thực a,b,c ta có

$$\frac{|a-b|}{\sqrt{a^2+1}.\sqrt{b^2+1}}+\frac{|b-c|}{\sqrt{b^2+1}.\sqrt{c^2+1}}\ge\frac{|c-a|}{\sqrt{c^2+1}.\sqrt{a^2+1}}.$$

Bài 4. Cho a, b, c là các số thực dương thoả mãn điều kiện $abc+c+2b=2a$.

Chứng minh rằng $\sqrt{\frac{1}{1+a^2}}+\sqrt{\frac{b^2}{1+b^2}}+\sqrt{\frac{c^2}{4+c^2}}\le\frac{3}{2}$.

Bài 5. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a.b+bc+ca=1$.

Chứng minh rằng $\frac{a}{1+a^2}+\frac{b}{1+b^2}+\frac{c}{1+c^2}\ge\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Bài 6. Cho a,b,c là các số thực thuộc khoảng (0;1). Chứng minh rằng

$$\sqrt{abc}+\sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)}<1.$$

Bài 7. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện $a+b+c=1$.

Chứng minh rằng $\frac{a}{a+bc}+\frac{b}{b+ca}+\frac{c}{c+ab}\le\frac{9}{4}$.

Bài 8. Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c=abc$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\dfrac{2}{\sqrt{a^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{b^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{c^2+1}}$.

Bài 9. Cho *x,y,z* là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $xyz+x-y+z=0$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\dfrac{2}{x^2+1}-\dfrac{2}{y^2+1}+\dfrac{3}{z^2+1}$.

Bài 10. Cho *a,b,c* là các số thực dương thỏa mãn điều kiện

$ab+bc+ca=\sqrt{\left(a^2+1\right)\left(b^2+1\right)\left(c^2+1\right)}+1$.

Chứng minh rằng $a+b+c\ge\sqrt{3}$.

Bài 11. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện $a+b+c=abc$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{a}{a+bc}+\dfrac{b}{b+ca}+\dfrac{c}{c+ab}$.

Bài 12. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện $a+b+c=abc$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{a}{a+bc}+\sqrt{3}\left(\dfrac{b}{b+ca}+\dfrac{c}{c+ab}\right)$.

Bài 13. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{2b}+\dfrac{1}{3c}=6$.

Chứng minh rằng $\dfrac{a}{a+36bc}.\dfrac{b}{b+9ca}.\sqrt{\dfrac{c}{c+4ab}}\le\dfrac{1}{27}$.

Bài 14. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện

$$2009ac+ab+bc=2009.$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\dfrac{2}{a^2+1}-\dfrac{2b^2}{b^2+2009^2}+\dfrac{3}{c^2+1}$.

Bài 15. Cho a,b,c là các số thực không âm thỏa mãn $a^2+b^2+c^2+abc=4$.

Chứng minh rằng $\left(a^2+b^2-abc\right)\left(b^2+c^2-abc\right)\left(c^2+a^2-abc\right)\ge a^2b^2c^2$.

Bài 16. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện $ab+bc+ca+abc=4$.

Chứng minh rằng $\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\le 3$.

Bài 17. Chox,y,z là các số thực dương thoả mãn điều kiện $xy+yz+zx=xyz$.

Chứng minh rằng $\dfrac{2}{\sqrt{1+x^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+y^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+z^2}}\le\dfrac{9}{4}$.

Bài 18. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện $a+b+c=6$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=(3-a)(3-b)(3-c)\left(\frac{1}{b^2c^2}+\frac{1}{c^2a^2}+\frac{1}{a^2b^2}\right).$$

Bài 19. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện $a^2+b^2+c^2+abc=4$.

Chứng minh rằng $a\sqrt{4-a^2}+b\sqrt{4-b^2}+c\sqrt{4-c^2}\le 3\sqrt{3}$.

Bài 20. Cho a,b,c là các số thực thuộc khoảng (0;2) thoả mãn điều kiện

$$ab+bc+ca+abc=4.$$

Chứng minh rằng $\sqrt{4-a^2}+\sqrt{4-b^2}+\sqrt{4-c^2}\le 3\sqrt{3}$.

Bài 21. Cho x,y,z là các số thực dương thoả mãn điều kiện $xy=1+z(x+y)$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\dfrac{2xy(xy+1)}{(1+x^2)(1+y^2)}+\dfrac{z}{z^2+1}$.

D. HƯỚNG DẪN GIẢI – ĐÁP SỐ

Bài 1. Đặt $a=tanx;b=tany$ ta có

$$VT=\left|\frac{(\tan x-\tan y)(1-\tan x.\tan y)}{(1+\tan^2 x)(1+\tan^2 y)}\right|=\left|\sin(x-y)\cos(x-y)\right|=\left|\frac{1}{2}\sin 2(x-y)\right|\le\frac{1}{2}.$$

Bất đẳng thức được chứng minh.

Nên $Z=\dfrac{\sqrt{5}}{6}\sin a-\dfrac{\sqrt{5}}{2}\cos a+5\Leftrightarrow\dfrac{\sqrt{5}}{6}\sin a-\dfrac{\sqrt{5}}{2}\cos a=Z-5\,(*)$

Phương trình (*) có nghiệm khi và chỉ khi $(Z-5)^2\le\dfrac{5}{36}+\dfrac{5}{4}=\dfrac{49}{36}\Leftrightarrow\dfrac{23}{6}\le Z\le\dfrac{37}{6}$.

Bài 3. Đặt $a=tanx;\ b=tany;\ c=\tan z$.

Bất đẳng thức đã cho tương đương với:

$$\frac{|\tan x-\tan y|}{\sqrt{1+\tan^2 x}.\sqrt{1+\tan^2 y}}+\frac{|\tan y-\tan z|}{\sqrt{1+\tan^2 y}.\sqrt{1+\tan^2 z}}\ge\frac{|\tan x-\tan z|}{\sqrt{1+\tan^2 x}.\sqrt{1+\tan^2 z}}$$

$$\Leftrightarrow|\sin(x-y)|+|\sin(y-z)|\ge|\sin(x-z)|$$

Bất đẳng cuối đúng bởi vì

$$|\sin(x-y)|+|\sin(y-z)|\ge|\sin(x-y)+\sin(y-z)|\ge|\sin(x-z)|.$$

Bất đẳng thức được chứng minh.

Bài tập tương tự

Chứng minh rằng với mọi số thực a,b,c ta có

$$\frac{|a-b|}{\sqrt{a^2+2015}.\sqrt{b^2+2015}}+\frac{|b-c|}{\sqrt{b^2+2015}.\sqrt{c^2+2015}}\ge\frac{|c-a|}{\sqrt{c^2+2015}.\sqrt{a^2+2015}}.$$

Bài 4. Theo giả thiết tồn tại ba góc một tam giác sao cho:

$$a = tanA\ ;\ \frac{1}{b} = \tan B;\ \frac{2}{c} = \tan C.$$

Bất đẳng thức đã cho tương đương với: $\cos A + \cos B + \cos C \le \frac{3}{2}$.

Bất đẳng thức cuối luôn đúng và ta có đpcm.

Bài 5. Đặt $a = \tan\frac{A}{2}; b = \tan\frac{B}{2}$. Từ giả thiết suy ra $c = \tan\frac{C}{2}$; với A, B, C là 3 góc của tam giác nhọn ABC

Bất đẳng thức tương đương với:

$$\frac{1}{2}(\tan A + \tan B + \tan C) \ge \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ (luôn đúng).}$$

Bài 6. Đặt $a = sin^2 x;\ b = sin^2 y;\ c = sin^2 z$.

Ta cần chứng minh $\sin x.\sin y.\sin z + \cos x.\cos y.\cos z < 1$.

Bất đẳng thức đúng bởi vì

$\sin x.\sin y.\sin z + \cos x.\cos y.\cos z \le \sin x.\sin y + \cos x.\cos y = \cos(x - y) \le 1$.

Dấu bằng không xảy ra và ta có đpcm.

Bài 7. Ta cần chứng minh $\frac{1}{1+\frac{bc}{a}} + \frac{1}{1+\frac{ca}{b}} + \frac{1}{1+\frac{ab}{c}} \le \frac{9}{4}$

Theo giả thiết ta có $\sqrt{\frac{ab}{c}}.\sqrt{\frac{bc}{a}} + \sqrt{\frac{bc}{a}}.\sqrt{\frac{ca}{b}} + \sqrt{\frac{ca}{b}}.\sqrt{\frac{ab}{c}} = 1$.

Do đó tồn tại ba góc một tam giác sao cho

$$\sqrt{\frac{bc}{a}} = \tan\frac{A}{2}; \sqrt{\frac{ca}{b}} = \tan\frac{B}{2}; \sqrt{\frac{ab}{c}} = \tan\frac{C}{2}.$$

Bất đẳng thức trở thành: $\frac{1}{1+\tan^2\frac{A}{2}} + \frac{1}{1+\tan^2\frac{B}{2}} + \frac{1}{1+\tan^2\frac{C}{2}} \le \frac{9}{4}$.

$$\Leftrightarrow \cos^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{B}{2} + \cos^2\frac{C}{2} \le \frac{9}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3 + \cos A + \cos B + \cos C}{2} \le \frac{9}{4}$$

$$\Leftrightarrow \cos A + \cos B + \cos C \le \frac{3}{2}$$

Bất đẳng cuối đúng và ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{3}$.

Bài 8. Theo giả thiết tồn tại 3 góc nhọn của một tam giác sao cho:

$$a=\tan A, b=\tan B, c=\tan C.$$

Khi đó:

$$P=2\cos A+\cos B+\cos C=2\cos A+2\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}.$$

$$\le 2-4\sin^2\frac{C}{2}+2\sin\frac{C}{2}=-4\left(\sin\frac{C}{2}-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{7}{4}\le\frac{7}{4}$$

Bài 9. Từ giả thiết ta có: $xz+\frac{x}{y}+\frac{z}{y}=1$.

Do đó tồn tại 3 góc của một tam giác sao cho $x=\tan\frac{A}{2},\frac{1}{y}=\tan\frac{B}{2},z=\tan\frac{C}{2}$.

Khi đó ta có:

$$P=\frac{2}{1+\tan^2\frac{A}{2}}-\frac{2}{1+\cot^2\frac{B}{2}}+\frac{3}{1+\tan^2\frac{C}{2}}=2\cos^2\frac{A}{2}-2\sin^2\frac{B}{2}+3\cos^2\frac{C}{2}$$

$$=\cos A+\cos B+3-3\sin^2\frac{C}{2}=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+3-3\sin^2\frac{C}{2}$$

$$\le 2\sin\frac{C}{2}-3\sin^2\frac{C}{2}+3=-3\left(\sin\frac{C}{2}-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{10}{3}\le\frac{10}{3}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\sin\frac{C}{2}=\frac{1}{3}, A=B$

$$\Rightarrow x=\frac{1}{\sqrt{2}}, y=\sqrt{2}, z=\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng $\frac{10}{3}$ đạt tại $x=\frac{1}{\sqrt{2}}, y=\sqrt{2}, z=\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

<u>Cách 2:</u> Từ điều kiện cho phép ta giảm biến biểu thức P về hai biến x và y.

$$xyz+x-y+z=0\Rightarrow z=\frac{y-x}{1+xy}\ge 0\Rightarrow y\ge x.$$

Khi đó ta có:

$$P=\frac{2\left(y^2-x^2\right)}{\left(1+x^2\right)\left(1+y^2\right)}+\frac{3}{\left(\frac{y-x}{1+xy}\right)^2+1}=\frac{2\left(y^2-x^2\right)}{\left(1+x^2\right)\left(1+y^2\right)}+\frac{3\left(x^2y^2+2xy+1\right)}{\left(1+x^2\right)\left(1+y^2\right)}$$

$$=\frac{2\left(y^2-x^2\right)}{\left(1+x^2\right)\left(1+y^2\right)}+\frac{3\left(x^2y^2+x^2+y^2+1\right)-3\left(x^2-2xy+y^2\right)}{\left(1+x^2\right)\left(1+y^2\right)}$$

$$=\frac{2\left(y^2-x^2\right)}{\left(1+x^2\right)\left(1+y^2\right)}-\frac{3\left(x-y\right)^2}{\left(1+x^2\right)\left(1+y^2\right)}+3=\frac{\left(y-x\right)\left(5x-y\right)}{\left(1+x^2\right)\left(1+y^2\right)}+3$$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM và C-S ta có:

$$3\left(y-x\right)\left(5x-y\right)\le\left[\frac{3\left(y-x\right)+5x-y}{2}\right]^2=\left(x+y\right)^2\le\left(1+x^2\right)\left(1+y^2\right).$$

Suy ra $P\le\frac{1}{3}+3=\frac{10}{3}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}3y-3x=5x-y\\ \frac{x}{1}=\frac{1}{y}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{1}{\sqrt{2}}\\ y=\sqrt{2}\end{cases}\Rightarrow z=\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Bài tập tương tự

1) Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $b=a+c+abc$.

   Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\frac{2}{a^2+1}-\frac{2}{b^2+1}+\frac{3}{c^2+1}$.

2) Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $2014ac+bc+ca=2014$.

   Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\frac{2}{a^2+1}-\frac{2b^2}{b^2+2014}+\frac{3}{c^2+1}$.

3) Cho *x,y,z* là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $xy+yz+zx=1$.

   Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\frac{x}{x^2+1}+\frac{y}{y^2+1}+\frac{2z}{\sqrt{z^2+1}}$.

4) Cho *x,y,z* là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $xz-yz-xy=1$.

   Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{2x^2}{1+x^2}-\frac{2y^2}{1+y^2}+\frac{3z^2}{1+z^2}$.

Bài 10. Sử dụng đẳng thức:

$$\left(a^2+1\right)\left(b^2+1\right)\left(c^2+1\right)=\left(ab+bc+ca-1\right)^2+\left(a+b+c-abc\right)^2.$$

Suy ra $a+b+c=abc$.

Do đó tồn tại 3 góc của một tam giác thỏa mãn $a=\tan A, b=\tan B, c=\tan C$.

Bài toán đưa về chứng minh $\tan A+\tan B+\tan C\ge3\sqrt{3}$.

Bất đẳng thức cuối luôn đúng và ta có đpcm.

Bài 11. Điều kiện bài toán tương đương với:

$$\sqrt{\frac{ab}{c}}.\sqrt{\frac{bc}{a}}+\sqrt{\frac{bc}{a}}.\sqrt{\frac{ca}{b}}+\sqrt{\frac{ca}{b}}.\sqrt{\frac{ab}{c}}=\sqrt{\frac{ab}{c}}.\sqrt{\frac{bc}{a}}.\sqrt{\frac{ca}{b}}.$$

Do đó tồn tại ba góc trong một tam giác sao cho

$$\sqrt{\frac{ab}{c}}=\tan A,\sqrt{\frac{bc}{a}}=\tan B,\sqrt{\frac{ca}{b}}=\tan C.$$

Khi đó $P=\frac{1}{1+\tan^2 A}+\frac{1}{1+\tan^2 B}+\frac{1}{1+\tan^2 C}=\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C\ge\frac{3}{4}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=3$.

Bài 12. Điều kiện bài toán tương đương với:

$$\sqrt{\frac{ab}{c}}.\sqrt{\frac{bc}{a}}+\sqrt{\frac{bc}{a}}.\sqrt{\frac{ca}{b}}+\sqrt{\frac{ca}{b}}.\sqrt{\frac{ab}{c}}=\sqrt{\frac{ab}{c}}.\sqrt{\frac{bc}{a}}.\sqrt{\frac{ca}{b}}.$$

Do đó tồn tại ba góc trong một tam giác sao cho

$$\sqrt{\frac{bc}{a}}=\tan A,\sqrt{\frac{ca}{b}}=\tan B,\sqrt{\frac{ab}{c}}=\tan C.$$

Khi đó $P=\frac{1}{1+\tan^2 A}+\sqrt{3}\left(\frac{1}{1+\tan^2 B}+\frac{1}{1+\tan^2 C}\right)$

$$=\cos^2 A+\sqrt{3}\left(\cos^2 B+\cos^2 C\right)$$

$$=\frac{\cos 2A+\sqrt{3}\left(\cos 2B+\cos 2C\right)+1+2\sqrt{3}}{2}\ge\frac{4\sqrt{3}-3}{4}$$

Chú ý $\cos 2A+\sqrt{3}\left(\cos 2B+\cos 2C\right)\ge-\frac{5}{2}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=7+4\sqrt{3},b=c=\frac{3+2\sqrt{3}}{3}$.

Bài 13. Giả thiết đã cho tương đương với:

$$6bc+3ac+2ab=36abc\Leftrightarrow\frac{6bc+3ac+2ab}{\sqrt{abc}}=\frac{36abc}{\sqrt{abc}}$$

$$\Leftrightarrow 6\sqrt{\frac{bc}{a}}+3\sqrt{\frac{ac}{b}}+2\sqrt{\frac{ab}{c}}=6\sqrt{\frac{bc}{a}}.3\sqrt{\frac{ac}{b}}.2\sqrt{\frac{ab}{c}}$$

Trong tam giác ta có: $\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}=\cot\frac{A}{2}.\cot\frac{B}{2}.\cot\frac{C}{2}$.

Suy ra tồn tại ba góc trong một tam giác sao cho:

$$2\sqrt{\frac{ab}{c}}=\cot\frac{C}{2};3\sqrt{\frac{ca}{b}}=\cot\frac{B}{2};\quad 6\sqrt{\frac{bc}{a}}=\cot\frac{A}{2}.$$

Vì vậy $VT = \dfrac{1}{1+\cot^2\dfrac{A}{2}}.\dfrac{1}{1+\cot^2\dfrac{B}{2}}.\sqrt{\dfrac{1}{1+\cot^2\dfrac{C}{2}}}$.

$$= \sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = \frac{1}{4}\left(\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{A+B}{2}\right)^2\sin\frac{C}{2}$$

$$= \frac{1}{4}\left(\cos\frac{A-B}{2}-\sin\frac{C}{2}\right)^2\sin\frac{C}{2} \le \frac{1}{4}\left(1-\sin\frac{C}{2}\right)^2\sin\frac{C}{2}$$

$$= \frac{1}{8}\left(1-\sin\frac{C}{2}\right)\left(1-\sin\frac{C}{2}\right)2\sin\frac{C}{2} \le \frac{1}{8}\left[\frac{\left(1-\sin\frac{C}{2}\right)+\left(1-\sin\frac{C}{2}\right)+\left(2\sin\frac{C}{2}\right)}{3}\right]^3 = \frac{1}{27}$$

Bất đẳng thức được chứng minh.

Bài 14. Từ giả thiết ta có: $ac + a.\dfrac{b}{2009}+\dfrac{b}{2009}.c = 1$.

Suy ra tồn tại ba góc một tam giác sao cho:

$$a = \tan\frac{A}{2};\frac{b}{2009} = \tan\frac{B}{2};\, c = \tan\frac{C}{2}.$$

Khi đó

$$P = \frac{2}{1+\tan^2\frac{A}{2}} - \frac{2}{1+\dfrac{1}{\tan^2\frac{B}{2}}} + \frac{3}{1+\tan^2\frac{C}{2}} = 2\cos^2\frac{A}{2} - 2\sin^2\frac{B}{2} + 3\cos^2\frac{C}{2}$$

$$= \cos A + \cos B + 3(1-\sin^2\frac{C}{2}) = 3 + \frac{1}{3}\cos^2\frac{A-B}{2} - \left(\sqrt{3}\sin\frac{C}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}}\cos\frac{A-B}{2}\right)^2 \le \frac{10}{3}$$

Bài tập tương tự

1) Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện $abc + a + b = c$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \dfrac{a}{a^2+1} + \dfrac{b}{b^2+1} - \dfrac{c^2}{c^2+1}$.

2) Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện $abc + a + b = c$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \dfrac{2(1+ab)}{(1+a^2)(1+b^2)} + \dfrac{c}{c^2+1}$.

3) Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện $ab = 1 + bc + ca$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \dfrac{a^2}{a^2+1} + \dfrac{b^2}{b^2+1} + \dfrac{c}{c^2+1}$.

4) Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện $ab = 1 + bc + ca$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{\sqrt{3}}{a^2+1} + \frac{b}{b^2+1} - \frac{\sqrt{3}c}{c^2+1}$.

5) Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện $ab = 1 + bc + ca$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{1}{a^2+1} + \frac{\sqrt{3}}{b^2+1} - \frac{\sqrt{3}}{c^2+1}$.

Bài 15. Đặt $a = 2\sqrt{\frac{yz}{(x+y)(x+z)}}, b = 2\sqrt{\frac{zx}{(y+z)(y+z)}}, \mathrm{c} = 2\sqrt{\frac{xy}{(z+x)(z+y)}}$.

Khi đó $a^2 + b^2 - abc = \frac{4\left(y^2z + yz^2 + x^2z + xz^2 - 2xyz\right)}{(x+y)(y+z)(z+x)} \ge \frac{4\left(yz^2 + xz^2\right)}{(x+y)(y+z)(z+x)}$.

Tương tự suy ra:

$$\prod\left(a^2 + b^2 - abc\right) \ge \prod \frac{4\left(yz^2 + xz^2\right)}{(x+y)(y+z)(z+x)} \ge a^2b^2c^2$$

Bài 16. Bất đẳng tương đương với: $\cos A + \cos B + \cos C \le \frac{3}{2}$.

Với $\cos A = \frac{\sqrt{ab}}{2}; \cos B = \frac{\sqrt{bc}}{2}; \cos C = \frac{\sqrt{ca}}{2}$.

Bài 17. Theo giả thiết tồn tại các góc nhọn trong một tam giác sao cho

$$x = \tan A; y = \tan B; z = \tan C.$$

Khi đó gọi P là biểu thức vế trái ta có

$$\begin{aligned}
P &= \frac{2}{\sqrt{1+\tan^2 A}} + \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 B}} + \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 C}} \\
&= 2\cos A + \cos B + \cos C \\
&= 2\left(1 - 2\sin^2\frac{A}{2}\right) + 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2} \\
&\le 2\left(1 - 2\sin^2\frac{A}{2}\right) + 2\sin\frac{A}{2} \\
&= \frac{9}{4} - 4\left(\sin\frac{A}{2} - \frac{1}{4}\right)^2 \le \frac{9}{4}
\end{aligned}$$

Bất đẳng thức được chứng minh.

Bài 18. Trước hết,ta biến đổi P về dạng:

$$8P = \frac{(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)(a^2+b^2+c^2)}{a^2b^2c^2}$$

Bây giờ ta sẽ chứng minh rằng:

$$(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)(a^2+b^2+c^2)\le 9a^2b^2c^2 \quad (1)$$

Thật vậy,nếu $(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)\le 0$ bất đẳng thức trên đúng

Nếu $(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)>0$ ta thấy rằng 3 số a + b – c; b + c – a; c + a – b không thể có đồng thời 2 số âm.

Vì thế, ta có thể quy bài toán về chứng minh bất đẳng thức đúng với 3 cạnh 1 tam giác.

Ta xét tam giác ABC với bán kính ngoại tiếp $R; a=BC; b=CA; c=AB$.

Ta có : $9R^2\ge a^2+b^2+c^2$ hay $\dfrac{9a^2b^2c^2}{16S^2}\ge (a^2+b^2+c^2)$.

hay $9a^2b^2c^2\ge (a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)(a^2+b^2+c^2)$

Vậy ta có (1) được chứng minh.

Suy ra $8P\le \dfrac{9}{6}=\dfrac{3}{2}$ hay $P\le \dfrac{3}{16}$.

Bài 19. Theo giả thiết tồn tại ba góc nhọn trong một tam giác sao cho

$$a=2\cos A; b=2\cos B; c=2\cos C .$$

Bất đẳng thức trở thành:

$$\cos sA\sqrt{4-\cos^2 A}+\cos B\sqrt{4-\cos^2 B}+\cos C\sqrt{4-\cos^2 C}\le 3\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \cos A\sin A+\cos B\sin B+\cos C\sin C\le \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Không mất tính tổng quát giả sử $A\ge B\ge C\Rightarrow \begin{cases}\cos A\le \cos B\le \cos C\\ \sin A\ge \sin B\ge \sin C\end{cases}$.

Theo bất đẳng thức Chebyshev ta có

$$\cos A\sin A+\cos B\sin B+\cos C\sin C\le \frac{1}{3}\left(\cos A+\cos B+\cos C\right)\left(\sin A+\sin B+\sin C\right)$$

$$\le \frac{1}{3}.\frac{3}{2}.\frac{3\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

Bất đẳng thức cuối đúng và ta có đpcm.

Bài 20. Sử dụng bất đẳng thức C –S ta có

$$\sqrt{4-a^2}+\sqrt{4-b^2}+\sqrt{4-c^2}\le \sqrt{3\left(12-a^2-b^2-c^2\right)}.$$

Ta chỉ cần chứng minh $a^2+b^2+c^2\ge 3$.

Thật vậy theo giả thiết tồn tại ba góc nhọn một tam giác sao cho

$$\cos A=\frac{\sqrt{bc}}{2},\cos B=\frac{\sqrt{ca}}{2},\cos C=\frac{\sqrt{ab}}{2}.$$

Suy ra $a=\dfrac{2\cos B\cos C}{\cos A}, b=\dfrac{2\cos C\cos A}{\cos B}, c=\dfrac{2\cos A\cos B}{\cos C}$.

Vậy ta chứng minh $\left(\dfrac{2\cos B\cos C}{\cos A}\right)^2+\left(\dfrac{2\cos C\cos A}{\cos B}\right)^2+\left(\dfrac{2\cos A\cos B}{\cos C}\right)^2\ge 3$.

Bất đẳng thức đúng do

$$\left(\frac{\cos B\cos C}{\cos A}\right)^2+\left(\frac{\cos C\cos A}{\cos B}\right)^2+\left(\frac{\cos A\cos B}{\cos C}\right)^2\ge \cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C\ge\frac{3}{4}$$

Ta có đpcm.

Bài 21. Theo giả thiết ta có $\dfrac{1}{xy}+z\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)=1$.

Do đó tồn tại ba góc một tam giác sao cho $\dfrac{1}{x}=\tan\dfrac{A}{2}, \dfrac{1}{y}=\tan\dfrac{B}{2}, z=\tan\dfrac{C}{2}$.

Khi đó sử dụng bất đẳng thức C –S và AM – GM ta có

$$P=\frac{2\left(1+\frac{1}{xy}\right)}{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\left(1+\frac{1}{y^2}\right)}+\frac{z}{z^2+1}\le\frac{2}{\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\left(1+\frac{1}{y^2}\right)}}+\frac{z}{z^2+1}$$

$$\le\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}+\frac{1}{1+\frac{1}{y^2}}+\frac{z}{z^2+1}=\frac{1}{1+\tan^2\frac{A}{2}}+\frac{1}{1+\tan^2\frac{B}{2}}+\frac{\tan\frac{C}{2}}{1+\tan^2\frac{C}{2}}.$$

$$=\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}+\frac{1}{2}\sin C$$

$$=1+\frac{1}{2}(\cos A+\cos B+\sin C)\le 1+\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}=\frac{4+3\sqrt{3}}{4}.$$

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng $\dfrac{4+3\sqrt{3}}{4}$,

đạt tại $A=B=\dfrac{\pi}{6}, C=\dfrac{2\pi}{3}\Rightarrow x=y=2+\sqrt{3}; z=\sqrt{3}$.

CHỦ ĐỀ 2: KỸ THUẬT SỬ DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC SCHUR

Nội dung chủ đề này đề cập đến bất đẳng thức Schur và một số bài toán áp dụng dạng cơ bản nhất. Để chi tiết hơn các bạn có thể tìm đọc một số bài viết trong [1].[2].

A. NỘI DUNG PHƯƠNG PHÁP

Với mọi a,b,c,k là các số thực không âm ta có

$$a^k(a-b)(a-c)+b^k(b-c)(b-a)+c^k(c-a)(c-b)\ge 0$$

Với $k = 1$ ta có bất đẳng thức Schur bậc 3

$$a^3+b^3+c^3+3abc\ge ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a).$$

Một số dạng tương đương:

$$(x+y+z)^3+9xyz\ge 4(x+y+z)(xy+yz+zx);$$

$$(x+y+z)\left(x^2+y^2+z^2\right)+9xyz\ge 2(x+y+z)(xy+yz+zx).$$

Với $k=2$ ta có bất đẳng thức Schur bậc 4:

$$a^4+b^4+c^4+abc(a+b+c)\ge ab\left(a^2+b^2\right)+bc\left(b^2+c^2\right)+ca\left(c^2+a^2\right).$$

Trong quá trình sử dụng bất đẳng thức thường đưa về chứng minh các bất đẳng thức ràng buộc giữa p,q,r được gọi là phương pháp bất đẳng thức Schur kết hợp đổi biến p, q, r.

Các hằng đẳng thức cần lưu ý

Ta đặt $p=x+y+z;q=xy+yz+zx;r=xyz$, khi đó

$$ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)=pq-3r;$$

$$(a+b)(b+c)(c+a)=pq-r;$$

$$ab\left(a^2+b^2\right)+bc\left(b^2+c^2\right)+ca\left(c^2+a^2\right)=p^2q-2q^2-pr;$$

$$(a+b)(a+c)+(b+c)(b+a)+(c+a)(c+b)=p^2+q;$$

$$a^2+b^2+c^2=p^2-2q;$$

$$a^3+b^3+c^3=p^3-3pq+3r;$$

$$a^4+b^4+c^4=p^4-4p^2q+2q^2+4pr.$$

Nếu đặt $L=p^2q^2+18pqr-27r^2-4q^3-4p^3r$, khi đó

$$a^2b+b^2c+c^2a=\frac{pq+3r\pm\sqrt{L}}{2}$$

$$(a-b)(b-c)(c-a)=\pm\sqrt{L}$$

Ngoài ra để đánh giá r với p,q ta thường sử dụng hai bất đẳng thức:

$$r\ge \max\left\{0;\frac{p\left(4p-q^2\right)}{9}\right\}$$

$$r\ge \max\left\{0;\frac{\left(p^2-q\right)\left(4p-q^2\right)}{6p}\right\}$$

B. BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Cho a,b,c là các số thực dương có tổng bằng 3. Chứng minh

$$abc+\frac{12}{ab+bc+ca}\ge 15.$$

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức Schur bậc 3 ta có

$$(a+b+c)^3+9abc\ge 4(ab+bc+ca)(a+b+c)\Rightarrow 3abc\ge 4(ab+bc+ca)-9$$

Ta cần chứng minh $4(ab+bc+ca)-9+\dfrac{36}{ab+bc+ca}\ge 15$

$$\Leftrightarrow 4(ab+bc+ca)^2-24(ab+bc+ca)+36\ge 0\Leftrightarrow 4(ab+bc+ca-3)^2\ge 0$$

Bất đẳng thức luôn đúng. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài 2. Cho a,b,c là các số thực dương có tích bằng 1. Chứng minh

$$\frac{2}{a+b+c}+\frac{1}{3}\ge \frac{3}{ab+bc+ca}.$$

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức Schur bậc 3 ta có

$$(ab+bc+ca)^3+9a^2b^2c^2\ge 4(ab+bc+ca)abc(a+b+c)$$

$$\Leftrightarrow a+b+c\le \frac{(ab+bc+ca)^3+9}{4(ab+bc+ca)}$$

Vậy ta chỉ cần chứng minh $\dfrac{8(ab+bc+ca)}{(ab+bc+ca)^3+9}+\dfrac{1}{3}\ge \dfrac{3}{ab+bc+ca}$

Đặt $t=ab+bc+ca,\left(t\ge 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}=3\right)$ bất đẳng thức trở thành

$$\frac{8t}{t^3+9}+\frac{1}{3}\ge\frac{3}{t}\Leftrightarrow 24t^2+t\left(t^3+9\right)\ge 9\left(t^3+9\right)$$

$$\Leftrightarrow t^4-9t^3+24t^2+9t-81\ge 0\Leftrightarrow (t-3)\left(t^3-6t^2+6t+27\right)\ge 0$$

Luôn đúng với $t\ge 3$. Bất đẳng thức được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài 3. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện $a^2+b^2+c^2=3$.

Chứng minh rằng $12+9abc\ge 7(ab+bc+ca)$.

Lời giải

Đặt $t=a+b+c,\left(\sqrt{3}\le t\le 3\right)$

$$\Rightarrow ab+bc+ca=\frac{(a+b+c)^2-a^2-b^2-c^2}{2}=\frac{t^2-3}{2}.$$

Sử dụng bất đẳng thức Schur bậc 3 ta có

$$(a+b+c)^3+9abc\ge 4(a+b+c)(ab+bc+ca)\Rightarrow 9abc\ge 2t\left(t^2-3\right)-t^3.$$

Vậy ta chỉ cần chứng minh

$$12+2t\left(t^2-3\right)-t^3\ge\frac{7\left(t^2-3\right)}{2}\Leftrightarrow (t-3)^2(2t+5)\ge 0.$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài 4. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện $ab+bc+ca=3$.

Chứng minh rằng $a^3+b^3+c^3+7abc\ge 10$.

Lời giải

Ta có $a^3+b^3+c^3=(a+b+c)^3-3(a+b)(b+c)(c+a)$

$$=(a+b+c)^3-3(a+b+c)(ab+bc+ca)+3abc$$

Đặt $t=a+b+c,\left(t\ge\sqrt{3(ab+bc+ca)}=3\right)$ bất đẳng thức trở thành

$$10abc+t^3-9t-10\ge 0.$$

Theo bất đẳng thức Schur bậc 3 ta có

$$(a+b+c)^3+9abc\ge 4(a+b+c)(ab+bc+ca)\Rightarrow 9abc\ge 12t-t^3.$$

+ Nếu $t\ge 2\sqrt{3}\Rightarrow 10abc+t^3-9t-10>12t-9t-10=3t-10>0$.

+ Nếu $3\le t\le 2\sqrt{3}\Rightarrow abc\ge\frac{12t-t^3}{9}$.

Ta cần chứng minh $10.\dfrac{12t-t^3}{9}+t^3-9t-10\geq 0$

$$\Leftrightarrow (t-3)\left(-t^2-3t+30\right)\geq 0$$

$$\Leftrightarrow (t-3)\left(3(4-t)+\left(16-t^2\right)+2\right)\geq 0$$

Luôn đúng. Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài 5. Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh

$$(a+b+c)(ab+bc+ca)\left(a^3+b^3+c^3\right)\leq\left(a^2+b^2+c^2\right)^3.$$

Lời giải

Chuẩn hoá $p=a+b+c=1$. Đặt $q=ab+bc+ca; r=abc$.

Ta có $a^2+b^2+c^2=1-2q; a^3+b^3+c^3=1-3q+3r$.

Khi đó ta cần chứng minh: $q(1-3q+3r)\leq(1-2q)^3$.

Sử dụng $q^2=(ab+bc+ca)^2\geq 3abc(a+b+c)=3r$.

Do đó $q(1-3q+3r)=q-3q^2+3qr\leq q-3q^2+q^3$.

Vậy chỉ cần chứng minh $q-3q^2+q^3\leq(1-2q)^3\Leftrightarrow(1-q)(3q-1)^2\geq 0$.

Bất đẳng thức luôn đúng và ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bài 5. Cho *x,y,z* là các số thực không âm thỏa mãn $(x+y)(y+z)(z+x)>0$ và $xy+yz+zx=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{\sqrt{x(x+y)(x+z)}+\sqrt{y(y+z)(y+x)}+\sqrt{z(z+x)(z+y)}}{\sqrt{x+y+z}}.$$

Lời giải

Ta có: $\sqrt{x(x+y)(x+z)}=\sqrt{x\left(x^2+x(y+z)+yz\right)}=\sqrt{x^2(x+y+z)+xyz}$.

Suy ra $\dfrac{\sqrt{x(x+y)(x+z)}}{\sqrt{x+y+z}}=\sqrt{x^2+\dfrac{xyz}{x+y+z}}$.

Tương tự ta có:

$$\frac{\sqrt{y(y+z)(y+x)}}{\sqrt{x+y+z}}=\sqrt{y^2+\frac{xyz}{x+y+z}};\frac{\sqrt{z(z+x)(z+y)}}{\sqrt{x+y+z}}=\sqrt{z^2+\frac{xyz}{x+y+z}}.$$

Suy ra $P=\sqrt{x^2+\frac{xyz}{x+y+z}}+\sqrt{y^2+\frac{xyz}{x+y+z}}+\sqrt{z^2+\frac{xyz}{x+y+z}}$.

Sử dụng bất đẳng thức Mincopski ta có:

$$P\ge\sqrt{\left(x+y+z\right)^2+\left(3\sqrt{\frac{xyz}{x+y+z}}\right)^2}=\sqrt{\left(x+y+z\right)^2+\frac{9xyz}{x+y+z}}.$$

Theo bất đẳng thức schur ta có:

$$\left(x+y+z\right)^3+9xyz\ge 4\left(x+y+z\right)\left(xy+yz+zx\right)$$

$$\Rightarrow\left(x+y+z\right)^2+\frac{9xyz}{x+y+z}\ge 4\left(xy+yz+zx\right)=4$$

Do đó $P\ge 2$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Bài 6. Cho *x,y,z* là các số thực không âm thỏa mãn $x+y+z=1$ và $xy+yz+zx>0$; k là một số thực dương.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{k\left(x^2+y^2+z^2\right)+9xyz}{xy+yz+zx}$.

Lời giải

Ta có:

$$P=\frac{k\left(x+y+z\right)^2-2k\left(xy+yz+zx\right)+9xyz}{xy+yz+zx}=\frac{k}{xy+yz+zx}+\frac{9xyz}{xy+yz+zx}-2k.$$

Theo bất đẳng thức Schur ta có:

$$\left(x+y+z\right)^3+9xyz\ge 4\left(x+y+z\right)\left(xy+yz+zx\right)$$

$$\Leftrightarrow 1+9xyz\ge 4\left(xy+yz+zx\right)\Rightarrow\frac{9xyz}{zy+yz+zx}\ge 4-\frac{1}{xy+yz+zx}$$

Suy ra $P\ge\frac{k}{xy+yz+zx}+4-\frac{1}{xy+yz+zx}-2k=\frac{k-1}{xy+yz+zx}+4-2k$.

__**TH1:**__ Nếu $k>1\Rightarrow k-1>0; xy+yz+zx\le\frac{\left(x+y+z\right)^2}{3}=\frac{1}{3}\Rightarrow P\ge 3\left(k-1\right)+4-2k=k+1$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=\frac{1}{3}$.

__**TH2:**__ Nếu $0<k\le 1$ khi đó sử dụng: $x^2+y^2+z^2+\frac{9xyz}{x+y+z}\ge 2\left(xy+yz+zx\right)$.

Ta có:

$x^2+y^2+z^2+9xyz \ge 2(xy+yz+zx) \Leftrightarrow k(x^2+y^2+z^2)+9kxyz \ge 2k(xy+yz+zx)$.

Mặt khác: $k \le 1 \Rightarrow k(x^2+y^2+z^2)+9xyz \ge k(x^2+y^2+z^2)+9kxyz$.

Do đó $P=\dfrac{k(x^2+y^2+z^2)+9kxyz}{xy+yz+zx} \ge 2k$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=\dfrac{1}{2}, z=0$ hoặc các hoán vị.

Bài 7. Cho a,b,c là các số thực không âm thoả mãn điều kiện $a^2+b^2+c^2=3$.

Chứng minh rằng $(2-ab)(2-bc)(2-ca) \ge 1$.

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$(2-ab)(2-bc)(2-ca)-1 \ge 0$

$\Leftrightarrow 7-4(ab+bc+ca)+2abc(a+b+c)-a^2b^2c^2 \ge 0$

$\Leftrightarrow (a+b+c)^2-(a+b+c-abc)^2-4(ab+bc+ca)+7 \ge 0$

Đặt $t=a+b+c, (\sqrt{3} \le t \le 3) \Rightarrow ab+bc+ca=\dfrac{(a+b+c)^2-a^2-b^2-c^2}{2}=\dfrac{t^2-3}{2}$.

Sử dụng bất đẳng thức Schur bậc 3 ta có

$(a+b+c)^3+9abc \ge 4(a+b+c)(ab+bc+ca)$

$\Rightarrow 9abc \ge 2t(t^2-3)-t^3=t^3-6t \Rightarrow abc \ge \dfrac{t^3-6t}{9}$

Chú ý $abc \le \sqrt{\left(\dfrac{a^2+b^2+c^2}{3}\right)^3}=1$

$$a+b+c-abc \ge 3\sqrt[3]{abc}-abc \ge 3abc-abc=2abc \ge 0$$

$$a+b+c-abc \le t-\frac{t^3-6t}{9}=\frac{15t-t^3}{9}$$

Vậy ta chứng minh $t^2-\left(\dfrac{15t-t^3}{9}\right)^2-2(t^2-3)+7 \ge 0$

$$\Leftrightarrow 81.13-81t^2-t^2(t^2-15)^2 \ge 0$$

$$\Leftrightarrow (9-t^2)\left[9+(9-t^2)(12-t^2)\right] \ge 0$$

Luôn đúng do $\sqrt{3} \le t \le 3$. Bất đẳng thức được chứng minh đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Bài 8. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện $abc = 1$.

Chứng minh rằng $\sqrt[3]{\dfrac{b+c}{2a}} + \sqrt[3]{\dfrac{c+a}{2b}} + \sqrt[3]{\dfrac{a+b}{2c}} \le \dfrac{5(a+b+c)+9}{8}$.

Lời giải

Đặt $a = x^3, b = y^3, c = z^3 \Rightarrow xyz = 1$.

Bất đẳng thức đã cho trở thành:

$$yz\sqrt[3]{\frac{y^3+z^3}{2}} + zx\sqrt[3]{\frac{z^3+x^3}{2}} + xy\sqrt[3]{\frac{x^3+y^3}{2}} \le \frac{5\left(x^3+y^3+z^3\right)+9}{8}.$$

Sử dụng bất đẳng thức AM – GM ta có

$$yz\sqrt[3]{\frac{y^3+z^3}{2}} = \sqrt[3]{\frac{y+z}{2}.yz.yz.yz.\left(y^2-yz+z^2\right)}$$

$$\le \sqrt[3]{\frac{y+z}{2}.\left(\frac{3yz+y^2-yz+z^2}{4}\right)^4} = \left(\frac{y+z}{2}\right)^3$$

Tương tự ta có $zx\sqrt[3]{\dfrac{z^3+x^3}{2}} \le \left(\dfrac{z+x}{2}\right)^3 ; xy\sqrt[3]{\dfrac{x^3+y^3}{2}} \le \left(\dfrac{x+y}{2}\right)^3$.

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên ta được

$$yz\sqrt[3]{\frac{y^3+z^3}{2}} + zx\sqrt[3]{\frac{z^3+x^3}{2}} + xy\sqrt[3]{\frac{x^3+y^3}{2}} \le \frac{(x+y)^3+(y+z)^3+(z+x)^3}{8}.$$

Vậy ta chỉ cần chứng minh

$$(x+y)^3+(y+z)^3+(z+x)^3 \le 5\left(x^3+y^3+z^3\right)+9$$

$$\Leftrightarrow x^3+y^3+z^3+3 \ge xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x)$$

$$\Leftrightarrow x^3+y^3+z^3+3xyz \ge xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x)$$

Bất đẳng thức cuối là bất đẳng thức Schur bậc 3 nên ta có đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

C. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1. Cho a,b,c là các số thực dương có tổng bằng 1. Chứng minh

$$2\left(a^3+b^3+c^3\right)+3\left(a^2+b^2+c^2\right)+12abc\geq\frac{5}{3}.$$

Bài 2. Tìm hằng số dương k lớn nhất thoả mãn bất đẳng thức với mọi a,b,c là các số không âm có tổng bằng 3.

$$a^3+b^3+c^3+kabc\geq 3+k.$$

Bài 3. Chứng minh với a,b,c là các số thực dương có tích bằng 1, ta có

$$\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+6\geq 2\left(a+b+c+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

Bài 4. Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh

$$\sqrt[3]{\frac{a^2+bc}{abc\left(b^2+c^2\right)}}+\sqrt[3]{\frac{b^2+ca}{abc\left(c^2+a^2\right)}}+\sqrt[3]{\frac{c^2+ab}{abc\left(a^2+b^2\right)}}\geq\frac{9}{a+b+c}.$$

Bài 5. Cho a,b,c là các số thực dương có tổng bằng 3. Chứng minh

$$\frac{1}{9-ab}+\frac{1}{9-bc}+\frac{1}{9-ca}\leq\frac{3}{8}.$$

Bài 6. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện $a^2+b^2+c^2=3$.

Chứng minh rằng $5\left(a+b+c\right)+\dfrac{3}{abc}\geq 18$.

Bài 7. Cho a,b,c là các số thực không âm thoả mãn điều kiện $a^2+b^2+c^2=3$.

Chứng minh rằng $21+18abc\geq 13\left(ab+bc+ca\right)$.

Bài 8. Cho a,b,c là các số thực không âm thoả mãn điều kiện $a^2+b^2+c^2=3$.

Chứng minh rằng $\dfrac{1}{5-2ab}+\dfrac{1}{5-2bc}+\dfrac{1}{5-2ca}\leq 1$.

D. HƯỚNG DẪN GIẢI – ĐÁP SỐ

Bài 1. Bất đẳng thức tương đương với

$$2\left(a^3+b^3+c^3\right)+3\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(a+b+c\right)+12abc\geq\frac{5}{3}\left(a+b+c\right)^3$$

$$\Leftrightarrow\frac{10}{3}\left(a^3+b^3+c^3\right)+2abc\geq 2ab\left(a+b\right)+2bc\left(b+c\right)+2ca\left(c+a\right)$$

Bất đẳng thức trên là tổng của hai bất đẳng thức

$$\frac{4}{3}\left(a^3+b^3+c^3\right)\ge 4abc$$

$$2\left(a^3+b^3+c^3\right)+6abc\ge 2ab\left(a+b\right)+2bc\left(b+c\right)+2ca\left(c+a\right)$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Bài 2. Cho $a=b=\frac{3}{2},c=0\Rightarrow k+3\le\frac{27}{4}\Rightarrow k\le\frac{15}{4}$.

Ta chứng minh $k=\frac{15}{4}$ là giá trị cần tìm.

Thật vậy bất đẳng thức trở thành

$$a^3+b^3+c^3+\frac{15}{4}abc\ge\frac{27}{4}$$

$$\Leftrightarrow 4\left(a^3+b^3+c^3\right)+15abc\ge\left(a+b+c\right)^3 .$$

$$\Leftrightarrow 3\left(a^3+b^3+c^3+3abc\right)\ge 3\left[ab\left(a+b\right)+bc\left(b+c\right)+ca\left(c+a\right)\right]$$

Đây chính là bất đẳng thức Schur bậc 3.

Bài 3. Theo giả thiết tồn tại các số thực dương x,y,z sao cho $a=\frac{x}{y},b=\frac{y}{z},c=\frac{z}{x}$.

Bất đẳng thức trở thành

$$x^3+y^3+z^3+3xyz\ge xy\left(x+y\right)+yz\left(y+z\right)+zx\left(z+x\right).$$

Đây chính là bất đẳng thức Schur bậc 3.

Bài 4. Sử dụng bất đẳng thức AM – GM ta có

$$\sqrt[3]{\frac{abc\left(b^2+c^2\right)}{a^2+bc}}\le\frac{b+c+\frac{a\left(b^2+c^2\right)}{a^2+bc}}{3}=\frac{ab\left(a+b\right)+bc\left(b+c\right)+ca\left(c+a\right)}{3\left(a^2+bc\right)}$$

$$\Rightarrow\sqrt[3]{\frac{a^2+bc}{abc\left(b^2+c^2\right)}}\ge\frac{3\left(a^2+bc\right)}{ab\left(a+b\right)+bc\left(b+c\right)+ca\left(c+a\right)}$$

Tương tự cho 2 căn thức còn lại

Và ta chỉ cần chứng minh $\frac{3\left(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca\right)}{ab\left(a+b\right)+bc\left(b+c\right)+ca\left(c+a\right)}\ge\frac{9}{a+b+c}$

$$\Leftrightarrow a^3+b^3+c^3+3abc\ge ab\left(a+b\right)+bc\left(b+c\right)+ca\left(c+a\right).$$

Bất đẳng thức cuối chính là bất đẳng thức Schur bậc 3.

Bài 5. Quy đồng và rút gọn với điều kiện $a+b+c=3$ bất đẳng thức đã cho tương đương với $a^2b^2c^2-19abc+33(ab+bc+ca)-81\geq 0$.

Đặt $p=a+b+c=3; q=ab+bc+ca; r=abc$.

Ta cần chứng minh $r^2-19r+33q-81\geq 0$.

Theo bất đẳng thức Schur bậc ba ta có

$$r\geq \max\left\{0;\frac{p\left(4p-q^2\right)}{9}\right\}=\max\left\{0;\frac{12-q^2}{3}\right\}.$$

\+ Nếu $q\geq 2\sqrt{3}\Rightarrow 33q+r^2>33q>100\geq 19r+81$ bất đẳng thức đúng.

\+ Nếu $q\leq 2\sqrt{3}\Rightarrow r\geq \frac{12-q^2}{3}\Rightarrow q\geq \sqrt{3(4-r)}$.

Vậy ta chỉ cần chứng minh $r^2-19r+33\sqrt{3(4-r)}-81\geq 0$

$$\Leftrightarrow 33\sqrt{3(4-r)}\geq 81+19r-r^2$$

$$\Leftrightarrow 33^2.3(4-r)\geq \left(81+19r-r^2\right)^2$$

$$\Leftrightarrow (1-r)\left(r^3-37r^2+162r+6507\right)\geq 0$$

Bất đẳng thức cuối đúng vì $r\leq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3=1$.

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài 7. Đặt $t=a+b+c,\left(\sqrt{3}\leq t\leq 3\right)\Rightarrow ab+bc+ca=\frac{t^2-3}{2}$.

Theo bất đẳng thức Schur bậc 3 ta có

$$(a+b+c)^3+9abc\geq 4(a+b+c)(ab+bc+ca)\Rightarrow 9abc\geq 2t\left(t^2-3\right)-t^3=t^3-6t.$$

\+ Nếu $t\leq\sqrt{6}\Rightarrow ab+bc+ca\leq \frac{3}{2}\Rightarrow 21+18abc-13(ab+bc+ca)\geq 21-\frac{13.3}{2}>0$.

\+ Nếu $\sqrt{6}\leq t\leq 3\Rightarrow 21+18abc-13(ab+bc+ca)\geq$

$$\geq 21+2\left(t^3-6t\right)-\frac{13\left(t^2-3\right)}{2}$$

$$=\frac{4t^3-13t^2-24t+81}{2}=\frac{(t-3)\left(4t^2-t+27\right)}{2}\geq 0,\forall t\geq 3$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

CHỦ ĐỀ 3: KỸ THUẬT DỒN BIẾN

A. NỘI DUNG PHƯƠNG PHÁP

Một bất đẳng thức đối xứng 3 biến a,b,c ta ký hiệu là $P(a,b,c)$ ta phải chứng minh $P(a,b,c)\ge 0$.

Dồn biến chính là một cách tách bất đẳng thức cần chứng minh thành hai bất đẳng thức đơn giản hơn tức là đánh giá $P(a,b,c)$ qua một biểu thức trung gian chẳng hạn $P\left(a,\sqrt{bc},\sqrt{bc}\right),P\left(a,\frac{b+c}{2},\frac{b+c}{2}\right),P\left(a,\sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}},\sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}}\right),...$ sau đó đánh giá biểu thức trung gian.

Như vậy tóm tắt theo 2 bước như sau :

<u>Bước 1 :</u> Chứng minh $P(a,b,c)\ge P_{TG}$ và cần sắp thứ tự các biến để bất đẳng thức đúng.

<u>Bước 2 :</u> Chứng minh $P_{TG}\ge 0$.

Thông thường thực hiện bước 2 trước để kiểm tra tính đúng của phương pháp dồn biến, sau đó thực hiện bước 1, chú ý sắp thứ tự các biến chẳng hạn $a=\min\{a,b,c\}$ hoặc $a=\max\{a,b,c\}$.

Dưới đây tôi trình bày một số phương pháp dồn biến cụ thể phụ thuộc vào điều kiện bài toán.

1. Nếu điều kiện bài toán cho tổng 3 số $a+b+c=k$

Ta tìm cách đánh giá $P(a,b,c)-P\left(a,\frac{b+c}{2},\frac{b+c}{2}\right)\ge 0$

$$P\left(a,\frac{b+c}{2},\frac{b+c}{2}\right)=P\left(a,\frac{k-a}{2},\frac{k-a}{2}\right)\ge 0$$

Khi đó ta cần sắp thứ tự $a=\min\{a,b,c\}$ hoặc $a=\max\{a,b,c\}$.

Ví dụ 1. Cho a, b, c là các số thực dương thoả mãn điều kiện a + b + c = 1.

Chứng minh rằng $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+48(ab+bc+ca)\ge 25$.

Lời giải

Ta cần chứng minh: $P(a,b,c)=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+48(ab+bc+ca)-25\ge 0\ (1)$.

Không mất tính tổng quát, có thể giả sử $a=\max\{a,b,c\}$.

Để chứng minh (1), ta sẽ lần lượt chứng minh

i) $P(a,b,c)\ge P(a,\frac{b+c}{2},\frac{b+c}{2})$ với $a,b,c>0,a+b+c=1,a=\max\{a,b,c\}$.

ii) $P\left(a,t,t\right)\ge 0$ với $a+2t=1$.

Để chứng minh i), ta xét

$$P(a,b,c)-P(a,\frac{b+c}{2},\frac{b+c}{2})=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{4}{b+c}+48\left[bc-\left(\frac{b+c}{2}\right)^2\right]$$

$$=(b-c)^2\left[\frac{1}{bc(b+c)}-12\right]$$

Vì $a=\max\left\{a,b,c\right\}\Rightarrow a\ge\frac{1}{3},b+c\le\frac{2}{3}\Rightarrow bc\left(b+c\right)\le\frac{\left(b+c\right)^3}{4}\le\frac{2}{27}$.

Suy ra $\frac{1}{bc(b+c)}-12\ge\frac{27}{2}-12>0$.

Vậy i) đã được chứng minh.

Để chứng minh ii), ta có

$$P(a,t,t)=\frac{1}{a}+\frac{2}{t}+48(2at+t^2)-25$$

$$=\frac{1}{1-2t}+\frac{2}{t}+48(2(1-2t)t+t^2)-25$$

$$=\frac{2(4t-1)^2(3t-1)^2}{(1-2t)t}\ge 0$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $t=\frac{1}{4}$ hoặc $t=\frac{1}{3}$ tương ứng với

$$a=\frac{1}{2},b=c=\frac{1}{4}\text{ hoặc } a=b=c=\frac{1}{3}.$$

Bất đẳng thức được chứng minh.

Nhận xét.

1) Khi thực hành phương pháp dồn biến, nên bắt đầu từ bất đẳng thức ii) trước với các lý do sau:

+ Tìm được các điểm nghi vấn xảy ra dấu bằng. Biết được điểm xảy ra dấu bằng, chúng ta có thể tìm được các cách tiếp cận thích hợp.

+ Nếu không chứng minh được ii) thì việc dồn biến là vô ích. Vì vậy phải làm bước này trước.

2) Bất đẳng thức $P(a,b,c)\ge P(a,\frac{b+c}{2},\frac{b+c}{2})$ nói chung không đúng với mọi a, b, c.

Sử dụng tính đối xứng của bất đẳng thức, ta có thể sắp xếp thứ tự a, b, c để bất đẳng thức này đúng.

3) Việc chọn giá trị để dồn biến đến phụ thuộc vào biểu thức của P và điều kiện ràng buộc. Trong trường hợp bài toán trên, do có điều kiện a + b + c = 1 nên ta bắt buộc phải dồn biến đến các biến mà điều kiện này không thay đổi.
4) Khéo léo đánh giá điều kiện của biến ta hoàn toàn dồn được biến về chứng minh bất đẳng thức trong trường hợp hai biến bằng nhau(xem ví dụ 2).

Ví dụ 2. Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$a^2+b^2+c^2+abc+5\ge 3(a+b+c).$$

Lời giải

Ta cần chứng minh $P(a,b,c)=a^2+b^2+c^2+abc+5-3(a+b+c)\ge 0$.

Giả sử c là số nhỏ nhất trong ba số a, b, c. Xét hiệu

$$P(a,\,b,\,c)-P(\sqrt{ab},\sqrt{ab},c)=\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2\left[\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2-3\right]$$

$$P(a,\,b,\,c)-P\left(\frac{a+b}{2},\frac{a+b}{2},c\right)=\frac{(a-b)^2(2-c)}{4}$$

\+ Nếu $c\ge 1\Rightarrow \sqrt{a}+\sqrt{b}\ge 2\Rightarrow P(a,b,c)\ge P(\sqrt{ab},\sqrt{ab},c)$.

\+ Nếu $c<1\Rightarrow P(a,b,c)\ge P\left(\frac{a+b}{2},\frac{a+b}{2},c\right)$.

Do vậy ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức trong trường hợp hai số bằng nhau.

$$P(\sqrt{ab},\sqrt{ab},c)=t^2(c+2)-6t+c^2-3c+5, t=\sqrt{ab}.$$

Ta có $\Delta'_t=9-(c+2)\left(c^2-3c+5\right)=-(c-1)^2(c+1)\le 0$.

Điều đó chứng tở bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Nhận xét. Ngoài ra ta có thể chứng minh đơn giản bằng Nguyên lý Dirichlet.

Trong ba số $(a-1),(b-1),(c-1)$ luôn có hai số cùng dấu giả sử là $(a-1)(b-1)\ge 0\Rightarrow ab\ge a+b-1\Rightarrow abc\ge ac+bc-c$.

Vậy ta chỉ cần chứng minh $a^2+b^2+c^2+5+ac+bc-c\ge 3(a+b+c)$.

Ta có $VT\ge \frac{1}{2}(a+b)^2-2ab+(c-3)(a+b)+c^2-4c+5\ge 0$.

Chú ý $\Delta_{a+b}=(c-3)^2-2\left(c^2-4c+5\right)=-(c-1)^2\le 0$ ta có đpcm.

2. Nếu điều kiện bài toán cho tích ba số bằng 1

Ta tìm cách đánh giá $P(a,b,c)\ge P\left(a,\sqrt{bc},\sqrt{bc}\right)\ge 0$

$P\left(a,\sqrt{bc},\sqrt{bc}\right)=P\left(\frac{1}{x^2},x,x\right)\ge 0$ với $x=\sqrt{bc}$.

Khi đó ta cần sắp thứ tự $a=\min\{a,b,c\}$ hoặc $a=\max\{a,b,c\}$.

Chú ý. Một số trường hợp dồn biến về $f(ta,b/t,c)$ với $t\in\left[\sqrt{\frac{b}{a}};1\right]$.

Ví dụ 1. Cho a,b,c là các số thực dương có tích bằng 1.

Chứng minh rằng $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{6}{a+b+c}\ge 5$.

Lời giải

Ta cần chứng minh: $P(a,b,c)=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{6}{a+b+c}-5\ge 0$ (1).

Không mất tính tổng quát giả sử $a=max\{a,b,c\}\Rightarrow a\ge\sqrt{bc}$.

Để chứng minh bất đẳng thức (1) ta thực hiện chứng minh 2 bất đẳng thức sau:

i) $P(a,b,c)\ge P\left(a,\sqrt{bc},\sqrt{bc}\right)$ với $abc=1, a=\max\{a,b,c\}$.

ii) $P\left(\frac{1}{x^2},x,x\right)\ge 0$ với $x=\sqrt{bc}$.

Chứng minh bất đẳng thức i)

Ta có:

$$P(a,b,c)-P(a,\sqrt{bc},\sqrt{bc})=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{6}{a+b+c}-\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{\sqrt{bc}}+\frac{6}{a+2\sqrt{bc}}\right)$$

$$=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{2}{\sqrt{bc}}+\frac{6\left(2\sqrt{bc}-b-c\right)}{(a+b+c)\left(a+2\sqrt{bc}\right)}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)^2}{bc}-\frac{6\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)^2}{(a+b+c)\left(a+2\sqrt{bc}\right)}$$

$$\frac{\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)^2\left[(a+b+c)\left(a+2\sqrt{bc}\right)-6bc\right]}{bc(a+b+c)\left(a+2\sqrt{bc}\right)}$$

Do $a\ge\sqrt{bc}, b+c\ge 2\sqrt{bc}$.

$$\Rightarrow (a+b+c)\left(a+2\sqrt{bc}\right)-6bc\ge 3\sqrt{bc}\left(a+2\sqrt{bc}\right)-6bc=3a\sqrt{bc}>0$$

Do đó $P(a,b,c)\ge P(a,\sqrt{bc},\sqrt{bc})=f\left(\frac{1}{x^2},x,x\right)$ với $x=\sqrt{bc}$.

Chứng minh bất đẳng thức ii)

Ta chỉ cần chứng minh $x^2+\frac{2}{x^2}+\frac{6}{2x+\frac{1}{x^2}}-5\ge 0$.

$\Leftrightarrow (x-1)^2\left(2x^4+4x^3-4x^2-x+2\right)\ge 0$ (luôn đúng).

Bất đẳng thức được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=1\Leftrightarrow a=b=c=1$.

3. Nếu điều kiện bài toán cho tổng bình phương của 3 số $a^2+b^2+c^2=k$

Ta tìm cách đánh giá $P(a,b,c)-P\left(a,\sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}},\sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}}\right)\ge 0$

$$P\left(a,\sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}},\sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}}\right)=P\left(a,\sqrt{\frac{k-a^2}{2}},\sqrt{\frac{k-a^2}{2}}\right)\ge 0$$

Khi đó ta cần sắp thứ tự $a=\min\{a,b,c\}$ hoặc $a=\max\{a,b,c\}$.

Ví dụ 1. Cho *a,b,c* là các số thực không âm thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=3$.

Chứng minh rằng $a+b+c\ge a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$.

Lời giải

Không mất tính tổng quát giả sử

$$a\le b\le c\Rightarrow a\le 1, b^2+c^2\ge 2\Rightarrow b+c\ge\sqrt{b^2+c^2}=\sqrt{2}.$$

Ta cần chứng minh:

$f(a,b,c)=a+b+c-a^2b^2-b^2c^2-c^2a^2=a+b+c-a^2\left(b^2+c^2\right)-b^2c^2\ge 0$.

Xét

$$f(a,b,c)-f\left(a,\sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}},\sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}}\right)=b+c-2\sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}}-b^2c^2+\left(\frac{b^2+c^2}{2}\right)^2$$

$$=\frac{\left(b^2-c^2\right)^2}{4}+\frac{(b+c)^2-2\left(b^2+c^2\right)}{b+c+\sqrt{2\left(b^2+c^2\right)}}$$

$$=(b-c)^2\left[\frac{(b+c)^2}{4}-\frac{1}{b+c+\sqrt{2\left(b^2+c^2\right)}}\right]\ge 0$$

Vì $\frac{(b+c)^2}{4}-\frac{1}{b+c+\sqrt{2(b^2+c^2)}}=\frac{(b+c)^3+(b+c)^2\sqrt{2(b^2+c^2)}-4}{4\left(b+c+\sqrt{2(b^2+c^2)}\right)}$

$$\geq \frac{2\sqrt{2}+2\sqrt{2.2}-4}{4\left(b+c+\sqrt{2(b^2+c^2)}\right)}>0$$

Vậy ta chỉ cần chứng minh

$$f\left(a,\sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}},\sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}}\right)\geq 0$$

$$\Leftrightarrow f\left(a,\sqrt{\frac{3-a^2}{2}},\sqrt{\frac{3-a^2}{2}}\right)\geq 0$$

$$\Leftrightarrow a+\sqrt{2(3-a^2)}\geq a^2(3-a^2)+\frac{1}{4}(3-a^2)^2$$

$$\Leftrightarrow (a-1)^2\left[\frac{3}{4}(a+1)^2-\frac{3}{3-a+\sqrt{2(3-a^2)}}\right]\geq 0 \text{ (luôn đúng).}$$

Vì $\frac{3}{4}(a+1)^2-\frac{3}{3-a+\sqrt{2(3-a^2)}}\geq \frac{3}{4}(a+1)^2-\frac{3}{4}=\frac{3}{4}(a^2+2a)\geq 0, \forall a\in[0;1]$.

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

4. Dồn biến bằng hàm số

Dưới đây tôi trình bày kỹ thuật dồn biến bằng hàm số dạng đơn giản nhất khi điều kiện bài toán cho tổng các số không đổi $(a+b+c=k)$ dấu bằng đạt tại một biến bằng 0 hoặc 2 số bằng nhau.

Khi đó sắp thứ tự lại biến số giả sử $a\geq b\geq c$ lúc đó dấu bằng đạt tại

$$c=0\Rightarrow bc=0 \text{ hoặc } b=c\Rightarrow bc=\left(\frac{b+c}{2}\right)^2.$$

nên ta đặt $\begin{cases} t=b+c \\ s=bc \end{cases}, 0\leq s\leq \frac{t^2}{4}$ **.**

Đưa bất đẳng thức cần chứng minh về dạng hàm số f(s) và chỉ ra rằng f(s) nghịch biến hoặc đồng biến trên $\left[0;\frac{t^2}{4}\right]$.

+ Nếu dấu bằng đạt tại một số bằng 0 ta cần chỉ ra rằng f(s) nghịch biến tức $f(s) \le f(0)$, lúc đó đưa về chứng minh bất đẳng thức với 2 biến a và t với $a+t=k$. Vậy bài toán đưa về chứng minh bất đẳng thức một biến số.
+ Nếu dấu bằng đạt tại 2 số bằng nhau khi đó $b=c \Rightarrow s=\frac{t^2}{4}$ tức f(s) là hàm đồng biến.

Ví dụ 1. Cho a,b,c là các số thực không âm có tổng bằng 1. Chứng minh

$$\left(a^2+b^2\right)\left(b^2+c^2\right)\left(c^2+a^2\right) \le \frac{1}{32}.$$

Lời giải

Không mất tính tổng quát giả sử $a \ge b \ge c$.

Gọi P là biểu thức vế trái ta có

$$P=\left[(b+c)^2-2bc\right].\left[a^4+a^2\left((b+c)^2-2bc\right)+b^2c^2\right].$$

Đặt $b+c=t, bc=s, s \in \left[0;\frac{t^2}{4}\right]$ ta có

$$P=f(s)=\left(t^2-2s\right)\left[a^4+a^2\left(t^2-2s\right)+s^2\right].$$

Xét hàm số $f(s)=\left(t^2-2s\right)\left[a^4+a^2\left(t^2-2s\right)+s^2\right]$ với $s \in \left[0;\frac{t^2}{4}\right]$ ta được

$$f'(s)=-2\left[a^4+a^2\left(t^2-2s\right)+s^2\right]+2\left(t^2-2s\right)\left(s-a^2\right).$$

Chú ý $s \le \frac{t^2}{4} \le \frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{1}{9} \le a^2 \Rightarrow s-a^2 \le 0 \Rightarrow f'(s) \le 0$.

Do đó f(s) là hàm nghịch biến trên đoạn $\left[0;\frac{t^2}{4}\right]$.

Suy ra $P=f(s) \le f(0)=t^2\left(a^4+a^2t^2\right)=a^2t^2\left(a^2+t^2\right)$

$$=t^2(1-t)^2\left[t^2+(1-t)^2\right] \le \frac{1}{32}$$

Chú ý khảo sát hàm một biến $g(t)=t^2(1-t)^2\left[t^2+(1-t)^2\right]$ trên đoạn $\left[0;\frac{2}{3}\right]$ ta có kết quả trên.

Bất đẳng thức được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=\frac{1}{2}, c=0$ hoặc các hoán vị.

<u>Cách 2:</u> Giả sử $c=\min\{a,b,c\}\Rightarrow b^2+c^2\le\left(b+\frac{c}{2}\right)^2;a^2+c^2\le\left(a+\frac{c}{2}\right)^2$ và

$$a^2+b^2\le\left(a+\frac{c}{2}\right)^2+\left(b+\frac{c}{2}\right)^2.$$

Đặt $x=a+\frac{c}{2},y=b+\frac{c}{2}\Rightarrow x+y=1;P\le x^2y^2\left(x^2+y^2\right)$.

Khi đó sử dụng bất đẳng thức AM – GM cho 2 số dương ta được

$$P\le x^2y^2\left(x^2+y^2\right)=\frac{xy}{2}.2xy\left(x^2+y^2\right)\le\frac{1}{2}\left(\frac{x+y}{2}\right)^2\left(\frac{2xy+x^2+y^2}{2}\right)^2=\frac{1}{32}.$$

Bài tập tương tự

Cho a,b,c là các số thực không âm có tổng bằng 1. Chứng minh

$$\left(a^3+b^3\right)\left(b^3+c^3\right)\left(c^3+a^3\right)\le\frac{1}{256}.$$

Ví dụ 2. Cho a,b,c là các số thực dương có tổng bằng 3. Chứng minh

$$\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}+\frac{ab}{c}+\frac{9}{4}abc\ge\frac{21}{4}.$$

Lời giải

Gọi P là biểu thức vế trái và giả sử $a=\max\{a,b,c\}$ ta có

$$P=\frac{bc}{a}+a\left(\frac{b^2+c^2}{bc}\right)+\frac{9}{4}abc=\frac{s}{a}+\frac{a\left(t^2-2s\right)}{s}+\frac{9}{4}as.$$

Xét hàm số $f(s)=\frac{s}{a}+\frac{a\left(t^2-2s\right)}{s}+\frac{9}{4}as$ trên nửa khoảng $\left(0;\frac{t^2}{4}\right]$ ta có

$$f'(s)=\frac{1}{a}-\frac{at^2}{s^2}+\frac{9}{4}a=\frac{s^2\left(9a^2+4\right)-4a^2t}{4as^2}\le\frac{\frac{t^2}{16}\left(9a^2+4\right)-4a^2t}{4as^2}$$

$$=t.\frac{\left(9a^2+4\right)t-64a^2}{64as^2}\le t.\frac{2\left(9a^2+4\right)-64a^2}{64as^2}=t.\frac{8-46a^2}{64as^2}<0$$

Vậy f(s) là hàm nghịch biến trên $\left(0;\frac{t^2}{4}\right]$ suy ra

$$P=f(s)\ge f\left(\frac{t^2}{4}\right)=\frac{t^2}{4a}+2a+\frac{9at^2}{16}=\frac{(3-a)^2}{4a}+2a+\frac{9a(3-a)^2}{16}.$$

Chú ý. $\dfrac{(3-a)^2}{4a}+2a+\dfrac{9a(3-a)^2}{16}=\dfrac{9(a-1)^2(a-2)^2}{16a}+\dfrac{21}{4}\ge\dfrac{21}{4}$.

Bất đẳng thức được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $(a;b;c)=(1;1;1);\left(2;\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$ hoặc các hoán vị.

Ví dụ 3. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện $a^2+b^2+c^2=3$.

Chứng minh rằng $a+b+c+\dfrac{7}{20}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)\ge\dfrac{81}{20}$.

Lời giải

Không mất tính tổng quát giả sử $a=\max\{a,b,c\}$.

Đặt $t=b^2+c^2; s=bc, s\le\dfrac{t}{2}$.

Gọi P là biểu thức vế trái ta có

$$P=a+\sqrt{b^2+c^2+2bc}+\frac{7}{20}\left(\frac{1}{a}+\frac{\sqrt{b^2+c^2+2bc}}{bc}\right)$$

$$=a+\sqrt{t+2s}+\frac{7}{20}\left(\frac{1}{a}+\frac{\sqrt{t+2s}}{s}\right)$$

Xét hàm số $f(s)=a+\sqrt{t+2s}+\dfrac{7}{20}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{\sqrt{t+2s}}{s}\right)$ ta có

$$f'(s)=\frac{1}{\sqrt{t+2s}}-\frac{7(t+s)}{20s^2\sqrt{t+2s}}=\frac{20s^2-7(t+s)}{20s^2\sqrt{t+2s}}<0$$

$$20s^2-7(t+2s)\le 20s^2-7.4s=4s(5s-7)<0, s\le\frac{t}{2}\le 1$$

Vì vậy f(s) là hàm nghịch biến do đó

$$P=f(s)\ge f\left(\frac{t}{2}\right)=a+\sqrt{2t}+\frac{7}{20}\left(\frac{1}{a}+\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{t}}\right)$$

$$=3-t+\sqrt{2t}+\frac{7}{20}\left(\frac{1}{3-t}+\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{t}}\right)\ge\frac{81}{20}$$

Ví dụ 4. Cho *a,b,c* là các số thực không âm có tổng bằng 3. Chứng minh

$$\left(a^3+b^3+c^3\right)\left(a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3\right)\le 36(ab+bc+ca).$$

Lời giải

Không mất tính tổng quát giả sử $a\ge b\ge c$.

Viết lại bất đẳng thức đã cho dưới dạng

$$P=\left[a^3+(b+c)^3-3bc(b+c)\right].\left[a^3\left((b+c)^3-3bc(b+c)\right)+b^3c^3\right]-36a(b+c)-36bc\le 0$$

Đặt $b+c=t, bc=s, s\in\left[0;\frac{t^2}{4}\right]$ ta có

$$P=\left(a^3+t^3-3ts\right)\left(a^3t^3-3a^3ts+s^3\right)-36at-36s.$$

Xét hàm số $f(s)=\left(a^3+t^3-3ts\right)\left(a^3t^3-3a^3ts+s^3\right)-36at-36s$ với $s\in\left[0;\frac{t^2}{4}\right]$ ta có

$$f'(s)=-3t\left(a^3t^3-3a^3ts+s^3\right)+\left(a^3+t^3-3ts\right)\left(3s^2-3a^3t\right)-36\le 0.$$

Vì $s^2-a^3t\le 0$ với $t\le 2, a\ge 1, s\le 1$.

Do đó f(s) là hàm nghịch biến trên $\left[0;\frac{t^2}{4}\right]$ suy ra

$$\mathrm{f}(s)\le \mathrm{f}(0)=\left(a^3+t^3\right)a^3t^3-36at=\left[(a+t)^3-3at(a+t)\right]a^3t^3-36at$$

$$=\left[27-9t(3-t)\right]t^3(3-t)^3-36t(3-t)$$

Vậy ta chỉ cần chứng minh $\left[27-9t(3-t)\right]t^2(3-t)^2-36\le 0, \forall t\in[0;2]$.

Đặt $x=t(3-t)\le\frac{9}{4}$, ta chứng minh

$(27-9x)x^2\le 36\Leftrightarrow x^3-3x^2+4\ge 0\Leftrightarrow (x-2)^2(x+1)\ge 0$ (luôn đúng).

Bất đẳng thức được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=2, b=1, c=0$ hoặc các hoán vị.

Ví dụ 5. Cho x,y,z là các số thực không âm. Chứng minh

$$x^4(y+z)+y^4(z+x)+z^4(x+y)\le\frac{1}{12}(x+y+z)^5.$$

Lời giải

Bất đẳng thức có dạng thuần nhất bậc 5 ta chuẩn hoá $x+y+z=1$.

Ta phải chứng minh

$$x^4(y+z)+y^4(z+x)+z^4(x+y)\le\frac{1}{12}.$$

Gọi P là biểu thức vế trái và giả sử $x=\max\{x,y,z\}\Rightarrow x\ge\frac{1}{3}$ ta có

$$P = x^4(y+z) + yz\left(y^3+z^3\right) + x\left(y^4+z^4\right)$$
$$= x^4(y+z) + yz\left((y+z)^3 - 3yz(y+z)\right) + x\left[(y+z)^4 + 2y^2z^2 - 4(y+z)^2 yz\right]$$
$$= tx^4 + xt^4 + (2x-3t)s^2 + t^2(t-4x)s$$

Với $\begin{cases} t = y+z \\ s = yz \end{cases}, s \in \left[0; \dfrac{t^2}{4}\right]$.

Xét hàm số $f(s) = tx^4 + xt^4 + (2x-3t)s^2 + t^2(t-4x)s$ trên đoạn $\left[0; \dfrac{t^2}{4}\right]$ ta có

$$f'(s) = 2(2x-3t)s + t^2(t-4x) \le 2(2x-3t).\frac{t^2}{4} + t^2(t-4x) = -\frac{t^3}{2} - 3xt^2 \le 0.$$

Do đó f(s) là hàm nghịch biến trên đoạn $\left[0; \dfrac{t^2}{4}\right]$.

Vì vậy $P = f(s) \le f(0) = tx^4 + xt^4 = xt\left(x^3+t^3\right) = x(1-x)\left(x^3 + (1-x)^3\right) \le \dfrac{1}{12}$.

Bất đẳng thức được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $(x;y;z) = \left(0; \dfrac{3+\sqrt{6}}{6}; \dfrac{3-\sqrt{6}}{6}\right); \left(0; \dfrac{3-\sqrt{6}}{6}; \dfrac{3+\sqrt{6}}{6}\right)$

và các hoán vị của mỗi bộ số tương ứng.

Ví dụ 6. Cho x,y,z là các số thực không âm. Chứng minh

$$\left(8x^2+yz\right)\left(8y^2+zx\right)\left(8z^2+xy\right) \le (x+y+z)^6.$$

Lời giải

Bất đẳng thức có dạng thuần nhất bậc 6 ta huẩn hoá $x+y+z=1$.

Ta phải chứng minh $\left(8x^2+yz\right)\left(8y^2+zx\right)\left(8z^2+xy\right) \le 1$.

Không mất tính tổng quát giả sử $x = \max\{x,y,z\} \Rightarrow x \ge \dfrac{1}{3}$.

Gọi P là biểu thức vế trái của bất đẳng thức ta có

$$P = \left(8x^2+yz\right)\left[64y^2z^2 + 8x\left(y^3+z^3\right) + x^2yz\right]$$
$$= \left(8x^2+yz\right)\left\{64y^2z^2 + 8x\left[(y+z)^3 - 3yz(y+z)\right] + x^2yz\right\}$$
$$= \left(8x^2+s\right)\left(64s^2 + 8xt^3 - 24xts + x^2s\right)$$

Với $\begin{cases} t = y+z \\ s = yz \end{cases}, s \in \left[0; \dfrac{t^2}{4}\right]$.

Xét hàm số $f(s) = \left(8x^2+s\right)\left(64s^2+8xt^3-24xts+x^2s\right)$ trên đoạn $\left[0; \dfrac{t^2}{4}\right]$.

$$f'(s) = 64s^2+8xt^3-24xts+x^2s+\left(8x^2+s\right)\left(128s+x^2-24xt\right)$$

$$f''(s) = 128s-24xt+x^2+128s+x^2-24xt+128\left(8x^2+s\right)$$

$$f'''(s) = 384 \Rightarrow f''(s) \geq f''(0) = 1026x^2-48xt = 48x\left(\frac{171}{8}x-t\right) > 0$$

Do đó f(s) là hàm lồi trên đoạn $\left[0; \dfrac{t^2}{4}\right]$ do đó f(s) đạt max tại 0 hoặc $\dfrac{t^2}{4}$.

Ta có $f(0) = 64x^3t^3 = 64\left[x(1-x)\right]^3 \leq 64\left[\left(\dfrac{x+1-x}{2}\right)^2\right]^3 = 1$; và

$$f\left(\frac{t^2}{4}\right) = \left(8x^2+\frac{t^2}{4}\right)\left(4t^4+2xt^3+\frac{x^2t^2}{4}\right)$$

$$= \left(8x^2+\frac{(1-x)^2}{4}\right)\left(4(1-x)^4+2x(1-x)^3+\frac{x^2(1-x)^2}{4}\right) \leq 1$$

Vậy ta có max P bằng 1. Bất đẳng thức được chứng minh.

Dấu bằng đạt tại $(x;y;z) = \left(\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{3}\right);\left(0;\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$ hoặc các hoán vị của mỗi bộ số tương ứng.

Bài tập tương tự

Cho x,y,z là các số thực không âm thoả mãn điều kiện $xy+yz+zx>0$.

Chứng minh rằng $\dfrac{1}{\sqrt{8x^2+yz}}+\dfrac{1}{\sqrt{8y^2+zx}}+\dfrac{1}{\sqrt{8z^2+xy}} \geq \dfrac{3}{x+y+z}$.

Chú ý. Bài toán này là hệ quả của bất đẳng thức trên.

Như vậy qua việc dồn biến bằng hàm số đơn giản qua tổng và tích như trên các bài toán được xử lý khá đơn giản. Bạn đọc thử so sánh lời giải các bài toán trên với các cách dồn biến cũng như phương khác để thấy được hiệu quả ưu việt của phương pháp này.

B. BÀI TẬP CHỌN LỌC

Bài 1. Cho tam giác ABC chứng minh rằng $\left(1+\cos^2 A\right)\left(1+\cos^2 B\right)\left(1+\cos^2 C\right) \ge \frac{125}{64}$.

Lời giải

Không mất tính tổng quát giả sử $C = \min\{A, B, C\} \Rightarrow 0 < C \le \frac{\pi}{3}$.

Ta chứng minh $\left(1+\cos^2 A\right)\left(1+\cos^2 B\right) \ge \left(1+\cos^2 \frac{A+B}{2}\right)^2$.

Thật vậy bất đẳng thức đã cho tương đương với

$\sin^2 \frac{A-B}{2}\left[6\cos C - \cos(A-B) - 1\right] \ge 0$.

Bất đẳng thức đúng bởi vì $6\cos C - \cos(A-B) - 1 \ge 6.\frac{1}{2} - 2 = 1 > 0$.

Từ đó suy ra

$$\left(1+\cos^2 A\right)\left(1+\cos^2 B\right)\left(1+\cos^2 C\right) \ge \left(1+\cos^2 \frac{A+B}{2}\right)^2\left(1+\cos^2 C\right).$$

Vậy ta chỉ cần chứng minh

$$\left(1+\cos^2 \frac{A+B}{2}\right)^2\left(1+\cos^2 C\right) \ge \frac{125}{64}$$

$$\Leftrightarrow \left(1+\sin^2 \frac{C}{2}\right)^2\left(1+\cos^2 C\right) \ge \frac{125}{64}$$

$$\Leftrightarrow \left(1+\frac{1-\cos C}{2}\right)^2\left(1+\cos^2 C\right) \ge \frac{125}{64}$$

$$\Leftrightarrow (2\cos C - 1)^2\left(4\cos^2 C - 20\cos C + 19\right) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow (2\cos C - 1)^2\left[4\cos^2 C - 1 + 20(1-\cos C)\right] \ge 0$$

Bất đẳng thức cuối luôn đúng do $4\cos^2 C - 1 \ge 0; 1 - \cos C > 0$.

Bất đẳng thức được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $A = B = C = 60^0$.

Bài 2. Cho x,y,z là các số thực không âm thoả mãn điều kiện $x + y + z = 1$.

Chứng minh rằng $xy + yz + zx \ge 12\left(x^3 + y^3 + z^3\right)\left(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2\right)$.

Lời giải

Không mất tính tổng quát giả sử $x=\max\left\{x,y,z\right\}\Rightarrow x\ge \frac{1}{3}$.

Ta cần chứng minh

$$xy+yz+zx-12\left(x^3+y^3+z^3\right)\left(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2\right)\ge 0.$$

Gọi P là biểu thức vế trái ta có

$$P=x\left(y+z\right)+yz-12\left[x^3+\left(y+z\right)^3-3yz\left(y+z\right)\right].\left[x^2\left(y+z\right)^2-2x^2yz+y^2z^2\right]$$

$$=xt+s-12\left(x^3+t^3-3ts\right)\left(x^2t^2-2x^2s+s^2\right)$$

Với $\begin{cases}t=y+z\\ s=yz\end{cases}, s\in\left[0;\frac{t^2}{4}\right]$.

Xét hàm số $f(s)=xt+s-12\left(x^3+t^3-3ts\right)\left(x^2t^2-2x^2s+s^2\right)$ liên tục trên đoạn $\left[0;\frac{t^2}{4}\right]$ ta có

$$f'(s)=1+36t\left(x^2t^2-2x^2s+s^2\right)+24\left(x^3+t^3-3ts\right)\left(x^2-s\right)\ge 0 \text{ do } x^2-s\ge 0.$$

Do đó f(s) là hàm đồng biến trên đoạn $\left[0;\frac{t^2}{4}\right]$.

Vì vậy

$$f(s)\ge f(0)=xt-12\left(x^3+t^3\right)x^2t^2=x\left(1-x\right)-12\left[x^3+\left(1-x\right)^3\right]x^2\left(1-x\right)^2$$

$$=x\left(1-x\right)\left[1-12x\left(1-x\right)\left(1-3x\left(1-x\right)\right)\right]$$

$$=x\left(1-x\right)\left[6x\left(1-x\right)-1\right]^2\ge 0,\forall x\in\left[\frac{1}{3};1\right]$$

Bất đẳng thức được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x\left(1-x\right)=0\\ 6x\left(1-x\right)=1\end{array}\right.\\ yz=0\\ x+y+z=1\\ x\ge \frac{1}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1,y=z=0\\ x=\frac{3+\sqrt{3}}{6},y=\frac{3-\sqrt{3}}{6},z=0\\ x=\frac{3+\sqrt{3}}{6},y=0,z=\frac{3-\sqrt{3}}{6}\end{array}\right.$.

Bài tập tương tự

Cho x,y,z là các số thực không âm. Chứng minh

$$\left(x+y+z\right)^5 \geq \frac{9}{4\sqrt{6}-9}\left(x^3+y^3+z^3\right)\left(xy+yz+zx\right).$$

Bài 3. Cho x,y,z là các số thực dương có tổng bằng 1. Chứng minh

$$1 \leq \frac{x}{1-yz}+\frac{y}{1-zx}+\frac{z}{1-xy} \leq \frac{9}{8}.$$

Lời giải

Bất đẳng thức vế trái là hiển nhiên theo C –S thật vậy

$$\frac{x}{1-yz}+\frac{y}{1-zx}+\frac{z}{1-xy} \geq \frac{\left(x+y+z\right)^2}{x\left(1-yz\right)+y\left(1-zx\right)+z\left(1-xy\right)} = \frac{1}{1-3xyz} \geq 1.$$

Ta chứng minh bất đẳng vế phải.

Gọi P là biểu thức vế trái và giả sử $x = \max\left\{x,y,z\right\}$ ta có

$$P = \frac{x}{1-yz}+\frac{y+z-x\left(\left(y+z\right)^2-2yz\right)}{x^2yz-x\left(y+z\right)+1}$$

$$= \frac{x}{1-s}+\frac{t-x\left(t^2-2s\right)}{x^2s-xt+1}$$

với $\begin{cases} t = y+z \\ s = yz \end{cases}, s \in \left(0;\frac{t^2}{4}\right]$.

Xét hàm số $f(s) = \frac{x}{1-s}+\frac{t-x\left(t^2-2s\right)}{x^2s-xt+1}$ liên tục trên $\left(0;\frac{t^2}{4}\right]$ ta có

$$f'(s) = \frac{x}{(1-s)^2}+\frac{x^3t-3x^2t+2x}{\left(x^2s-xt+1\right)^2} = \frac{x}{(1-s)^2}+\frac{x\left(x^2t-3xt+2\right)}{\left(x^2s-xt+1\right)^2} > 0$$

do $x^2t-3xt+2 > 2-3xt \geq 2-\frac{3}{4}\left(x+t\right)^2 = 2-\frac{3}{4} = \frac{5}{4} > 0$.

Vậy f(s) là hàm đồng biến trên $\left(0;\frac{t^2}{4}\right]$.

Do đó $f(s)\le f\left(\frac{t^2}{4}\right)=\frac{x}{1-\frac{t^2}{4}}+\frac{t-\frac{xt^2}{2}}{\frac{x^2t^2}{4}-xt+1}$

$$=\frac{4x}{4-(1-x)^2}+\frac{4(1-x)-2x(1-x)^2}{x^2(1-x)^2-4x(1-x)+4}$$

$$=-2.\frac{3x^3-5x^2+3x+3}{x^4-3x^3+x^2-x-6}$$

Ta chứng minh $-2.\frac{3x^3-5x^2+3x+3}{x^4-3x^3+x^2-x-6}\le\frac{9}{8}\Leftrightarrow(3x-1)^2\left(x^2+3x-6\right)\le 0$.

Bất đẳng thức luôn đúng.

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=\frac{1}{3}$.

Bài tập tương tự

Cho x,y,z là các số thực dương thoả mãn điều kiện $x^2+y^2+z^2=1$.

Chứng minh rằng $\frac{9}{4}\le\frac{1}{1+xy}+\frac{1}{1+yz}+\frac{1}{1+zx}\le\frac{27}{4(x+y+z)^2}$.

Bài 4. Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng

$$(a+b)(b+c)(c+a)\ge 4(a+b+c-1).$$

Lời giải

Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $a\ge b\ge c$

$\Rightarrow a\ge 1$ và ta cần chứng minh

$(a+b)(a+c)(b+c)-4(a+b+c-1)\ge 0$

$\Leftrightarrow f(a,b,c)=\left[a^2+a(b+c)+bc\right](b+c)-4(a+b+c-1)\ge 0$.

Xét

$f(a,b,c)-f(a,\sqrt{bc},\sqrt{bc})$

$=a^2\left(b+c-2\sqrt{bc}\right)+a\left[(b+c)^2-4bc\right]+bc\left(b+c-2\sqrt{bc}\right)-4\left(b+c-2\sqrt{bc}\right)$

$=\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)^2\left[a^2+a\left(b+c+2\sqrt{bc}\right)+bc-4\right]\ge 0$

Vì

$a^2+a\left(b+c+2\sqrt{bc}\right)+bc-4=a^2+2\sqrt{a}+a(b+c)+bc-4$

$$\ge a^2+2\sqrt{a}+2a\sqrt{bc}+bc-4=a^2+4\sqrt{a}+bc-4\ge 1+bc>0$$

Do $a \ge 1$.

Vì vậy ta chỉ cần chứng minh $f(a,\sqrt{bc},\sqrt{bc}) \ge 0 \Leftrightarrow f\left(\frac{1}{x^2},x,x\right) \ge 0$ với $x=\sqrt{bc}$

$$2x\left(\frac{1}{x^2}+x\right)\left(\frac{1}{x^2}+x\right)-4\left(2x+\frac{1}{x^2}-1\right) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^3+1\right)^2 \ge 2\left(x+2x^4-x^3\right) \Leftrightarrow x^6-4x^4+4x^3-2x+1 \ge 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2\left(x^4+2x^3-x^2+1\right) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2\left[\left(x^2-1\right)^2+2x^3+x^2\right] \ge 0 \text{ (luôn đúng).}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=1 \Leftrightarrow a=b=c=1$.

Cách 2: Ta có:

$(a+b)(b+c)(c+a)=(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc=(a+b+c)(ab+bc+ca)-1$.

Mặt khác:

$(ab+bc+ca)^2 \ge 3abc(a+b+c)=3(a+b+c) \Rightarrow ab+bc+ca \ge \sqrt{3(a+b+c)}$.

Vậy bài toán được chứng minh nếu bất đẳng thức sau đúng:

$$(a+b+c)\sqrt{3(a+b+c)}-1 \ge 4(a+b+c-1).$$

Thật vậy đặt $t=\sqrt{a+b+c},\left(t \ge \sqrt{3}\right)$. Xét hàm số $f(t)=\sqrt{3}t^3-4t^2+3$ với $t \ge \sqrt{3}$.

Ta có $f'(t)=3\sqrt{3}t^2-8t>0,\forall t \ge \sqrt{3}$ nên $f(t)$ đồng biến trên $\left[\sqrt{3};+\infty\right)$ hay $f(t) \ge f(\sqrt{3})=0$.

Do đó $(a+b+c)\sqrt{3(a+b+c)}-1 \ge 4(a+b+c-1)$.

Bất đẳng thức được chứng minh.

Bài 5. Cho a,b,c là các số thực dương có tích bằng 1. Chứng minh

$$a^2+b^2+c^2+6 \ge \frac{3}{2}\left(a+b+c+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

Lời giải

Đặt $P(a,b,c)=a^2+b^2+c^2+6-\frac{3}{2}\left(a+b+c+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$.

Không mất tính tổng quát giả sử $a=\min\{a,b,c\} \Rightarrow x=\sqrt{bc} \ge 1$

Ta chứng minh $P(a,b,c) \geq P\left(a,\sqrt{bc},\sqrt{bc}\right)$

Thật vậy

$$P(a,b,c) - P\left(a,\sqrt{bc},\sqrt{bc}\right) = (b-c)^2 - \frac{3}{2}\left(b + c - 2\sqrt{bc} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{2}{\sqrt{bc}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sqrt{b} - \sqrt{c}\right)^2\left[2\left(\sqrt{b} + \sqrt{c}\right)^2 - 3 - \frac{3}{bc}\right]$$

$$\geq \frac{1}{2}\left(\sqrt{b} - \sqrt{c}\right)^2\left(8bc - 3 - \frac{3}{bc}\right)$$

$$\geq \frac{1}{2}\left(\sqrt{b} - \sqrt{c}\right)^2(8 - 3 - 3) \geq 0$$

Mặt khác

$$P\left(a,\sqrt{bc},\sqrt{bc}\right) = P\left(\frac{1}{x^2},x,x\right) = \frac{x^6 - 6x^5 + 12x^4 - 6x^3 - 3x^2 + 2}{2x^4}$$

$$= \frac{(x-1)^2\left[\left(x^2 - 2x - 1\right)^2 + x^2 + 1\right]}{2x^4} \geq 0$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Bài 6. Cho a,b,c là các số thực không âm có tổng bằng 3. Chứng minh

$$1 \leq \left(a^2 - a + 1\right)\left(b^2 - b + 1\right)\left(c^2 - c + 1\right) \leq 7\,.$$

Lời giải

Không mất tính tổng quát giả sử $a = \max\{a,b,c\} \Rightarrow a \geq 1, b + c \leq 2$.

Đặt $\begin{cases} t = b + c \\ s = bc \end{cases}, s \in \left[0;\frac{t^2}{4}\right]$ ta có

$$P = \left(a^2 - a + 1\right)\left[b^2c^2 - bc(b+c) + b^2 + c^2 + bc - (b+c) + 1\right]$$

$$= \left(a^2 - a + 1\right)\left[b^2c^2 + (b+c)^2 - (b+c) - bc(1 + b + c) + 1\right]\quad.$$

$$= \left(a^2 - a + 1\right)\left[s^2 + t^2 - t - s(t+1) + 1\right]$$

Xét hàm số $f(s) = \left(a^2 - a + 1\right)\left[s^2 + t^2 - t - s(t+1) + 1\right]$ ta có

$$f'(s) = \left(a^2 - a + 1\right)(2s - t - 1) < 0$$

vì $2s - t - 1 \leq \frac{t^2}{2} - t - 1 \leq \frac{t^2 - 2t - 2}{2} = \frac{t(t-2) - 2}{2} < 0$.

Do đó f(s) là hàm nghịch biến trên đoạn $\left[0;\frac{t^2}{4}\right]$. Vì vậy $f\left(\frac{t^2}{4}\right)\le P\le f(0)$.

Ta có

$f(0)=\left(a^2-a+1\right)\left(t^2-t+1\right)=\left(a^2-a+1\right)\left[(3-a)^2-(3-a)+1\right]\le 7$.

Vì bất đẳng thức tương đương với: $a(a-3)\left[\left(a-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{4}\right]\le 0$.

Đúng với mọi $a\in[0;3]$.

Tương tự: $f\left(\frac{t^2}{4}\right)=\left(a^2-a+1\right)\left[\frac{t^4}{16}+t^2-t-\frac{t^2}{4}(t+1)+1\right]$

$$=\left[(3-t)^2-(3-t)+1\right]\left[\frac{t^4}{16}+t^2-t-\frac{t^2}{4}(t+1)+1\right]\ge 1$$

bởi vì bất đẳng thức tương đương với

$(t-2)^2\left(t^4-5t^3+15t^2-24t+24\right)\ge 0$ (luôn đúng).

Bài 7. Cho *a,b,c* là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $a+b+c=3$.

Chứng minh rằng $\left(a^2+a+1\right)\left(b^2+b+1\right)\left(c^2+c+1\right)\le 27$.

Lời giải

Không mất tính tổng quát giả sử $a=\min\{a,b,c\}\Rightarrow a\le 1, b+c=3-a\ge 2$.

Ta chứng minh $\left(b^2+b+1\right)\left(c^2+c+1\right)\le\left[\left(\frac{b+c}{2}\right)^2+\frac{b+c}{2}+1\right]^2$.

Thật vậy bất đẳng thức tương đương với:

$\frac{1}{16}(b-c)^2\left(b^2+c^2+6bc+4b+4c-4\right)\ge 0$.

Bất đẳng thức luôn đúng vì $b^2+c^2+6bc+4b+4c-4\ge 4(b+c)-4>0$.

Vậy ta chỉ cần chứng minh $\left(a^2+a+1\right)\left[\left(\frac{b+c}{2}\right)^2+\frac{b+c}{2}+1\right]^2\le 27$.

$\Leftrightarrow\left(a^2+a+1\right)\left[\left(\frac{3-a}{2}\right)^2+\frac{3-a}{2}+1\right]^2\le 27$.

$\Leftrightarrow \left(a^2+a+1\right)\left(a^2-8a+19\right)^2 \le 432$.

$\Leftrightarrow (a-1)^2\left(a^4-13a^3+60a^2-85a-71\right) \le 0$.

Luôn đúng vì

$a^4-13a^3+60a^2-85a-71 = \left(a^4-13a^3-85a-11\right)+60\left(a^2-1\right) < 0, \forall a \in [0;1]$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Nhận xét. Lời giải trên xuất phát từ cách dồn biến

$P(a,b,c)=\left(a^2+a+1\right)\left(b^2+b+1\right)\left(c^2+c+1\right)$.

$P(a,b,c) \le P\left(a,\frac{b+c}{2},\frac{b+c}{2}\right)$ (đúng) ta chỉ cần giả sử $a=\min\{a,b,c\}$.

Bài 8. Cho a,b,c là các số thực thỏa mãn điều kiện $a+b+c=6$ và $a,b,c \ge 1$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\left(a^2+2\right)\left(b^2+2\right)\left(c^2+2\right)$.

Lời giải

Không mất tính tổng quát giả sử

$c=\min\{a,b,c\} \Rightarrow c \le \frac{a+b+c}{3}=2; a+b=6-c \ge 4$.

Ta chứng minh $\left(a^2+2\right)\left(b^2+2\right) \le \left[\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+2\right]^2$.

Thật vậy bất đẳng thức tương đương với :

$16\left(a^2b^2+2a^2+2b^2+4\right) \le (a+b)^4+16(a+b)^2+64$

$\Leftrightarrow (a+b)^4-16a^2b^2 \ge 16(a-b)^2$

$\Leftrightarrow \left[(a+b)^2-4ab\right].\left[(a+b)^2+4ab\right] \ge 16(a-b)^2$

$\Leftrightarrow (a-b)^2\left[(a+b)^2+4ab-16\right] \ge 0$

Bất đẳng thức cuối luôn đúng do $(a+b)^2 \ge 16$.

Do đó $P \le \left(c^2+2\right).\left[\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+2\right]^2 = \left(c^2+2\right).\left[\left(\frac{6-c}{2}\right)^2+2\right]^2$

Xét hàm số $f(c)=\left(c^2+2\right).\left[\left(\frac{6-c}{2}\right)^2+2\right]^2$ trên đoạn $[0;2]$ ta có

$$f'(c)=\frac{3}{8}\left(c^5-20c^4+156c^3-552c^2+800c-352\right)$$
$$=\frac{3}{8}(c-2)\left(c^2-12c+44\right)\left(c^2-6c+4\right)\geq 0,\forall c\in[0;2]$$

Do đó f(c) là hàm đồng biến trên đoạn $[0;2]$.

Suy ra $P\leq f(c)\leq f(2)=216$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=2$.

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng 216 đạt tại $a=b=c=2$.

Nhận xét. Chú ý đẳng thức

$$\left(2+a^2\right)\left(2+b^2\right)-\left[2+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right]^2=-\frac{(a-b)^2}{16}\left(a^2+6ab+b^2-16\right).$$

Với những bài toán có tích đối xứng $\left(k+a^2\right)\left(k+b^2\right)\left(k+c^2\right)$ với $k>0$ ta đánh giá giữa $\left(k+a^2\right)\left(k+b^2\right)$ với $\left[k+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right]^2$.

Ta có : $\left(k+a^2\right)\left(k+b^2\right)-\left[k+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right]^2=-\frac{(a-b)^2}{16}\left(a^2+b^2+6ab-8k\right)$.

Bài 9. Cho *a,b,c* là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $a+b+c=1$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=ab\left(a^2+b^2\right)+bc\left(b^2+c^2\right)+ca\left(c^2+a^2\right)$.

Lời giải

Không mất tính tổng quát giả sử $a\geq b\geq c$ đặt $b+c=t,bc=s,s\in\left[0;\frac{t^2}{4}\right]$.

Khi đó $a=1-t\geq\frac{b+c}{2}=\frac{t}{2}\Leftrightarrow t\leq\frac{2}{3}$ và

$$P=a^3(b+c)+a\left(b^3+c^3\right)+bc\left(b^2+c^2\right)$$
$$=a^3(b+c)+a\left[(b+c)^3-3bc(b+c)\right]+bc\left[(b+c)^2-2bc\right]$$
$$=a^3t+a\left(t^3-3st\right)+s\left(t^2-2s\right)$$

Xét hàm số $f(s)=a^3t+a\left(t^3-3st\right)+s\left(t^2-2s\right)$ ta có

$$f'(s)=t^2-4s-3at=t(t-3a)-4s\leq 0.$$

Do đó *f(s)* là hàm nghịch biến trên đoạn $\left[0;\frac{t^2}{4}\right]$.

Suy ra $f(s) \le f(0) = a^3t + at^3 = (1-t)^3 t + (1-t)t^3$.

Xét hàm số $g(t) = (1-t)^3 t + (1-t)t^2$ với $t \in \left[0;\frac{2}{3}\right]$ ta có

$$f'(t) = (1-2t)^3;\ f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}.$$

Ta có *f'(t)* đổi dấu từ dương sang âm khi đi qua $t = \frac{1}{2}$ nên f(t) đạt cực đại tại $t = \frac{1}{2}$ hay $P \le f(t) \le f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = \frac{1}{2}, c = 0$ hoặc các hoán vị.

Nhận xét. Với *a,b,c* không âm và $a + b + c = k$ với chứng minh tương tự ta có có

$$ab\left(a^2 + b^2\right) + bc\left(b^2 + c^2\right) + ca\left(c^2 + a^2\right) \le \frac{k^4}{8}.$$

Bài 10. Cho *a,b,c* là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 1$.

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{a}{b^3 + c^3 + 1} + \frac{b}{c^3 + a^3 + 1} + \frac{c}{a^3 + b^3 + 1}.$$

Lời giải

Tìm giá trị lớn nhất của P

Với a,b,c không âm ta luôn có

$$\frac{a}{b^3 + c^3 + 1} \le a, \frac{b}{c^3 + a^3 + 1} \le b, \frac{c}{a^3 + b^3 + 1} \le c.$$

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên ta có $P \le a + b + c = 1$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi một số bằng 1 và hai số bằng 0.

Tìm giá trị nhỏ nhất của P

Sử dụng bất đẳng thức C-S ta có

$$P = \frac{a}{b^3 + c^3 + 1} + \frac{b}{c^3 + a^3 + 1} + \frac{c}{a^3 + b^3 + 1} \ge \frac{(a+b+c)^2}{a\left(b^3 + c^3 + 1\right) + b\left(c^3 + a^3 + 1\right) + c\left(a^3 + b^3 + 1\right)}$$

$$= \frac{1}{a\left(b^3 + c^3\right) + b\left(c^3 + a^3\right) + c\left(a^3 + b^3\right) + 1}$$

Vậy để tìm giá trị nhỏ nhất của P ta tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $M = a\left(b^3 + c^3\right) + b\left(c^3 + a^3\right) + c\left(a^3 + b^3\right)$.

Không mất tính tổng quát giả sử $a \ge b \ge c$ đặt $b + c = t, bc = s, s \in \left[0; \frac{t^2}{4}\right]$

Khi đó $a = 1 - t \ge \frac{b+c}{2} = \frac{t}{2} \Leftrightarrow t \le \frac{2}{3}$ và

$$M = a^3(b+c) + a\left(b^3 + c^3\right) + bc\left(b^2 + c^2\right)$$
$$= a^3(b+c) + a\left[(b+c)^3 - 3bc(b+c)\right] + bc\left[(b+c)^2 - 2bc\right]$$
$$= a^3 t + a\left(t^3 - 3st\right) + s\left(t^2 - 2s\right)$$

Xét hàm số $f(s) = a^3 t + a\left(t^3 - 3st\right) + s\left(t^2 - 2s\right)$ ta có

$f'(s) = t^2 - 4s - 3at = t(t - 3a) - 4s \le 0$.

Do đó *f(s)* là hàm nghịch biến trên đoạn $\left[0; \frac{t^2}{4}\right]$.

Suy ra $f(s) \le f(0) = a^3 t + at^3 = (1-t)^3 t + (1-t)t^3$.

Xét hàm số $g(t) = (1-t)^3 t + (1-t)t^2$ với $t \in \left[0; \frac{2}{3}\right]$ ta có

$f'(t) = (1-2t)^3; f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$.

Ta có *f'(t)* đổi dấu từ dương sang âm khi đi qua $t = \frac{1}{2}$ nên f(t) đạt cực đại tại $t = \frac{1}{2}$ hay $M \le f(t) \le f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = \frac{1}{2}, c = 0$ hoặc các hoán vị.

Tìm được GTLN của M bằng $\frac{1}{8}$ đạt tại $a = b = \frac{1}{2}, c = 0$ hoặc các hoán vị.

Suy ra $P \ge \frac{1}{1 + \frac{1}{8}} = \frac{8}{9}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\frac{8}{9}$ đạt tại $a = b = \frac{1}{2}, c = 0$ hoặc các hoán vị.

Nhận xét. Với a,b,c không âm và $a+b+c=k$ với chứng minh tương tự ta có có

$$ab\left(a^2+b^2\right)+bc\left(b^2+c^2\right)+ca\left(c^2+a^2\right)\le\frac{k^4}{8}.$$

Bài tập tương tự

Cho a,b,c là các số thực không âm có tổng bằng 1. Chứng minh

$$\frac{a}{1+b^2+c^2}+\frac{b}{1+c^2+a^2}+\frac{c}{1+a^2+b^2}\ge\frac{4}{5}.$$

Bài 11. Cho a,b,c là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $ab+bc+ca=1$.

Chứng minh rằng $\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{c+a}\ge\dfrac{5}{2}$.

Lời giải

Không mất tính tổng quát giả sử $a=\max\{a,b,c\}$.

Đặt $\begin{cases}t=b+c\\ s=bc\end{cases},s\in\left[0;\dfrac{t^2}{4}\right]$ ta có $at+s=1\Leftrightarrow a=\dfrac{1-s}{t}$

Gọi P là biểu thức vế trái ta có

$$P=\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}=\frac{1}{b+c}+\frac{2a+b+c}{a^2+ab+bc+ca}$$

$$=\frac{1}{t}+\frac{2a+t}{a^2+1}=\frac{1}{t}+\frac{2.\dfrac{1-s}{t}+t}{\left(\dfrac{1-s}{t}\right)^2+1}=\frac{1}{t}+\frac{t\left(-2s+t^2+2\right)}{t^2+(s-1)^2}$$

Xét hàm số $f(s)=\dfrac{1}{t}+\dfrac{t\left(-2s+t^2+2\right)}{t^2+(s-1)^2}$ trên đoạn $\left[0;\dfrac{t^2}{4}\right]$ ta có

$$f'(s)=\frac{2t\left[(s-1)^2-t^2s\right]}{\left(t^2+(s-1)^2\right)^2}=\frac{2t^3\left(a^2-s\right)}{\left(t^2+(s-1)^2\right)^2}\ge\frac{2t^3\left(\dfrac{t^2}{4}-s\right)}{\left(t^2+(s-1)^2\right)^2}\ge0$$

Do đó f(s) là hàm đồng biến trên đoạn $\left[0;\dfrac{t^2}{4}\right]$

Vì vậy $f(s)\ge f(0)=\dfrac{1}{t}+\dfrac{t\left(t^2+2\right)}{t^2+1}$

Ta cần chứng minh $\frac{1}{t}+\frac{t\left(t^2+2\right)}{t^2+1}\ge\frac{5}{2}\Leftrightarrow(t-1)^2\left(2t^2-t+2\right)\ge 0$ (luôn đúng).

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=1,c=0$ hoặc các hoán vị.

<u>Cách 2:</u> Không mất tính tổng quát giả sử $c=max\{a,b,c\}\Rightarrow c\ge\frac{a+b}{2}$.

Thay $c=\frac{1-ab}{a+b}$ vào bất đẳng thức cần chứng minh ta có

Đặt $P(a,b,c)=\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}-\frac{5}{2}=\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+\frac{1-ab}{a+b}}+\frac{1}{b+\frac{1-ab}{a+b}}-\frac{5}{2}$.

Xét hiệu $P(a,b,c)-P\left(a+b,\frac{1}{a+b},0\right)$

$$=\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+\frac{1-ab}{a+b}}+\frac{1}{b+\frac{1-ab}{a+b}}\right)-\left(\frac{1}{a+b+\frac{1}{a+b}}+a+b+\frac{1}{a+b}\right)$$

$$=\frac{a+b}{1+a^2}+\frac{a+b}{1+b^2}-(a+b)\left[1+\frac{1}{1+(a+b)^2}\right]$$

Ta chứng minh $\frac{a+b}{1+a^2}+\frac{a+b}{1+b^2}-(a+b)\left[1+\frac{1}{1+(a+b)^2}\right]\ge 0$

$\Leftrightarrow\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2}\ge 1+\frac{1}{1+(a+b)^2}\Leftrightarrow ab\left[ab(a+b)^2+2ab-2\right]\le 0$

$\Leftrightarrow ab(a+b)^2\le 2(1-ab)$ (luôn đúng).

Vì $2(1-ab)=2c(a+b)\ge(a+b)^2\ge ab(a+b)^2$

Vậy ta cần chứng minh

$P(a+b,\frac{1}{a+b},0)\ge 0\Leftrightarrow\frac{1}{a+b+\frac{1}{a+b}}+a+b+\frac{1}{a+b}\ge\frac{5}{2}$

$$\Leftrightarrow\frac{a+b}{1+(a+b)^2}+\frac{1+(a+b)^2}{a+b}\ge\frac{5}{2}.$$

Đặt $x=\frac{1+\left(a+b\right)^2}{a+b}\ge\frac{2\left(a+b\right)}{a+b}=2$.

Ta cần chứng minh $x+\frac{1}{x}\ge\frac{5}{2}\Leftrightarrow 2x^2-5x+2\ge 0\Leftrightarrow\left(2x-1\right)\left(x-2\right)\ge 0$ (luôn đúng).

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} a+b=1 \\ ab+bc+ca=1 \\ ab\left[ab\left(a+b\right)^2+2ab-2\right]=0 \end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} a=c=1,b=0 \\ b=c=1,a=0 \end{array}\right..$$

Bài toán được chứng minh đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=1,c=0$ hoặc các hoán vị.

Cách 3: Đặt $p=a+b+c,q=ab+bc+ca,r=abc$.

Bất đẳng thức được viết lại dưới dạng:

$$\frac{1+p^2}{p-r}\ge\frac{5}{2}\Leftrightarrow\left(p-2\right)\left(2p-1\right)+5r\ge 0.$$

\+ Nếu $p\ge 2$ bất đẳng thức hiển nhiên đúng.

\+ Nếu $\sqrt{3}\le p\le 2$ theo bất đẳng thức Schur bậc 3, ta có

$$r\ge\frac{p\left(4q-p^2\right)}{9}=\frac{4p-p^3}{9}.$$

Ta chỉ cần chứng minh $\left(p-2\right)\left(2p-1\right)+5.\frac{4p-p^3}{9}\ge 0$

$$\Leftrightarrow\left(2-p\right)\left[\frac{5p\left(p+2\right)-9\left(2p-1\right)}{9}\right]\ge 0$$

$$\Leftrightarrow\left(2-p\right)\left(5p^2-8p+9\right)\ge 0$$

Bất đẳng thức luôn đúng ta có điều phải chứng minh.

Bài 12. Cho a,b,c là các số thực không âm thoả mãn điều kiện $ab+bc+ca=1$.

Chứng minh rằng $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}-\frac{1}{a+b+c}\ge 2$.

Lời giải

Không mất tính tổng quát giả sử $a=\min\left\{a,b,c\right\}$.

\+ Nếu $b+c>2\Rightarrow-\frac{1}{a+b+c}>-\frac{1}{2}$, khi đó theo bài toán trên ta có

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\ge\frac{5}{2}\Rightarrow\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}-\frac{1}{a+b+c}>2.$$

Bất đẳng thức được chứng minh.

Ta xét với $b+c\le 2,$ khi đó đặt $\begin{cases}t=b+c\\ s=bc\end{cases}, s\in\left[0;\frac{t^2}{4}\right], 0<t\le 2$

Ta có $at+s=1\Leftrightarrow a=\frac{1-s}{t}$.

Gọi biểu thức vế trái là P ta có

$$P=\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}-\frac{1}{a+b+c}=\frac{1}{b+c}+\frac{2a+b+c}{a^2+1}-\frac{1}{a+b+c}$$

$$=\frac{1}{t}+\frac{2a+t}{a^2+1}-\frac{1}{a+t}=\frac{1}{t}+\frac{2.\frac{1-s}{t}+t}{\left(\frac{1-s}{t}\right)^2+1}-\frac{1}{\frac{1-s}{t}+t}$$

$$=\frac{1}{t}+t.\frac{t^2+2-2s}{t^2+(s-1)^2}-\frac{t}{-s+t^2+1}$$

Xét hàm số $f(s)=\frac{1}{t}+t.\frac{t^2+2-2s}{t^2+(s-1)^2}-\frac{t}{-s+t^2+1}$ trên đoạn $\left[0;\frac{t^2}{4}\right]$ ta có

$$f'(s)=\frac{2t\left[(s-1)^2-t^2s\right]}{\left(t^2+(s-1)^2\right)^2}-\frac{t}{\left(-s+t^2+1\right)^2}=\frac{2t^3\left(a^2-s\right)}{\left(t^2+(s-1)^2\right)^2}-\frac{t}{\left(-s+t^2+1\right)^2}\le 0.$$

Bởi vì $a^2-s\le 0$.

Do đó f(s) là hàm nghịch biến trên đoạn $\left[0;\frac{t^2}{4}\right]$. Vì vậy $f(s)\ge f\left(\frac{t^2}{4}\right)$.

Ta chỉ cần chứng minh $f\left(\frac{t^2}{4}\right)\ge 2$.

Ta có: $f\left(\frac{t^2}{4}\right)-2\ge 0\Leftrightarrow\frac{1}{t}+t.\frac{\frac{t^2}{2}+2}{t^2+\left(\frac{t^2}{4}-1\right)^2}-\frac{t}{\frac{3t^2}{4}+1}-2\ge 0$

$\Leftrightarrow(2-t)\left(6t^4-11t^3+10t^2-12t+8\right)\ge 0\Leftrightarrow t\le 2$ (luôn đúng).

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=1, c=0$ hoặc các hoán vị.

Cách 2: Đặt $p=a+b+c, q=ab+bc+ca, r=abc$.

Bất đẳng thức được viết lại dưới dạng:

$$\frac{1+p^2}{p-r}-\frac{1}{p}\geq 2 \Leftrightarrow p^2(p-2)+r(1+2p)\geq 0.$$

+ Nếu $p\geq 2$ bất đẳng thức hiển nhiên đúng.

+ Nếu $\sqrt{3}\leq p\leq 2$ theo bất đẳng thức Schur bậc 3 ta có $r\geq \frac{p(4q-p^2)}{9}=\frac{4p-p^3}{9}$.

Ta chỉ cần chứng minh

$$p^2(2-p)+\frac{4p-p^3}{9}(1+2p)\geq 0 \Leftrightarrow p(2-p)(p-1)^2\geq 0.$$

Bất đẳng thức luôn đúng ta có điều phải chứng minh.

Bài 13. Cho a,b,c là các số thực không thoả mãn điều kiện $ab+bc+ca\geq 3$.

Chứng minh rằng với mọi số thực $k\geq \frac{1}{3}$ ta có

$$(a^2+k)(b^2+k)(c^2+k)\geq (k+1)^3.$$

Lời giải

Chú ý đẳng thức

$$(a^2+k)(b^2+k)(c^2+k)=(k(a+b+c)-abc)^2+k(ab+bc+ca-k)^2.$$

Trước tiên ta chứng minh $k=\frac{1}{3}$ bất đẳng thức đúng, thật vậy

$$\left(a^2+\frac{1}{3}\right)\left(b^2+\frac{1}{3}\right)\left(c^2+\frac{1}{3}\right)\geq \frac{1}{3}\left(ab+bc+ca-\frac{1}{3}\right)^2\geq \frac{1}{3}\left(3-\frac{1}{3}\right)^2=\left(\frac{1}{3}+1\right)^3.$$

Với $k'\geq k\geq \frac{1}{3}$ ta có

$$(a^2+k')(b^2+k')(c^2+k')=\left[a^2+k+(k'-k)\right]\left[b^2+k+(k'-k)\right]\left[c^2+k+(k'-k)\right]$$
$$\geq \left[\sqrt[3]{(a^2+k)(b^2+k)(c^2+k)}+k'-k\right]^3\geq (1+k+k'-k)^3=(k'+1)^3$$

Bài 14. Cho x,y,z là các số thực không âm thoả mãn điều kiện $xy+yz+zx=1$.

Chứng minh rằng $\frac{1}{\sqrt{x+y}}+\frac{1}{\sqrt{y+z}}+\frac{1}{\sqrt{z+x}}\geq 2+\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Lời giải

Không mất tính tổng quát giả sử $x=\max\left\{x,y,z\right\}$ đặt $\begin{cases} t=y+z \\ s=yz \end{cases}, s\in\left[0;\frac{t^2}{4}\right]$.

Ta có $xt+s=1 \Rightarrow x=\frac{1-s}{t}$.

Gọi P là biểu thức vế trái ta có

$$P=\frac{1}{\sqrt{y+z}}+\frac{\sqrt{x+y}+\sqrt{x+z}}{\sqrt{x^2+xy+xz+yz}}=\frac{1}{\sqrt{y+z}}+\frac{\sqrt{2x+y+z+2\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{t}}+\sqrt{\frac{2.\frac{1-s}{t}+t}{\left(\frac{1-s}{t}\right)^2+1}+\frac{2}{\sqrt{\left(\frac{1-s}{t}\right)^2+1}}}=\frac{1}{\sqrt{t}}+\sqrt{t.\frac{t^2+2-2s}{t^2+(1-s)^2}+\frac{2t}{\sqrt{t^2+(1-s)^2}}}.$$

Xét hàm số $f(s)=t.\frac{t^2+2-2s}{t^2+(1-s)^2}+\frac{2t}{\sqrt{t^2+(1-s)^2}}$ trên đoạn $\left[0;\frac{t^2}{4}\right]$ ta có

$$f'(s)=2t.\frac{(1-s)^2-t^2s}{\left(t^2+(1-s)^2\right)^2}+\frac{2t(1-s)}{\left(\sqrt{t^2+(1-s)^2}\right)^3}=\frac{2t^3\left(x^2-s\right)}{\left(t^2+(1-s)^2\right)^2}+\frac{2t(1-s)}{\left(\sqrt{t^2+(1-s)^2}\right)^3}\geq 0$$

Do đó f(s) là hàm đồng biến trên đoạn $\left[0;\frac{t^2}{4}\right]$.

Vì vậy $f(s)\geq f(0)=t.\frac{t^2+2}{t^2+1}+\frac{2t}{\sqrt{t^2+1}}=\left(\sqrt{t}+\sqrt{\frac{t}{t^2+1}}\right)^2$.

Do đó $P\geq\frac{1}{\sqrt{t}}+\sqrt{t}+\sqrt{\frac{t}{t^2+1}}\geq 2+\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Bài 15. Cho a,b,c là các số thực không âm thoả mãn điều kiện $ab+bc+ca>0$.

Chứng minh $\frac{1}{\sqrt{4a^2+bc}}+\frac{1}{\sqrt{4b^2+ca}}+\frac{1}{\sqrt{4c^2+ab}}\geq\frac{4}{a+b+c}$.

Lời giải

Giả sử $a=\max\left\{a,b,c\right\}$, chứng minh

$$\frac{1}{\sqrt{4a^2+bc}}+\frac{1}{\sqrt{4b^2+ca}}\geq\frac{2}{\sqrt{4t^2+tc}}, t=\frac{a+b}{2}.$$

Thật vậy theo bất đẳng thức AM – GM ta có

$$\frac{1}{\sqrt{4a^2+bc}}+\frac{1}{\sqrt{4b^2+ca}}\ge\frac{2}{\sqrt{\left(4a^2+bc\right)\left(4b^2+ca\right)}}.$$

Và $\left(4t^2+tc\right)^2-\left(4a^2+bc\right)\left(4b^2+ca\right)=\left(a-b\right)^2\left(\frac{1}{4}c^2+a^2+b^2+6ab-3c\left(a+b\right)\right)\ge 0$.

Theo AM – GM ta có $\frac{1}{\sqrt{4c^2+ab}}\ge\frac{1}{\sqrt{4c^2+t^2}}$.

Vậy ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{2}{\sqrt{4t^2+tc}}+\frac{1}{\sqrt{4c^2+t^2}}\ge\frac{4}{a+b+c}=\frac{4}{2t+c}$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{2}{\sqrt{4t^2+tc}}-\frac{1}{t}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{4c^2+t^2}}-\frac{1}{t}\right)\ge\frac{4}{2t+c}-\frac{2}{t}$$

$$\Leftrightarrow\frac{-t}{\sqrt{4t^2+tc}\left(2t+\sqrt{4t^2+tc}\right)}+\frac{-4c}{\sqrt{4c^2+t^2}\left(t+\sqrt{4c^2+t^2}\right)}\ge\frac{-2}{2t+c}$$

$$\Leftrightarrow\frac{2}{t\left(2t+c\right)}-\frac{1}{\sqrt{4t^2+tc}\left(2t+\sqrt{4t^2+tc}\right)}-\frac{4c}{t\sqrt{4c^2+t^2}\left(t+\sqrt{4c^2+t^2}\right)}\ge 0$$

Bất đẳng thức trên là tổng của hai bất đẳng thức sau

$$\frac{1}{3t\left(2t+c\right)}-\frac{1}{\sqrt{4t^2+tc}\left(2t+\sqrt{4t^2+tc}\right)}\ge 0\ (1)$$

$$\frac{5}{3t\left(2t+c\right)}-\frac{4c}{t\sqrt{4c^2+t^2}\left(t+\sqrt{4c^2+t^2}\right)}\ge 0\ (2)$$

Bất đẳng thức được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b,c=0$ hoặc các hoán vị.

Bài 16. (Việt Nam TST 2006) Cho x,y,z là các số thực thuộc đoạn $\left[1;2\right]$. Chứng minh $\left(x+y+z\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\ge 6\left(\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}\right)$.

Lời giải

Ta cần chứng minh

$$f(x,y,z)=(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)-6\left(\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}\right)\ge 0.$$

Không mất tính tổng quát giả sử $x = \max\{x, y, z\}$.

Xét hiệu:

$$f(x,y,z) - f\left(x, \frac{y+z}{2}, \frac{y+z}{2}\right) = \frac{(x+y+z)(y-z)^2}{yz(y+z)} - \frac{6(x+y+z)(y-z)^2}{(x+y)(x+z)(2x+y+z)}$$

$$= \frac{(x+y+z)(y-z)^2[(x+y)(z+x)(2x+y+z) - 6yz(y+z)]}{(x+y)(y+z)(z+x)(2x+y+z)}$$

vì x là số lớn nhất trong ba số nên $(x+y)(z+x)(2x+y+z) > 6yz(y+z)$.

nên $f(x,y,z) \ge f(x,t,t)$ với $t = \dfrac{y+z}{2} \ge 1$

Vì vậy ta chỉ cần chứng minh $f(x,t,t) \ge 0$.

Thật vậy, bất đẳng thức tương đương với:

$$(x+2t)\left(\frac{1}{x} + \frac{2}{t}\right) - 6\left(\frac{x}{2t} + \frac{2t}{t+x}\right) \ge 0 \Leftrightarrow \frac{(t-x)^2(2t-x)}{tx(t+x)} \ge 0,.$$

Bất đẳng thức cuối đúng do $2t \ge 2 \ge x$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z; x = 2, y = z = 1$.

Bài toán được chứng minh.

C. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1. Cho a,b,c là độ dài 3 cạnh một tam giác thoả mãn điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 = 3$.

Chứng minh rằng $a + b + c \ge 2 + abc$.

Bài 2. Cho a,b,c là các số thực không âm thoả mãn điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 = 3$.

Chứng minh rằng $(2 - ab)(2 - bc)(2 - ca) \ge 1$.

Bài 3. Cho a,b,c là các số thực dương có tích bằng 1. Chứng minh

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{13}{a+b+c+1} \ge \frac{25}{4}.$$

Bài 4. Cho *a,b,c* là các số thực dương thỏa mãn $a, b, c \ge 1$ và $a + b + c = 6$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \left(1 + a^2\right)\left(1 + b^2\right)\left(1 + c^2\right)$.

Bài 5. Cho *a,b,c* là các số thực không âm thỏa mãn $a + b + c = \dfrac{3}{2}$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \left(1 + a^2\right)\left(1 + b^2\right)\left(1 + c^2\right)$.

Bài 6. Cho a,b,c là các số thực không âm thỏa mãn $a + b + c = 1$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \left(a^3 + b^3\right)\left(b^3 + c^3\right)\left(c^3 + a^3\right)$.

Bài 7. Cho x,y,z là các số thực dương có tích bằng 1. Chứng minh

$$x^2+y^2+z^2+x+y+z\ge 2\left(xy+yz+zx\right).$$

Bài 8. Cho a,b,c là các số thực dương có tích bằng 1. Chứng minh

$$a^2+b^2+c^2\ge \frac{1}{2}\left(a+b+c+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

Bài 9. Cho x,y,z là các số thực dương có tổng bằng 1. Chứng minh

$$\frac{1}{xyz}-54\left(x^3+y^3+z^3\right)-\left(\frac{x}{yz}+\frac{y}{zx}+\frac{z}{xy}\right)\ge \frac{21}{2}.$$

Bài 10. Cho a,b,c là các số thực không âm có tổng bằng 1. Chứng minh

$$\left(a^3+b^3\right)\left(b^3+c^3\right)\left(c^3+a^3\right)\le \frac{1}{256}.$$

Bài 11. Cho a,b,c là các số thực dương có tích bằng 1. Chứng minh

$$\frac{1}{a^2-a+1}+\frac{1}{b^2-b+1}+\frac{1}{c^2-c+1}\le 3.$$

Bài 12. Cho a,b,c là các số thực không âm có tổng bằng 1. Chứng minh

$$\frac{a}{1+b^2+c^2}+\frac{b}{1+c^2+a^2}+\frac{c}{1+a^2+b^2}\ge \frac{4}{5}.$$

Bài 13. Cho x,y,z là các số thực không âm thoả mãn điều kiện $x+y+z=3$.

Chứng minh rằng $\left(3x^2+5\right)\left(3y^2+5\right)\left(3y^2+5\right)\ge 512$.

Bài 14. Cho x,y,z là các số thực không âm. Chứng minh

$$\left(x+y+z\right)^5\ge \frac{9}{4\sqrt{6}-9}\left(x^3+y^3+z^3\right)\left(xy+yz+zx\right).$$

Bài 15. Cho x,y,z là các số thực dương thoả mãn điều kiện $x^2+y^2+z^2=1$.

Chứng minh rằng $\dfrac{9}{4}\le \dfrac{1}{1+xy}+\dfrac{1}{1+yz}+\dfrac{1}{1+zx}\le \dfrac{27}{4\left(x+y+z\right)^2}$.

Bài 16. Cho a,b,c là các số thực không âm thoả mãn điều kiện $ab+bc+ca>0$.

Chứng minh rằng $\dfrac{1}{\sqrt{a^2+bc}}+\dfrac{1}{\sqrt{b^2+ca}}+\dfrac{1}{\sqrt{c^2+ab}}\ge \dfrac{6}{a+b+c}$.

D. HƯỚNG DẪN GIẢI – ĐÁP SỐ

Bài 1. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$P\left(a,b,c\right)=a+b+c-abc-2\ge 0.$$

Không mất tính tổng quát gỉa sử $a=\max\left\{a,b,c\right\}$ ta có

$3 = a^2 + b^2 + c^2 \ge a^2 + \frac{1}{2}(b+c)^2 > \frac{3}{2}a^2 \Rightarrow 1 \le a < \sqrt{2}$.

Ta chứng minh $P(a,b,c) \ge P\left(a, \sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}}, \sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}}\right)$.

Thật vậy

$$P(a,b,c) - P\left(a, \sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}}, \sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}}\right) = b + c - \sqrt{2\left(b^2+c^2\right)} + a\left(\frac{b^2+c^2}{2} - bc\right)$$

$$= \frac{a(b-c)^2}{2} - \frac{(b-c)^2}{b+c+\sqrt{2\left(b^2+c^2\right)}}$$

$$= \frac{(b-c)^2}{2}\left(a - \frac{2}{b+c+\sqrt{2\left(b^2+c^2\right)}}\right)$$

$$\ge \frac{(b-c)^2}{2}\left(a - \frac{2}{a+\sqrt{2\left(3-a^2\right)}}\right)$$

$$= \frac{(b-c)^2}{2}\left(a^2 + a\sqrt{2\left(3-a^2\right)} - 2\right) \ge 0, \forall a \in \left[1; \sqrt{2}\right)$$

Mặt khác

$$P\left(a, \sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}}, \sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}}\right) = a + \sqrt{2\left(3-a^2\right)} - \frac{a\left(3-a^2\right)}{2} - 2$$

$$= \left(1 - \sqrt{\frac{3-a^2}{2}}\right)\left(a\sqrt{\frac{3-a^2}{2}} + a - 2\right)$$

Chú ý $1 - \sqrt{\frac{3-a^2}{2}} \ge 0$

$$a\sqrt{\frac{3-a^2}{2}} + a - 2 \ge 0 \Leftrightarrow a^2\left(3-a^2\right) \ge 2(2-a)^2$$

$$\Leftrightarrow (a-1)\left(8 - a^3 - a^2\right) \ge 0$$

Luôn đúng. Bất đẳng thức được chứng minh đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Cách 2: Giả sử $a=\max\left\{a,b,c\right\}\Rightarrow a\ge 1$ và vì a,b,c là độ dài ba cạnh một tam giác nên $a\le b+c\le 2$.

Khi đó

$$P=a+b+c-2-abc=a+\sqrt{b^2+c^2+2bc}-2-abc=a+\sqrt{t+2s}-2-as.$$

Với $t=b^2+c^2,s=bc,s\in\left[0;\frac{t}{2}\right]$.

Xét hàm số $f(s)=a+\sqrt{t+2s}-2-as$ với $s\in\left[0;\frac{t}{2}\right]$ ta có

$$f'(s)=\frac{1}{\sqrt{t+2s}}-a;\ f''(s)=-\frac{1}{\sqrt{(t+2s)^3}}<0.$$

Vì vậy $f'(s)\le f'(0)=\frac{1}{\sqrt{t}}-a=\frac{1}{\sqrt{3-a^2}}-a<0,\forall a\in\left[1;2\right]$.

Vì vậy f(s) nghịch biến trên đoạn $\left[0;\frac{t}{2}\right]$ suy ra

$$f(s)\ge f\left(\frac{t}{2}\right)=a+\sqrt{2t}-2-\frac{at}{2}$$

$$=a+\sqrt{2\left(3-a^2\right)}-2-\frac{a\left(3-a^2\right)}{2}$$

$$=\left(1-\sqrt{\frac{3-a^2}{2}}\right)\left(a\sqrt{\frac{3-a^2}{2}}+a-2\right)\ge 0$$

Bài 2. Không mất tính tổng quát giả sử $a=\min\left\{a,b,c\right\}\Rightarrow a\le 1$ ta có

$$P\left(a,b,c\right)=\left(2-ab\right)\left(2-ac\right)=4-2a\left(b+c\right)+a^2bc.$$

Ta chứng minh $P\left(a,b,c\right)\ge P\left(a,\sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}},\sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}}\right)$

Thật vậy bất đẳng thức tương đương với

$$-2a\left(b+c\right)+a^2bc\ge -2a\sqrt{2\left(b^2+c^2\right)}+a^2.\frac{b^2+c^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\left[\sqrt{2\left(b^2+c^2\right)}-\left(b+c\right)\right]\ge\frac{a}{2}\left(b-c\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{4(b-c)^2}{\sqrt{2(b^2+c^2)}+b+c} \ge a(b-c)^2$$

$$\Leftrightarrow 4 \ge a(b+c)+a\sqrt{2(b^2+c^2)}$$

Ta có

$$4-a(b+c)-a\sqrt{2(b^2+c^2)} \ge 4-2a\sqrt{2(b^2+c^2)}$$

$$=4-2a\sqrt{2(3-a^2)}=\frac{4(1-a^2)(2-a^2)}{2+a\sqrt{2(3-a^2)}} \ge 0$$

Vậy ta chỉ cần chứng minh

$$\left(2-\frac{b^2+c^2}{2}\right)\left(2-a\sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}}\right)^2 \ge 1 \Leftrightarrow (a^2+1)\left(2-a\sqrt{\frac{3-a^2}{2}}\right)^2 \ge 2.$$

Ta có $2(a^2+1)-(a+1)^2=(a-1)^2 \ge 0 \Rightarrow a^2+1 \ge \frac{(a+1)^2}{2}$.

Vậy ta chỉ cần chứng minh

$$(a+1)^2\left(2-a\sqrt{\frac{3-a^2}{2}}\right)^2 \ge 4 \Leftrightarrow (a+1)\left(2-a\sqrt{\frac{3-a^2}{2}}\right) \ge 2$$

$$\Leftrightarrow a\left(2-(a+1)\sqrt{\frac{3-a^2}{2}}\right) \ge 0 \Leftrightarrow \frac{a(a^4+2a^3-2a^2-6a+5)}{2+(a+1)\sqrt{\frac{3-a^2}{2}}} \ge 0$$

$$\Leftrightarrow a(a-1)^2(a^2+4a+5) \ge 0$$

Luôn đúng. Bất đẳng thức được chứng minh đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài 3. Bất đẳng thức cần chứng minh có dạng

$$P(a,b,c)=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{13}{a+b+c+1}-\frac{25}{4} \ge 0.$$

Không mất tính tổng quát giả sử $a=\max\{a,b,c\} \Rightarrow a \ge 1, x=\sqrt{bc} \le 1$.

Ta chứng minh

$P(a,b,c) \ge P(a,\sqrt{bc},\sqrt{bc})$.

Thật vậy

$$P(a,b,c)-P\left(a,\sqrt{bc},\sqrt{bc}\right)=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{2}{\sqrt{bc}}+\frac{13}{a+b+c+1}-\frac{13}{a+2\sqrt{bc}+1}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)^2}{bc}-\frac{13\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)^2}{(a+b+c+1)\left(a+2\sqrt{bc}+1\right)}$$

$$=\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)^2\left[\frac{1}{bc}-\frac{13}{(a+b+c+1)\left(a+2\sqrt{bc}+1\right)}\right].$$

$$\geq\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)^2\left[1-\frac{13}{(3+1)(3+1)}\right]\geq 0$$

Mặt khác $P\left(a,\sqrt{bc},\sqrt{bc}\right)=P\left(\frac{1}{x^2},x,x\right)=x^2+\frac{2}{x}+\frac{13}{2x+1+\frac{1}{x^2}}-\frac{25}{4}$

$$=\frac{(x-1)^2\left(8x^4+20x^3-18x^2-9x+8\right)}{4x(x+1)\left(2x^2-x+1\right)}\geq 0,\forall x\in(0;1].$$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài 4.

Ta có $\left(1+a^2\right)\left(1+b^2\right)-\left[1+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right]^2=-\frac{1}{16}(a-b)^2\left[a^2+6ab+b^2-8\right]\leq 0$ với mọi $a,b\geq 1$.

Do đó $\left(1+a^2\right)\left(1+b^2\right)\leq\left[1+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right]^2$.

Suy ra $P\leq\left[1+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right]^2\left(1+c^2\right)=\left[1+\left(\frac{6-c}{2}\right)^2\right]^2\left(1+c^2\right)\leq 125$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=2$.

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng 125 đạt tại $a=b=c=2$.

Bài 5. Không mất tính tổng quát giả sử

$$c=max\{a,b,c\}\Rightarrow\begin{cases}c\geq\frac{1}{2},a+b=\frac{3}{2}-c\leq 1\\ ab\leq\frac{(a+b)^2}{4}=\frac{1}{4}\end{cases}$$

Khi đó $\left(1+a^2\right)\left(1+b^2\right) \geq \left[1+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right]^2$.

Thật vậy $\left(1+a^2\right)\left(1+b^2\right)-\left[1+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right]^2 = -\frac{(a-b)^2}{16}\left(a^2+6ab+b^2-8\right) \geq 0$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b$.

Khi đó $P \geq \left(1+c^2\right)\left[1+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right]^2 = \left(1+c^2\right)\left[1+\left(\frac{3}{4}-\frac{c}{2}\right)^2\right]^2 \geq \frac{125}{64}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{2}$.

Cách 2 : Ta có $\left(1+a^2\right)\left(1+b^2\right)\left(1+c^2\right)$

$= a^2+b^2+c^2+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2c^2+1$

$= (a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)+(ab+bc+ca)^2-2abc(a+b+c)+a^2b^2c^2+1$

$= \frac{13}{4}-2(ab+bc+ca)+(ab+bc+ca)^2+a^2b^2c^2-3abc$

$= (ab+bc+ca-1)^2+\left(abc-\frac{3}{2}\right)^2 \geq \left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{11}{8}\right)^2 = \frac{125}{64}$

Do $ab+bc+ca \leq \frac{1}{3}(a+b+c)^2 = \frac{3}{4}; abc \leq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 = \frac{1}{8}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{2}$.

Bài 6. Không mất tính tổng quát giả sử $a \geq b \geq c$ đặt $t=b+c, s=bc, s \in \left[0;\frac{t^2}{4}\right]$ ta có $a=1-t$.

Khi đó $P = \left[a^6+a^3\left(b^3+c^3\right)+b^3c^3\right]\left(b^3+c^3\right)$.

$= \left[a^6+a^3(b+c)^3-3a^3bc(b+c)+b^3c^3\right].\left[(b+c)^3-3bc(b+c)\right]$

$= \left(a^6+a^3t^3-3a^3ts+s^3\right)\left(t^3-3ts\right)$

Xét hàm số $f(s) = \left(a^6+a^3t^3-3a^3ts+s^3\right)\left(t^3-3ts\right)$ ta có

$f'(s) = \left(3s^2-3a^3t\right)\left(t^3-3ts\right)-3t\left(a^6+a^3t^3-3a^3ts+s^3\right)$.

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta có $a^6+a^3t^3-3a^3ts+s^3\ge 0$.

Theo điều kiện suy ra

$$\left(3s^2-3a^3t\right)\left(t^3-3ts\right)=3t\left(s^2-a^3t\right)\left(t^2-3s\right)\le 3t\left(s^2-\frac{t^4}{8}\right)\left(t^2-3s\right)\le 0.$$

Do đó $f'(s)\le 0\Rightarrow P=f(s)\le f(0)=t^3\left(a^6+a^3t^3\right)=t^3(1-t)^3\left[t^3+(1-t)^3\right]$.

Xét hàm số $g(t)=t^3(1-t)^3\left[t^3+(1-t)^3\right]$ với $t\in\left[0;\frac{2}{3}\right]$ ta có

$$g'(t)=-3t^2(t-1)^2(2t-1)^3;\ f'(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\\ t=\frac{1}{2}\end{array}\right.\text{(do } t\in\left[0;\frac{2}{3}\right]\text{)}.$$

Ta có g’(t) đổi dấu từ dương sang âm khi đi qua $t=\frac{1}{2}$ nên g(t) đạt cực đại tại $t=\frac{1}{2}$ hay $P\le g(t)\le g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{256}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=\frac{1}{2}$, $c=0$ hoặc các hoán vị.

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng $\frac{1}{256}$ đạt tại $a=b=\frac{1}{2}, c=0$ hoặc các hoán vị.

Nhận xét. Với a,b,c không âm thỏa mãn $a+b+c=k$. Chứng minh tương tự ta có

$$\left(a^3+b^3\right)\left(b^3+c^3\right)\left(c^3+a^3\right)\le\frac{k^9}{256}.$$

Bài 7. Ta cần chứng minh

$$P(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+x+y+z-2(xy+yz+zx)\ge 0.$$

Không mất tính tổng quát giả sử $x=\min\{x,y,z\}\Rightarrow x\le 1, yz\ge 1$.

Xét hiệu $P(x,y,z)-P\left(x,\sqrt{yz},\sqrt{yz}\right)=\left(\sqrt{y}-\sqrt{z}\right)^2\left(y+z-2x+1+2\sqrt{yz}\right)\ge 0$.

Ta chỉ cần chứng minh $P\left(x,\sqrt{yz},\sqrt{yz}\right)=P\left(\frac{1}{t^2},t,t\right)\ge 0$ với $t=\sqrt{yz}$.

Thật vậy bất đẳng thức tương đương với

$$\frac{1}{t^4}+\frac{1}{t^2}+2t-\frac{4}{t}\ge 0\Leftrightarrow\frac{(t-1)^2\left(2t^3+4t^2+2t+1\right)}{t^4}\ge 0.$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$.

Bài 8. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$P(a,b,c)=a^2+b^2+c^2-\frac{1}{2}\left(a+b+c+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq 0.$$

Không mất tính tổng quát giả sử $a=\min\{a,b,c\}\Rightarrow t=\sqrt{bc}\geq 1$.

Ta chứng minh $P(a,b,c)\geq P(a,t,t)$.

Thật vậy $P(a,b,c)-P(a,t,t)=(\sqrt{b}-\sqrt{c})^2\left[(\sqrt{b}+\sqrt{c})^2-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{bc}\right)\right]$.

$$\geq(\sqrt{b}-\sqrt{c})^2.\left[4-\frac{1}{2}(1+1)\right]\geq 0$$

Mặt khác $P(a,t,t)=P(\frac{1}{t^2},t,t)=\frac{(t-1)^2(3t^4+4t^3+5t^2+4t+2)}{2t^4}\geq 0$.

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài 9. Ta cần chứng minh

$$P(x,y,z)=\frac{1}{xyz}-54\left(x^3+y^3+z^3\right)-\left(\frac{x}{yz}+\frac{y}{zx}+\frac{z}{xy}\right)-\frac{21}{2}\geq 0.$$

Chú ý

$$P(x,y,z)=\frac{(x+y+z)^2-x^2-y^2-z^2}{xyz}-54\left(x^3+y^3+z^3\right)-\frac{21}{4}$$

$$=2\left[\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}-27\left(x^3+y^3+z^3\right)\right]-\frac{21}{2}.$$

Không mất tính tổng quát giả sử $x=\max\{x,y,z\}$ ta chứng minh

$$P(x,y,z)\geq P\left(x,\frac{y+z}{2},\frac{y+z}{2}\right).$$

Xét hiệu $P(x,y,z)-P\left(x,\frac{y+z}{2},\frac{y+z}{2}\right)=\frac{(y-z)^2\left(4-81yz(y+z)^2\right)}{2yz(y+z)}\geq 0$

Bởi vì $yz(y+z)^2=4y.z.\frac{y+z}{2}.\frac{y+z}{2}\leq 4\left(\frac{y+z+\frac{y+z}{2}+\frac{y+z}{2}}{4}\right)^4$

$$=\frac{(y+z)^4}{4}\leq\frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{4}{81}$$

Ta cần chứng minh

$$P(x,\frac{y+z}{2},\frac{y+z}{2})=P(x,\frac{1-x}{2},\frac{1-x}{2})\geq 0$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\frac{1}{x}+\frac{4}{1-x}-27\left(x^3+\frac{(1-x)^3}{4}\right)\right)-\frac{21}{2}\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(3x-2)^2\left(9x^3+12x^2-6x+1\right)}{2x(1-x)}\geq 0$$

Bất đẳng thức cuối luôn đúng. Bất đẳng thức được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=\frac{2}{3},y=z=\frac{1}{6}$ hoặc các hoán vị.

Bài 12. Gọi P là biểu thức vế trái và sử dụng bất đẳng thức C –S ta có

$$P\geq \frac{(a+b+c)^2}{a\left(1+b^2+c^2\right)+b\left(1+c^2+a^2\right)+c\left(1+a^2+b^2\right)}$$

$$=\frac{1}{1+a^2(b+c)+a\left(b^2+c^2\right)+bc(b+c)}$$

Ta tìm giá trị lớn nhất của biểu thức với giả thiết $a=\max\{a,b,c\}$.

$Q=a^2(b+c)+a\left(b^2+c^2\right)+bc(b+c)=a^2t+a\left(t^2-2s\right)+ts$.

Xét hàm số $f(s)=a^2t+a\left(t^2-2s\right)+ts$ trên đoạn $\left[0;\frac{t^2}{4}\right]$ ta có

$$f'(s)=t-2a\leq 0\Rightarrow f(s)\leq f(0)=a^2t+at^2=at\leq\left(\frac{a+t}{2}\right)^2=\frac{1}{4}.$$

Do đó $P\geq \frac{1}{1+Q}\geq \frac{5}{4}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=\frac{1}{2},c=0$ hoặc các hoán vị.

Bài 13. Giả sử $x=\max\{x,y,z\}\Rightarrow y+z\leq 2,x\geq 1$ ta có

$$\left(3y^2+5\right)\left(3z^2+5\right)-\left[3\left(\frac{x+y}{2}\right)^2+5\right]^2=\frac{3}{16}(x-y)^2\left[40-3\left(x^2+y^2+6xy\right)\right]\geq 0.$$

Vậy ta chứng minh $\left(3x^2+5\right)\left[3\left(\frac{x+y}{2}\right)^2+5\right]^2 \geq 512$

$\Leftrightarrow \left(3x^2+5\right)\left[3\left(\frac{3-x}{2}\right)^2+5\right]^2-512 \geq 0$.

$\Leftrightarrow (x-1)^2\left(3x^4-30x^3+144x^2-306x+317\right) \geq 0$

Bất đẳng thức luôn đúng.

Bài toán được chứng minh đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$.

Bài 16. HD: Đưa về chứng minh $64\left(a^2+bc\right)\left(b^2+ca\right)\left(c^2+ab\right) \leq (a+b+c)^6$.